(昭和 43 年5月日本造船学会春季講演会において講演)

変動繰返し荷重を受ける単部材および多部材構造の信頼性

正員 板垣 浩*
篠塚 正宣**
A. M. Freudenthal**

Reliability of Single-and Multi-member Structure subjected to Fluctuating Load

by Hiroshi Itagaki, *Member* Masanobu Shinozuka
Alfred M. Freudenthal

Summary

The growth of the fatigue crack under fluctuating load of which amplitude was assumed to be a random variable following Rayleigh distribution was discussed. The probability distribution function of the fatigue crack length after a number of load applications was given and the momentary risk and reliability functions were obtained using Griffith-Irwin criterion for catastrophic failure. Numerical simulations were carried out to check the result and compare it with Palmgren-Miner rule. It was shown that the fatigue lives estimated from Palmgren-Miner rule were much longer than those of the present model.

The result was applied to a multiple-member structure to see its fail-safe capacity. Two methods were proposed to determine upper and lower bounds of reliability function of the structure.

1 緒　　　言

定応力（または定荷重）疲労試験の結果も，いわゆるランダム荷重疲労試験の結果もともにかなりのバラツキを示すことは良く知られているところである。このバラツキを説明するためには疲労機構の確率的かつ力学的モデルを導入せねばならぬ。たとえば，材料の疲労に対する抵抗の統計的変動に主眼を置いた Freudenthal[1], Freudenthal および Gumbel[2] あるいは Parzen[3] の研究，また Palmgren-Miner の仮説に基づいて材料が定常ガウス過程であらわされる変動応力を受ける場合の疲労被害の平均値，分散等について考察を加えた Crandall, Mark および Khabbaz[4] の研究等がある。篠塚[5]は変動応力と材質の変動との両方を考慮して同様の解析を行ないうることを指摘している。結局のところ，疲労寿命にバラツキが見られるのは，同一の応力履歴（statistically identical の意）を受けたとしてもそれによつて受ける疲労被害が異るためであるといえる。本論文では Fig 1-b に示すようなランダム振幅の繰返し応力が作用する場合を考察するのであるが，まずこのような場合の疲労が普通どのように扱われるかを概観しておく。

いま，試験片に $S_1, S_2, \cdots, S_n$ なる振幅の応力が順に作用したときに試験片の受けた被害を D_n で表わすこととする。厳密にいえば，第 n 回目の応力による疲労被害の増加は D_i $(i=1,2,\cdots,n-1)$ および S_i の全履歴に依存するであろう。しかし，疲労被害の解析には被害過程を一つのマルコフ過程と見做すという仮定が広く用いられている。たとえば，第 n 回目の応力による被害の増加が

$$D_n-D_{n-1}=f(S_n)\cdot g(D_{n-1}) \tag{1}$$

* 横浜国立大学
** コロムビア大学

のように2つの関数 $f(S_n)$ および $g(D_{n-1})$ の積で表わし得るとする仮定がそれである。ここに，$f(S_n)$ は第 n 回目の応力の効果を，$g(D_{n-1})$ は $n-1$ 回目までの応力繰返しによる累積被害の影響を表わす。eq.(1)を仮定することは D_n が D_{n-1} および S_n によつて定められること，すなわちマルコフ過程を仮定することを意味する。また eq.(1)のように S_n と D_{n-1} の効果を分離して，その積で被害増加を定める仮定は広く用いられているところであり，本報告でもそれを採る。さらに，普通，解析を容易にするため応力繰返し数 n は連続変数として扱われ，eq.(1)は

$$\frac{dD}{dn}=f(S)\cdot g(D) \qquad (2)$$

あるいは

$$\Delta_n=\int_{D_0}^{D_n}\frac{dx}{g(x)}=\int_0^n f(y_n)dn\simeq\sum_{k=1}^{n}f(S_k) \qquad (3)$$

のようにかかれる。ここに，D_0 は初期被害である。もし，Δ_n が応力履歴と無関係なある限界値 Δ^* に達したとき，破壊が起ると仮定すれば，疲労寿命 N は次式を満足する最小の整数として定義される。

$$\sum_{k=1}^{n}f(S_k)\geq\Delta^* \qquad (4)$$

あるいは，$f(S_k)\ll\Delta^*$ ならば

$$\sum_{k=1}^{n}f(S_k)=\Delta^* \qquad (4\text{-b})$$

である。

一定応力振幅とすれば，

$$N\cdot f(S)=\Delta^* \quad \text{あるいは} \quad f(S)=\Delta^*/N \qquad (5)$$

eq.(5)で示される S と N の関係がいわゆる SN 曲線である。応力振幅が一定ではなく変動する場合，応力の作用順序が被害に影響しないという仮定をさらに用いれば，$S^{(1)}, S^{(2)}, \cdots, S^{(m)}$ なる応力を $n^{(1)}, n^{(2)}, \cdots, n^{(m)}$ 回ずつ作用させたときの被害は

$$\Delta=\sum_{r=1}^{m}n^{(r)}\cdot f(S^{(r)})=\Delta^*\sum_{r=1}^{m}\frac{n^{(r)}}{N^{(r)}} \qquad (6)$$

ここに，$N^{(r)}$ は $S^{(r)}$ に対応する寿命である。もし，

$$n^{(1)}:n^{(2)}:\cdots:n^{(m)}$$

が一定になるようにプログラムしてある stress sequence については，寿命 N は

$$N=\left(\sum_{r=1}^{m}p^{(r)}/N^{(r)}\right)^{-1} \qquad (7)$$

ここに

$$p^{(r)}=n^{(r)}\Big/\sum_{r=1}^{m}n^{(r)}=S^{(r)}\ \text{の frequency} \qquad (8)$$

で与えられる。

変動荷重疲労の解析によく用いられる Palmgren-Miner の仮説は（1）eq.(2)が成立する，（2）変動応力の作用順序が疲労過程と限界被害に影響しない，（3）限界被害は一定である。という仮定から導びかれることが判る。

以上の論議は全く deterministic なものであり，実測されるようなバラツキを説明するためには eq.(1)に統計的性格を持たせねばならぬ。疲労寿命の統計的変動は主として次の要因から生ずるものとしてよかろう。すなわち，

（1） 荷重がランダムであること，

（2） 微視的な疲労機構の統計的性質

（3） 機械的性質の統計的変動（巨視的）

である。

参考文献（4）では要因（1）のみ考え，eq.(1)中の関数 $f(S)$ および $g(D)$ はともに deterministic としている。それゆえ，もし試験片が全く同じ応力履歴を受けるならば疲労寿命にはバラツキは見られないことになる。換言すれば参考文献（4）で与えられている分散は応力がランダムであることのみに起因するものであ

る。然しながら，参考文献（1）～（3）で用いられているモデルでは $f(S)$ は平均が $\overline{f(S)}$ で分散が $\sigma_{f(S)}{}^2$ であるようなランダム関数で，$g(D)$ は deterministic であるとしている。それゆえ，もし試験片が定応力繰返しを受けたとしても疲労寿命はランダム変数である。この仮定は横堀の理論[6]でも扱われているように，疲労の機構そのものが確率的であること，被害の増加率へのある応力サイクルの効果が，同一試験片についても，サイクルごとに異なることを意味している。これ等の研究は要因（2）による疲労寿命のバラツキの検討といえよう。一方，工学的見地からは，試験片の機械的性質の統計的変動が疲労寿命のバラツキの主原因であるとすることも可能である。eq.（1）を用いるときは $f(S)$ および $g(D)$ は deterministic であるが，個々の試験片に依存することを意味する。

本報告は要因（3）に属する統計的性質を持つ probabilistic-mechanical model によつても疲労寿命のバラツキが説明しうることを示そうとするものである。また，その結果を用いて多部材構造物の信頼性を検討する。

2 Basic Assumptions

疲労機構の probabilistic-mechanical model を構成するために次の如き幾つかの条件を想定する。ただし，はじめから長さ 2Co の亀裂を有する構造物あるいは試験片を考える。構造物中には応力集中源が存在することはまず避けがたいであろうということ，ランダム荷重が作用するときは比較的初期の段階で大きな荷重が作用し応力集中源から疲労亀裂が発生する可能性があることなどを考慮すれば妥当であろう[7].

主な仮定を列記すると*1,

1) 亀裂成長速度について

亀裂成長の速度をあらわす式は幾つか提案されているが[8][9][10]，ここでは stress intensity factor の二乗に比例するという式

$$\frac{dC}{dn}=KS^2C \tag{9}$$

とする。

ここに $2C$ は振幅 S なる応力サイクルが第 n 回目に作用する時に在つた疲労亀裂長さ，K は crack propagation factor である。この形の亀裂成長法則はかなり用いられているもので[11][12]，最近の横掘による実験結果[13]も eq.（9）が妥当であることを示している。eq.（9）は eq.（1）に於て亀裂長さ C を疲労被害の measure ち考え，$f(S)=KS^2$，$g(D)=g(C)=C$ としたものに他ならない。

2) 破　壊　条　件

最終的な疲労破壊は Griffith-Irwin の条件式に従うものとする，すなわち

$$S\geq S_{cr}=(Q/C)^{1/2} \tag{10}$$

（平均応力＝0 の繰返しとする）

ここに，Q は試験片の材料，幾何学的条件による定数。この条件は，被害の程度によらず，応力が eq.(10) を満足すれば破壊が生ずることを意味し，一定被害で破壊するという仮定よりも実際に近いであろう。Palmgren–

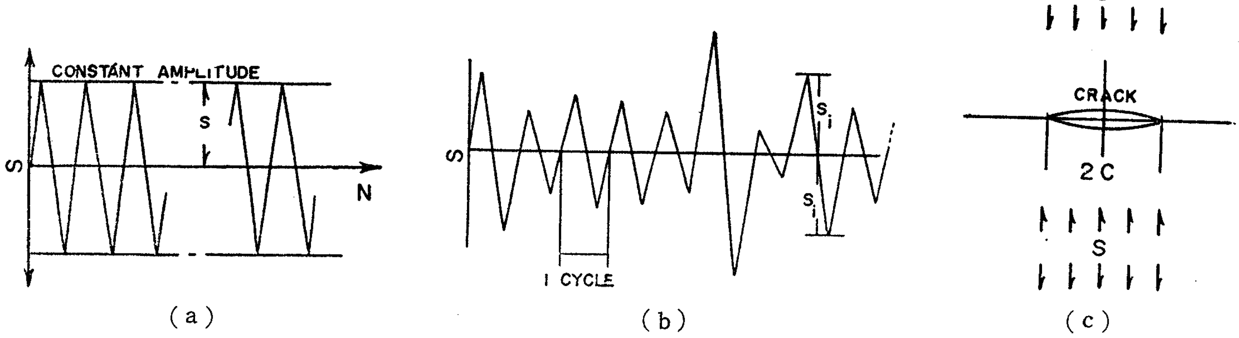


Fig. 1　亀裂を有する材料の受ける応力履歴

*1　Lardner[14] は生存確率を求めるため recurrance formula を導き，同様の研究を行なつているが，本報告とは異る crack growth の式および応力の density function を仮定している。

Miner の仮説は前述のように，最終被害一定の条件から導びかれるので，eq. (10) を採る以上 Palmgren-Miner の仮説は成立しない。

3) Fig. 1-b に示したようなプログラム応力が作用するとする。各サイクルの応力振幅は互に statistically independent で Rayleigh 分布に従うとする。その density は

$$f_S(s)=\frac{2s}{S_C^2}\exp\left(-\frac{s^2}{S_C^2}\right) \qquad s\geq 0 \tag{11}$$

ここに，S_C=定数

である。この stress sequence では応力振幅は random であるが，厳密な意味での random stress sequence ではない。

4) 負荷順序は eq. (9) に影響しないとする。実験結果では荷重の順序が疲労亀裂（疲労被害）の増加率に影響する場合もあるが(15)(16)，ここでは簡単化のため無視する。

以上のごとき仮定の下にプログラム荷重による疲労について考察を進めるが，比較対照のため，はじめに定荷重疲労の場合について簡単に述べておく，Fig. 1-a に示すように定応力振幅 S が繰返し作用するとき，疲労亀裂長さ C とサイクル数 n との関係（以下 C-n 曲線と呼ぶ）は，eq. (9) から

$$\ln\frac{C}{C_0}=K\cdot S^2(n-N_0) \qquad n>N_0 \tag{12}$$

ここに　$2C_0$=初期亀裂長さ，

$2C$=n サイクル後の疲労亀裂長さ，

N_0=最小寿命，または亀裂が成長をはじめるまでに要した繰返し数。

N_{cr} を疲労寿命すなわち，破断の起こらなかつた最後のサイクルまでの繰返し数と定義すれば，eqs. (10), (12) から

$$N_{cr}-N_0=\frac{1}{KS^2}\ln\left(\frac{Q}{C_0S^2}\right) \qquad N_{cr}\geq N_0 \tag{13}$$

$$N_{cr}=\frac{1}{KS^2}\ln\left(\frac{Q}{S^2C^*}\right)=\frac{2}{KS^2}\ln\left(\frac{S^*}{S}\right) \qquad N_{cr}\geq N_0 \tag{14}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}S^*&=(Q/C^*)^{1/2}=\text{fictitious initial strength}\\ 2C^*&=\text{fictitious initial crack}=2C_0e^{-KS^2N_0}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

いわゆる S-N 線図は仮定（2）から，K と S^* が与えられると eq. (14) から定められる。eq. (13) 中の3つのパラメーター，K, N_0, C_0（従つて eq. (14) 中の K および S^*）は試験片ごとに異なり，統計的変動量と考えられる。特に crack propagarion factor は試験片ごとに異るだけではなく，亀裂先端附近の材質に着目すれば，同一試験片内でも場所によつて異なると見るのが当然である。C-n 曲線が実験でもジグザグになる理由の1つであろう。しかし，本報告では亀裂伝播線上での平均値をその試験片の crack propagation factor とする。S-N 曲線のバラツキは，これら諸量のバラツキに起因するものとする。

3 疲労亀裂長さの分布関数

まず，N サイクルのランダム応力を受けたときの疲労亀裂長さ，C_N の分布関数を求める。

いま，eq. (3) であらわされる積分を Δ_N と書くと

$$\Delta_N=\frac{1}{K}\ln\frac{C_N}{C^*}=\sum_{j=1} S_j^2 \tag{16}$$

ここに　S_j=第 j 回目の応力振幅

Δ_N は C_N の単調増加関数であるから，Δ_N の conditional distribution function $F_{\Delta_N}(\delta|k,c^*)$ と C_N の conditional distribution function $F_{C_N}(c|k,c^*)$ との間には

$$F_{\Delta_N}(\delta|k,c^*)=F_{C_N}(c|k,c^*) \tag{17}$$

なる関係がある。ここに，c と δ とは $\frac{1}{k}\ln(c/c^*)=\delta$ なる関係を満足するものとする。また

$$F_{\Delta_N}(\delta|k,c^*)=P\{\Delta_N\leq\delta|K=k,C^*=c^*\} \tag{18}$$

$$F_{C_N}(c|k,c^*)=P\{C_N\leq c|K=k,C^*=c^*\} \tag{19}$$

で，$P\{E_1|E_2\}$ は事象 E_2 がすでに起つたという条件つきで事象 E_1 の起る確率をあらわす。従つて，$F_{\Delta_n}(\delta|k, c^*)$ は fatigne crack propagation factor, K, が k で，initial crack length, C^*, が c^* である場合に N サイクル後の fatigue damage, Δ_N, が δ 以下である確率を示す。$F_{C_N}(c|k, c^*)$ についても同様である。

このモデルについては明らかに

$$F_{\Delta N}(\delta|k, c^*)=P\{0\leq S_1{}^2+S_2{}^2+\cdots+S_N{}^2\leq\delta\}$$
$$=\int_R^{N\text{-fold}}\cdots\cdots\int f_{S_1S_2\cdots S_N}(s_1, s_2, \cdots, s_N)ds_1ds_2\cdots ds_N \tag{20}$$

である。

ここに，R は $0\leq\sum_1^N s_j{}^2\leq\delta$ を満足する積分順域で，$f_{S_1S_2\cdots S_N}(s_1, s_2, \cdots, s_N)$ は $S_1, S_2, \cdots, S_N$ の joint density function である。

たがいに独立の仮定から

$$f_{S_1S_2\cdots S_N}(s_1s_2\cdots, s_N)=\prod_{j=1}^{N}\frac{2s_j}{S_c{}^2}\exp(-s_j^2/S_c^2) \tag{21}$$

eq. (21) を eq. (20) へ代入すれば

$$F_{\Delta N}(\delta|k, c^*)=\int_R\cdots\int S_C{}^{-2N}e^{-S_c^2\sum_1^N s_j^2}ds_1{}^2ds_2{}^2\cdots ds_N{}^2 \tag{22}$$

eq. (22) は Dirichlet's integral formula により

$$F_{\Delta N}(\delta|k, c^*)=\frac{1}{\Gamma(N)}\int_0^{\delta/S_c^2}e^{-u}u^{N-1}du=\bar{\Gamma}(N, \delta/S_c^2) \tag{23}$$

ここに，$\Gamma(N)$=gamma function, $\bar{\Gamma}(N, x)=1-\Gamma(N, x)$

$\Gamma(N, x)$=normalized incomplete gamma function

となる。

したがつて，疲労亀裂長さ，C_N の分布は

$$F_{C_N}(c|k, c^*)=\bar{\Gamma}\left(N, \frac{1}{kS_c{}^2}\ln\frac{c}{c^*}\right)=\frac{1}{\Gamma(N)}\int_0^{\eta}e^{-u}u^{N-1}du \tag{24}$$

ここに，
$$\eta=\ln(c/c^*)/(kS_c{}^2),\quad c\geq c^* \tag{25}$$

C_N の density function は上式を c で微分することにより

$$f_{C_N}(c|k, c^*)=\frac{1}{\Gamma(N)}\left(\frac{1}{kS_c{}^2}\right)^N\cdot\frac{1}{c^*}\cdot\left(\frac{c^*}{c}\right)^{1+\frac{1}{kS_c{}^2}}\cdot\left\{\ln\frac{c}{c^*}\right)^{N-1}\qquad c\geq c^* \tag{26}$$

のように得られる。

eq. (26) を定性的に示すと Fig. 2 のようになる。また C_N に関する幾つかの statistics を示せば，

$$E\left\{\ln\left(\frac{C_N}{c^*}\right)\right\}=kS_c{}^2N \tag{27}$$

$$\sigma_{\left\{\ln\frac{C_N}{c^*}\right\}}=kS_c{}^2\sqrt{N} \tag{28}$$

$$\tilde{C}_N=c^*\exp\{kS_c{}^2(N-1)/(1+kS_c{}^2)\} \tag{29}$$

ここに eqs. (27), (28), (29) それぞれ $\ln\dfrac{C_N}{c^*}$ の条件つき mean, standard deviation および C_N の mode である。

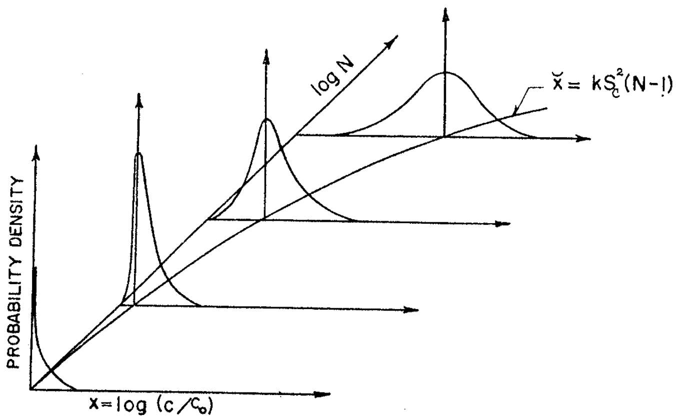


Fig. 2　疲労亀裂長さの分布の応力繰返しによる変化

4　疲労寿命と生存確率

N サイクル目の疲労亀裂の分布が得られると，生存の確率，すなわち疲労寿命が n 以上である確率を求めることができる。eq. (12) 中の N_0 は統計的変数であるが，以下では全体の繰返し数に比べて小さいとして無視す

る。すなわち，$C^*=C_0$ とする*2。また，C_0, C, c_0 および c なる亀裂に対応する critical stress を S_B, S, s_B, s と書くことにする。

さて，$r_{N+1}(k, c_0)$ を $K=k$，$C_0=c_0$ が与えられたという条件下で破壊条件が $N+1$ 回目のサイクル中に満足される確率すなわち条件つきの risk function とすると，

$$r_{N+1}(k, c_0)=r_{N+1}(k, s_B)$$
$$=\int_0^{s_B}\frac{2}{\Gamma(N)}\cdot\frac{1}{(kS_c^2)^N}\cdot\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{s}{s_B}\right)^{\frac{2}{kS_c^2}}\cdot\left\{\ln\left(\frac{s_B}{s}\right)^2\right\}^{N-1}\cdot e^{-\left(\frac{s}{S_c}\right)^2}ds \tag{30}$$

が，eqs. (11)，(26)，(15) から得られる。

S_B と K の joint density function を $f_{S_{BK}}(s_B, k)$ とすれば risk function は

$$r_{N+1}=\int_R\int r_{N+1}(k, s_B)\cdot f_{S_{BK}}(s_B, k)ds_Bdk \tag{31}$$

ここに，R=積分範囲

となる。

なお，eq. (30) は近似的に

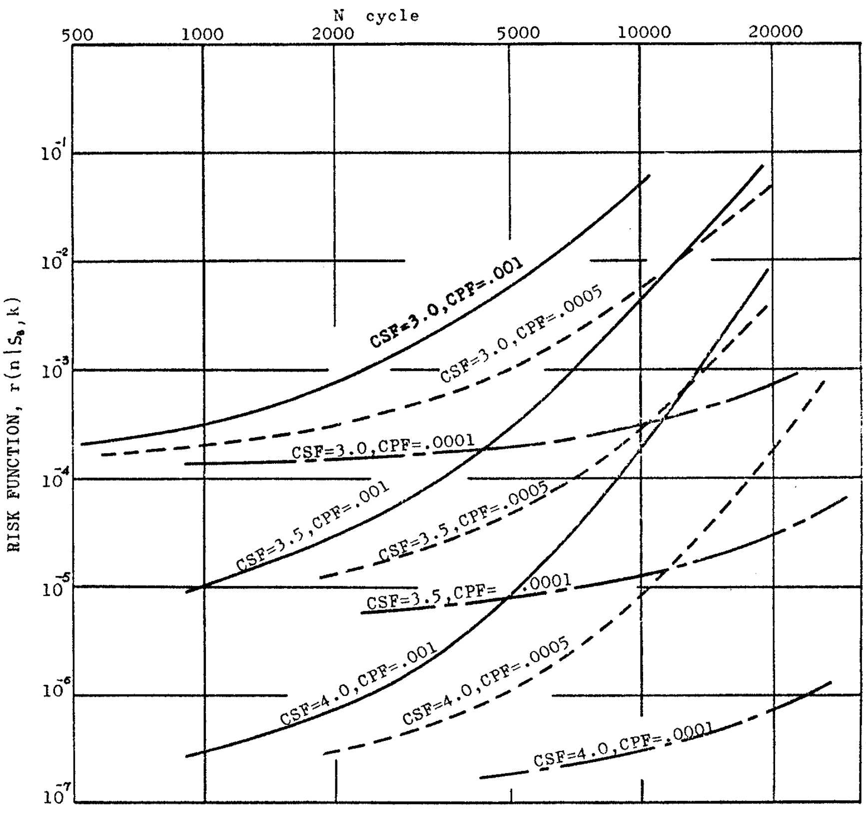
$$r_{N+1}(k, s_B)\fallingdotseq\exp\left\{-\frac{s_B^2/S_C^2}{(1+kS_c^2)^N}\right\} \tag{30'}$$

のようになる。以後の計算では conditional risk として eq. (30′) を用いている。

この conditional risk function を，幾例かの定数値について計算した結果を Fig. 3 に示す。図中，

$$\text{C.P.F.}=k\cdot s_B^2$$
$$\text{C.S.F.}=s_B/S_c$$

であり，前者を nondimensionalized crack propagation factor 後者を central safety factor と呼ぶことにす



Fg. 3 初期強さと疲労亀裂伝播係数とが与えられたときの risk function

*2 $N_0=0$ とするのは，N_0 までは被労被害がないとして（亀裂の成長に影響しないとして），あと何回の繰返しで破断するかを問題とすることになり，本節で求める N に N_0 を加えたものが実際の疲労寿命になる。もし N_0 の確率分布が求まれば，2変量の和の分布として疲労寿命の分布が定まることになる。もし $N_0 \ll N$ ならば N_0 は寿命の分布にはほとんど関係ない。

る。Fig. 3 から momentary risk は繰返し数Nが増加するにつれて急激に大きくなつていくことが判る。

eq. (31) で与えられる risk function の一例として，S_B およびKがともに logarithmic-normal 分布で，かつ，たがいに独立の場合について計算し，Fig. 4 に示してある。このとき，joint density function は

$$f_{S_BK}(k,s_B)=\frac{1}{2\pi\delta_B\delta_K}\cdot\frac{1}{s_B\cdot k}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\delta_B{}^2}\left(\log\frac{s_B}{\breve{S}_B}\right)^2+\frac{1}{\delta_K{}^2}\left(\log\frac{k}{\breve{K}}\right)^2\right]\right\} \tag{32}$$

ここに，$\breve{S}_B$, δ_B, $\breve{K}$, および δ_K はそれぞれ，S_B の median, $\log S_B$ の standard deviation, K の median および $\log K$ の standard deviation である。

これより

$$r_N=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{2\pi\delta_B\delta_K s_B k}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\delta_B{}^2}\left(\log\frac{s_B}{\breve{S}_B}\right)^2+\frac{1}{\delta_K{}^2}\left(\log\frac{k}{\breve{K}}\right)^2\right\}-\frac{s_B{}^2/S_c{}^2}{(1+kS_c{}^2)^{N-1}}\right]ds_B dk \tag{33}$$

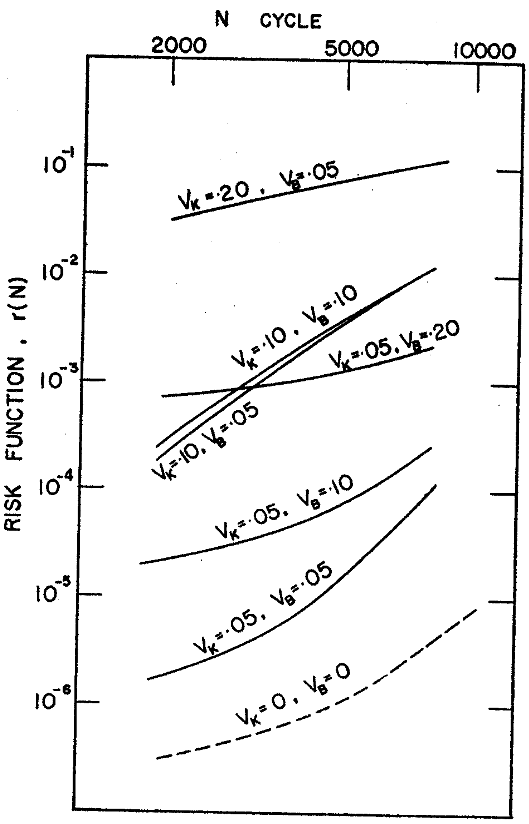


Fig. 4　初期強さと疲労亀裂伝播係数とがともに lognormal 分布に従う時の risk function

となる。この積分は IBM 7090 を利用し数値積分によつて行なつた。諸定数は Table 1 に示す。

Table 1

Central Safety Factor, $\breve{S}_B/S_c$,	4.0
C.P.F, $\breve{k}\cdot\breve{S}_B{}^2$,	5×10^{-4}
$\log_{10}(\breve{k}\cdot\breve{S}_c{}^2$	−4.5
$\log_{10}(\breve{S}_B\cdot S_c)$	.60
$V_K=[\log_{10}(kS_c{}^2)]/\log_{10}(\breve{k}S_c{}^2)$	.05,　.10,　.20
$V_B=[\log_{10}(S_B/S_c)]/\log_{10}(\breve{S}_B/S_c{}^2)$	.05,　.10,　.20

生存確率 (Survivorship function)

このモデルの reliability function (あるいは生存確率) は

$$P\{寿命>n\}$$

であらわされる。いま $S_B=s_B$, $K=k$ が与えられたという条件つきの reliability function を $L_{N_f}(n|k,s_B)$ とかくと，

$$L_{N_f}(n|k,s_B)=\prod_{i=1}^{n}[1-r_i(s_B,k)] \tag{34}$$

$$\doteqdot\exp\left\{-\int_0^n r_x(s_B,k)dx\right\} \tag{35}$$

である。上式に eq. (30) または eq. (30′) を代入すれば

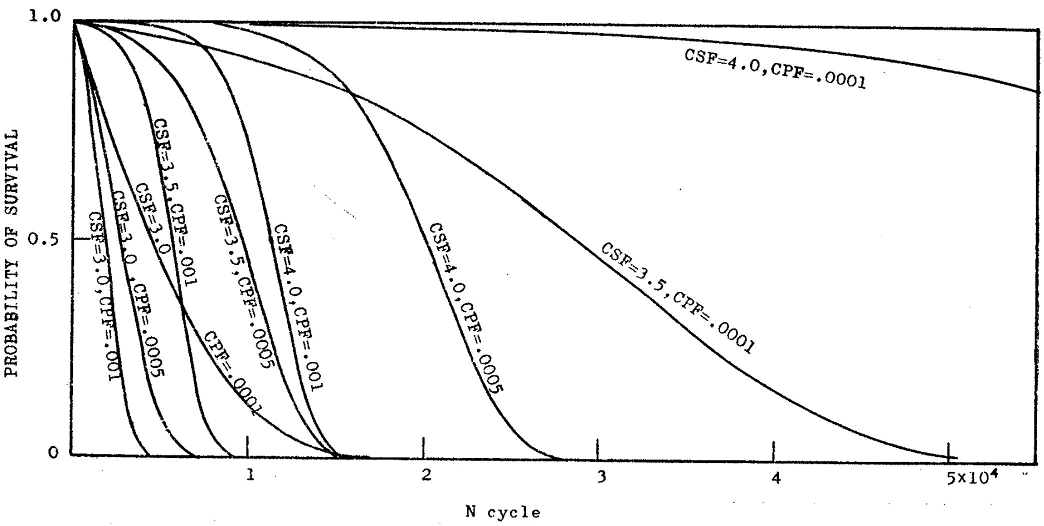


Fig. 5　初さ期強と疲労亀裂伝播係数が与えられた時の生存確率

条件つきの生存確率が得られる，

$$L_{N_f}(n|k, s_B) \doteqdot \exp\left[-\left\{\frac{1}{\ln(1+kS_c{}^2)}\left(E_1\left\{\frac{(s_B/S_c)^2}{(1+kS_c{}^2)^{N-1}}\right\}-E_1\{s_B{}^2/S_c{}^2\}\right)\right\}\right] \tag{36}$$

ここに $E_1(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$ である。

数値計算例を Fig.5 に示してある。用いた定数値は Fig.3 と同様である。

S_B, K の joint density function が与えられれば，生存確率 $L_{N_f}(n)$ は

$$L_{N_f}(n)=\iint_R L_{N_f}(n|k, s_B)\cdot f_{S_BK}(s_B, k)ds_Bdk \tag{37}$$

から求まる[*3]。

5 Numerical Simulation

不規則的に変動する繰返し応力による疲労寿命の推定に Palmgren-Miner rule がしばしば用いられることは前述した通りである。然しながら，疲労試験の結果には材質のバラツキが非常に大きく影響するため，不規則疲労での Palmgren-Miner rule の実験的検証はかなり困難であるといわねばならぬ。本節では numerical simulation によつて reliability function を定め，それを前節で得た結果と比較すると同時に，このモデルについて Palmgren-Miner rule が近似的にでも成立つかどうかを検討してみる。以下では，初期強さおよび crack propagation factor は与えられているものとする。したがつて，疲労寿命のバラツキはすべて応力の不規則性のみに起因する。これは実際とは異なる条件ではあるが，そのためより容易に Palmgren-Miner rule を検討しうる。Simulation は I.B.M. 7090 を使用して行なつた。Rayleigh 分布に従うランダム数を発生させ eq.(9) にしたがつて疲労亀裂長さの増加を定め，かつ，亀裂長さと応力とが破壊条件を満足する関係にあるか否かを調べ，もし破壊条件を満足していなければ，次の乱数を発生させ同様のことを破壊条件を満足するまでくり返す。確壊条件を満足するまでに発生させた乱数の数を寿命，N_f，とする。一方，発生した応力に対応する定応力疲労寿命の逆数 $1/N_i$ を求め順に加えていき，N_f までの和を記録する。また $1/N_i$ の総和が1になるまでの乱数の発生回数を N_M とする。計算機時間を短くするために，寿命が長くても 10^4 程度になるように，S_B, K, S_c 等の定数を選定した。応力履歴の一例を Fig.1-b に示す。

えられた結果は Table 2 に示す。生存確率を plot すると Figs.6 および7のようである。図中の丸印が simulation によるもので，曲線は eq.(35) の計算結果である。両者は比較的良い一致を見せているといえよう。

Table 2

	C.S.F	Cycles to Failure, N_f		Sum of Damage Ratio to Failure, $\sum n_i/N_i$	
		Range	Average	Range	Average
C.P.F. $=5\times10^{-3}$	3*1	57～ 5563	2985	.083～1.170	.425
	4*2	15324～25164	19403	.232～ .376	291

*1 50 simulations
*2 13 simulations

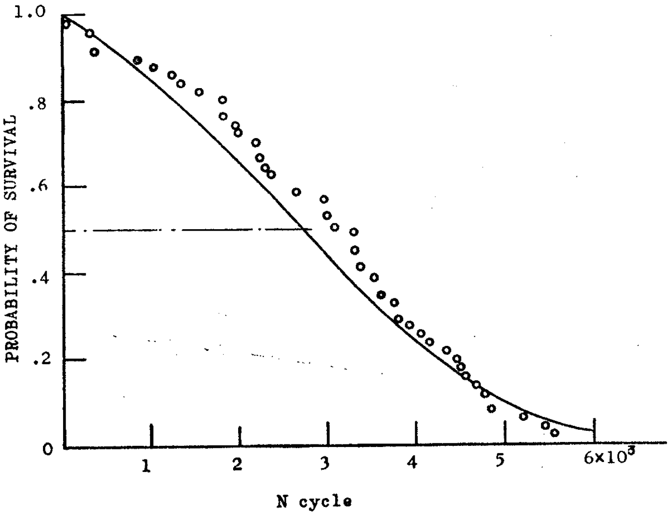


Fig.6 Numerical Simulation の結果—(1)

Palmgren-Miner の法によつて定めた疲労寿命を N_M とし，simulation による破壊までの回数 N_f に対して plot すると Fig.8 のようになる。N_f に比べ N_M は常に大きいか等しいかであることが判る。また，N_f と N_M との間には明瞭な関係があるとは思われない。いわゆる，damage ratio, n_i/N_i, の最終破断までの総和，$\sum n_i/N_i$, は 0.1 から 1.2 の間にあり，その平均は1に比べはるかに小であつた。材質のバラツキが無いことを考慮に入れれば，このバラ

*3 eq.(31) で与えられる risk function を用いて $L_{N_f}(n)=\prod_{i=1}^{n}(1-r_i)$ とするのではない。

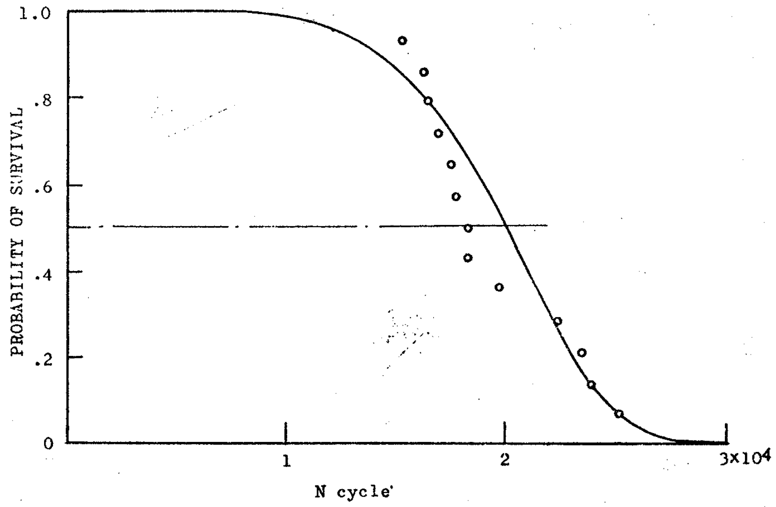


Fig. 7 Numerical Simulation の結果—(2)

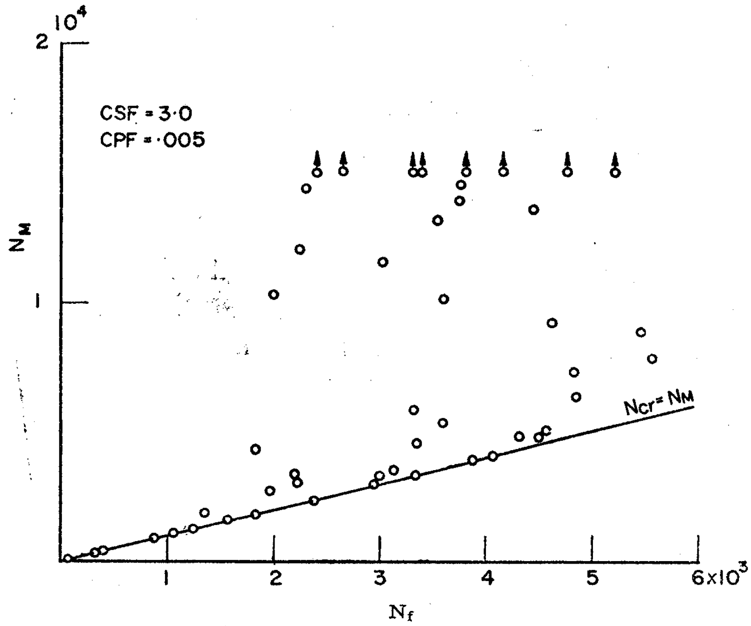


Fig. 8 Miner rule から求めた寿命と実際の寿命との比較
(Numerical Simulation)

ツキは非常に大きいといわざるを得ない。

eg. (35) の計算値から求めた $\widetilde{N_f}$ (寿命の median) と N_M の平均値とを比較すれば，Palmgren-Mner rule による推定寿命とこのモデルの寿命との違いが判定できると思われる。N_M の平均値は

$$\bar{N}_M=1\Big/\left[\int_0^{s_B}\frac{f(s)}{N_{cr}(s)}ds+\int_{s_B}^{\infty}f(s)ds\right] \tag{38}$$

ここに，$f(s)$＝応力振幅の density

$N_{cr}(s)$＝一定応力振幅 (s) による寿命

$$\begin{cases}\doteqdot \mathrm{const.}\times s^{-m} & s_B>s\geqq s_0\\ =1 & s\geqq s_B\end{cases} \tag{39}$$

$f(s)$ として，Rayleigh distribution の density を用いると，

$$\bar{N}_M=\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2},\left(\frac{s_B}{S_c}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{N_{cr}(S_c)}+\exp(-s_B{}^2/S_c{}^2)} \tag{40}$$

となる。

eq. (13) で与えられる S-N diagram は eq. (39) で，$m\approx3$ とした場合に近いので，$m=3$ として計算すると，

$$\bar{N}_M \begin{cases} =6.7\times10^3 & (s_B/S_c=3.0,\ ks_B{}^2=5.0\times10^{-4}) \\ =6.8\times10^4 & (s_B/S_c=4.0,\ ks_B{}^2=5.0\times10^{-4}) \end{cases}$$

となり，

$$\breve{N}_f/\bar{N}_M \begin{cases} =.4 & (s_B/S_c=3.0,\ ks_B{}^2=5.0\times10^{-4}) \\ =.3 & (s_B/S_c=4.0,\ ks_B{}^2=5.0\times10^{-4}) \end{cases}$$

を得る。この数字は simulation によつて得られた数字と良い一致を示している。このように $\breve{N}_f/\bar{N}_M$ が1に比べはるかに小であるということは Palmgren-Miner rule による推定は危険側に出ることを意味している。この結論は実験と合わない場合[17][18]もあるが，幾つかの実験は Palmgren-Miner rule は寿命を過大評価するということを示していることもある[19][20]。とくに，本報告で採つたモデルと非常に類似している実験，すなわち，切欠つき試験片に，ある分布に従う応力をランダムに選びだして負荷する変動荷重疲労試験[20]の結果は Palmgren-Miner rule が明らかに寿命を過大に評価することを示している。実験によれば，life ratio (N_f/N_M) は約 0.2～0.5 であつた。この数値は本報告の数値に非常に近い。このことからも simulation の結果は妥当なものであること，あるいは本報告で用いたようなモデルに近いものが実際にあり得るといえよう。ただ単に簡単であるということから Palmgren-Miner rule を適用することは，何らかの事実から寿命を過小評価することがはつきりしている時を除いて，甚だ危険であるといわざるを得ない。なお，本モデルとは異るが，もし，最終被害一定（たとえば亀裂長さ一定）を criterion として S-N 関係を定めれば，Palmgren-Miner rule が良くあうと考えられる。本モデルのような場合には限界被害を非常に小さく定めておき，考えている繰返し数範囲では不安定破壊を起こす確率が十分小さくなるように定めるというようなことになるであろう。

6 多部材構造の信頼性函数

構造物は普通多くの部材から成るものであり，また，設計の都合上，同様な部材を幾つか用いることがある。そのような時，幾つかの部材中1ないし数個の部材が破損しても全体としてはまだ安全で catastrophic failure には至らないことがある。このような構造を redundant structure と称しているが，ただ単に並列部材数が多いからといつて redundancy が有るとはいえない。筆者等は先に簡単化した多部材構造の信頼性を材質劣化のない場合について検討し，部材数のそれほど多くない場合は redundancy は非常に小であるという結論を得ている[21]。実際の構造物では多かれ少かれ材質の劣化が存在し，劣化の度合は各部材によつて異なると考えられる。したがつて，材質劣化の結果，部材強度のバラツキが大きくなり fail safe capacity が影響されると見るのが当然であろう。たとえば，初め全く等しい強度の部材からなる構造物を考えると，初期においては1部材の破壊は全部材の破壊，すなわち構造物の破壊を意味するが，長期使用の後には材質劣化の度合に応じて最も劣化した部材から破損していくであろう。このことは，とりもなおさず，材質劣化を考慮に入れねばならぬ設計ではいわゆる fail-safe design がより有意義であるということである。多部材構造物の reliability に関する研究は幾つか発表され実験との比較も試みられている[22][23][24]。以下では材質劣化として fatigue のみを考え前節までに得られた単一部材の疲労を多部材の場合に拡張し，fail-safe について検討する。多部材の場合には数値計算が多く含まれるので，より簡単な計算で得られる上下限を求めることも試みる。前節までに用いた仮定はすべてそのまま用いることとし，更に次の仮定を追加する。

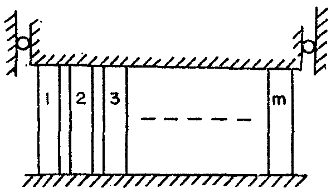


Fig. 9 多部材構造のモデル

仮定

5) 構造物としては Fig. 9 に示す如き統計的に同一の m 箇の平行部材からなるものを考え，外荷重は常に残存部材によつて均等に受けもたれるとし，曲げはかからないとする。

6) 初期強度のバラツキは疲労被害の進み方のバラツキに比して無視しうるとする。

6-1 m 部材構造の生存確率

i 番目の部材の momentary risk function

m箇の部材が順に $n_1\leq n_2\leq\cdots\leq n_m$ 回目の負荷で破断するとして，その順に部部材番号をつける。k_i を i 番部材の fatigue crack propagation factor とすれば，仮定より

$$k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m \tag{41}$$

である。

($n_{i-1}-1$) 回目の応力サイクル完了直後の i 番部材中の疲労亀裂長さが c^i_{i-1} で与えられている時，n 回目のサイクル ($n_i \geq n \geq n_{i-1}$) での i 番部材中の疲労亀裂長さ，$c_n{}^i$，の density function は，eq. (26) より

$$f_{C_i^n}(c_n^i|c_i^{i-1}, k_i)=\frac{1}{\Gamma(n-n_{i-1})}\cdot\left(\frac{1}{k_{i,i-1}}\right)^{n-n_{i-1}}\cdot\frac{1}{c_{i-1}^i}\cdot\left(\frac{c_i^{i-1}}{c_n^i}\right)^{1+\frac{1}{k_{i,i-1}}}\left\{\ln\frac{c_n^i}{c_{i-1}^i}\right\}^{n-n_{i-1}-1} \tag{42}$$

である。ここに，

$k_{i,\alpha-1}=\rho_{\alpha-1}^2\cdot S_c^2\cdot k_i$

S_c＝全部材が生存していた時の characteristic stress

$\rho_{\alpha-1}=m/(m-\alpha+1)$＝応力増加係数

$\Gamma(x)$＝gamma function

これより，n 回目の応力サイクルによる i 番部材の risk は

$$r_n^i(c_{i-1}^i, k_i)=\int_{c_{i-1}^i}^{\infty} f_{C_{n-1}^i}(c_{n-1}^i|c_{i-1}^i, k_i)\,e^{-\left(\frac{s_{n-1}^i}{\rho_{i-1}S_c}\right)^2}dc_{n-1}^i \tag{43}$$

$$\approx\exp\left\{-\frac{1}{(1+k_{i,i-1})^{n-n_{i-1}}}\cdot\left(\frac{s_{i-1}^i}{\rho_{i-1}S_c}\right)^2\right\} \tag{44}$$

ここに，

s_{n-1}^i は c_{n-1}^i に対応する critical stress,

s_{i-1}^i は c_{i-1}^i に対応する critical stress.

となる。

($n_{i-2}-1$)回目の応力サイクルが完了した時の i 番部材中の疲労亀裂が c_{i-2}^i である時の c_{i-1}^i の density function は eq. (42) の n, n_{i-1}, $k_{i,i-1}$ および c_{i-1}^i をそれぞれ n_{i-1}, n_{i-2}, $k_{i,i-2}$ および c_{i-2}^i で置換すれば得られる。故に，eq. (43) より

$$r_n^i(c_{i-2}^i, k_i)\approx\exp\left\{-\frac{1}{(1+k_{i,i-1})^{n-n_{i-1}}}\cdot\frac{1}{(1+k_{i,i-2})^{n_{i-1}-n_{i-2}}}\cdot\left(\frac{s_{i-2}^i}{\rho_{i-1}S_c}\right)^2\right\} \tag{45}$$

のように k_i および c_{i-2}^i が与えられている時の momentary risk が得られる。これをくり返せば k_i, c_0^i が与えられているときの i 番部材の momentary risk が

$$r_n^i(c_0^i, k_i)\approx\exp\left\{-\frac{1}{\bar{K}_{i-1}}\cdot\left(\frac{s_0^i}{\rho_{i-1}S_c}\right)^2\right\} \tag{46}$$

ここに，

$$\bar{K}_{i-1}=\prod_{\alpha=0}^{i-1}(1+k_{i,\alpha})^{n_{\alpha+1}-n_\alpha} \qquad (k_{i,0}=k_i,\ n_0=1,\ n_i=n \text{ として})$$

となる。以下では $r_n^i(c_0^i, k_i)$ を $r_n^i(s_B, k_i)$ と書くことにする。

eq. (46) は区間 $n_{\alpha+1}-n_\alpha$ ($\alpha=0, 1, \cdots$) で Rayleigh 分布に従い，且つその characteristic value が $\rho_\alpha S_c$ であるような random stress が1部材に作用したときの momentary rick である。

i 番部材の生存確率

i 番部材の生存確率は次のような手順で求まるが，以下では risk function, reliability function ともに s_B が与えれたという条件つきである。（簡単のため s_B は省略して書く）第1番部材だけが n_1 回目のサイクルで破断する確率は

$$\left[\prod_{l_1=0}^{n_1-1}\{1-r_{l_1}^1(k_1)\}\right]\cdot r_{n_1}^{1'}(k_1, k_2) \tag{47-1}$$

第2番部材が n_2 サイクル目に破断する確率は

$$\left[\prod_{l_2=n_1+1}^{n_2-1}\{1-r_{l_2}^2(k_2)\}\right]\cdot r_{n_2}^{2'}(k_2, k_3) \tag{47-2}$$

$\vdots$

i 番部材が n サイクルまで破断しない確率は

$$\left[\prod_{l_i=n_{i-1}+1}^{n_i}\{1-r_{l_i}^i(k_i)\}\right] \tag{47-i}$$

である。ただし，$r_n^{j'}(k_j, k_{j+1})$ は n 回目の応力繰返しによつて j 番部材は破壊し，$(j+1)$ 番部材は破壊しない確率とする。

eqs. (47) より，$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m$ の時の生存確率は

$$L_{N_i}(n|k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m) = \sum_{n_1=1}^{n} \sum_{n_2=n_1+1}^{n} \cdots \sum_{n_{i-1}=n_{i-2}+1}^{n} \left[\prod_{l_i=n_{i-1}+1}^{n} \{1-r_{l_i}^i(k_i)\} \right] \cdot \left[\prod_{j=1}^{i-1} \left\{ \prod_{l_j=n_{j-1}+1}^{n_j-1} (1-r_{l_j}^j(k_j)) \cdot r_{n_j}^{j'}(k_j, k_{j+1}) \right\} \right] \tag{48}$$

となる。上式中の $r_n^i(k_i)$ は eq. (46) で与えられなているものであるが，もし，fatigue behavior あるいは random stress の distribution について本報告と異る仮定を設ければ r^i の表現が変るが，eq. (48) はそのまま用いうる。さて，$r_n^{j'}$ であらわした確率を知らねばならぬが，これは略々次のようになる。

いま，n サイクル目の負荷の時，j 番および $j+1$ 番部材中の疲労亀裂長さをそれぞれ c_{n-1}^i，c_{n-1}^{j+1} とし，両部材のうけた応力を

$$\begin{array}{ll} j\ \text{番部材} & s_1^j, s_2^j, \cdots, s_n^j \\ j+1\ \text{番部材} & s_1^j, s_2^j, \cdots, s_n^j \end{array}$$

とすれば

$$s_\alpha^j = s_\alpha^{j+1} \quad (\alpha=1, 2, \cdots n-1)$$
$$s_n^j < s_n^{j+1}$$

である。ただし，n サイクル目に j 番部材が破断してとしている。したがつて，このモデルの場合

$$\left.\begin{aligned} \ln \frac{c_{n-1}^j}{c_0} &= k_j \sum_{\alpha=1}^{n-1} (s_\alpha^j)^2 \\ \ln \frac{c_{n-1}^{j+1}}{c_0} &= k_{j+1} \sum_{\alpha=1}^{n-1} (s_\alpha^{j+1})^2 \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

であるから

$$c_{n-1}^{j+1} = c_0 \left(\frac{c_{n-1}^j}{c_0} \right)^{2\gamma_j} \qquad \text{ここに} \quad \gamma_j = k_{j+1}/k_j \leq 1 \tag{50}$$

あるいは，critical stress を s_{n-1}^j，s_{n-1}^{j+1} として，

$$s_{n-1}^{j+1} = s_B \cdot \left(\frac{s_{n-1}^j}{s_B} \right)^{2\gamma_j} \tag{51}$$

である。これより $r_n^{j'}(k_j, k_{j+1})$ は

$$r_n^{j'}(k_j, k_{j+1}) = \int_{c_0}^{\infty} f_{C_{n-1}^j}(c_{n-1}^j|k_j) \left\{ \bar{F}_S\left(\frac{s_{n-1}^j}{\rho_{j-1}} \right) - \bar{F}_S\left(\frac{s_{n-1}^{j+1}}{\rho_j} \right) \right\} dc_{n-1}^j \tag{52}$$

となる。ただし $\bar{F}_S(x)$ は外力を最初の断面積で除した値が x を越える確率で，本報告では $\bar{F}_S(x) = \exp\{-x^2/S_c^2\}$。

eq. (51) から

$$\frac{s_{n-1}^{j+1}}{\rho_j} \geq \frac{s_B}{\rho_j}$$

したがつて，$\bar{F}_S\left(\frac{s_{n-1}^{j+1}}{\rho_j}\right) \leq \bar{F}_S\left(\frac{s_B}{\rho_j}\right)$ であるから，

$$r_n^{j'}(k_j, k_{j+1}) \geq r_n^j(k_j) - \bar{F}_S\left(\frac{s_B}{\rho_j} \right) \tag{52'}$$

を得る。

eq. (52') の右辺第1項は eq. (46) で与えられ，第2項は central safety factor が $s_B/\rho_j S_c$ のときの単一部材の破壊確率である。多部材構造物で fail-safe design の時は少数の部材が破壊すれば直ちに何らかの方法をとるということを考慮すれば $\rho_j \approx 1$（1より大きいが1に近い）としてよいこと，ならびに fatigue を考えた設計では s_B/S_c は十分大きくとるのが普通であるから，$\bar{F}_S(s_B/\rho_j) \doteqdot 0$ として，

$$r_n^{j'}(k_j, k_{j+1}) \approx r_n^j(k_j) \tag{53}$$

を用いて差支えあるまいと考えられる。

構造物全体としての生存確率

“m箇の部材中 $i(\leq m)$ 箇が破断した時に構造物全体として破壊した”と定義すれば，構造物の寿命Nがnをこえるためには

1番部材の寿命がnをこえる

か，1番部材の寿命がn以下で2番部材の寿命がnをこえる

か，………

⋮

か，$(i-1)$ 番部材の寿命がn以下でi番部材の寿命がnを越えるか

のいずれかであればよい。部材番号は弱い順につけたことを考慮すれば

$$L_{i,m}(n)=m!\int_D\sum_{j=0}^{i}L_{N_j}(n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m)\cdot f_K(k_1)f_K(k_2)\cdots f_K(k_m)dk_1\cdots dk_m \tag{54}$$

ここに，

$L_{i,m}(n)=m$ 部材のうち少くとも $(m-i+1)$ 部材がnサイクル以上生きのびる確率

$f_K(k_i)=K_i$ の density function

Dは $\infty\geq k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m\geq 0$ できまる積分領域

また L_{N_j} は eq. (48) で与えられる。係数 $m!$ は部材をkの大きい順に番号をつける可能な方法の数である。

この構造物の redundancy または fail-safe capacity は $L_{1,m}$ と $L_{i,m}(i>1)$ とを比較することによつて検討しうる。eq. (54) はもとより，eqs. (46)，(48) を計算するには数値計算によらねばならず，実質的には m^2 重積分に相当するから，極く少数部材の時以外は実用的ではない。本報告では eq. (54) の数値計算例は示さないこととし，かわりにその上下限を定める方法を提出する。

6-2 外部材構造の生存確率の上下限

本節で述べる方法は参考文献 (24) におけると同様に，疲労被害を過小評価することおよび過大評価することにより上下限を求める方法である。二つの方法を述べるが，第1法は疲労の機構，それに関する材料常数の統計的性質が判明している場合，本報告のモデル，に適用し第2法は単一部材の reliability function が実験的にだけ得られている場合のものである。

〔第1法〕

各部材の亀裂伝播係数 k_i が与えられ，全部材が生存している時のランダム応力の characteristic value が S_c である等，すべて前の如くである。このとき，i番部材の寿命，N_i，がnを越える確率を

$$P(N_i>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c) \tag{55}$$

と書くことにする。これはm箇の部材中少くとも $(m-i+1)$ 箇が生存している確率である。この確率の1つの下限は次のように求まる。

$i=2$ の時

$$\begin{aligned}&P(N_2>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c)\\&=P\{N_2>n|N_1>n, k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}\cdot P\{N_1>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c\}\\&\quad+P\{N_2>n|N_1\leq n, k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}\cdot P\{N_1\leq n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}\\&=P\{N_1>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}\\&\quad+P\{(N_2>n)\cap(N_1\leq n)|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}\end{aligned} \tag{56}$$

上式右辺第1項は k_1 なる亀裂伝播係数を有する材料の生存確率であり，これを

$$P\{N_1>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}=L(n|k_1, S_c) \tag{57}$$

と書くと，

$$\begin{aligned}&P\{N_2>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}\\&=L(n|k_1, S_c)+\sum_{j=1}^{n}P\{(N_2>n)\cap N_1=j|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}\end{aligned} \tag{56'}$$

上式中の $P\{(N_2>n)\cap N_1=j|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}$ は eqs. (48)，(53) から

$$P\{(N_2>n)\cap N_1=j|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c\}$$

$$\gtrsim\left[\prod_{l_1=1}^{j-1}\{1-r_{l_1}^1(k_1)\}\right]\cdot\left\{r_1^j(k_1)-\bar{F}_S\left(\frac{s_B}{\rho_1}\right)\right\}\cdot\left[\prod_{l_2=j+1}^{n}\{1-r_{l_2}^2(k_2)\}\right]$$

$$\geq\left[\prod_{l_1=1}^{j-1}\{1-r_{l_1}^1(k_1)\}\right]\cdot\left(r_1^j(k_1)\cdot\left[\prod_{l_2=1}^{n}\{1-r_{l_2}^2(k_2)\}\right]-\bar{F}_S\left(\frac{s_B}{\rho_1}\right)\prod_{l_2=1}^{n}\{1-r_{l_2}^2(k_2)\}\right)$$
$$=\{L(j-1|k_1,S_c)-L(j|k_1S_c)\}\cdot L(n|k_2,\rho_1S_c)$$
$$-\bar{F}_S\left(\frac{s_B}{\rho_1}\right)\cdot L(n|k_2,\rho_1S_c)\cdot L(j-1|k_1,S_c)$$
$$\geq\{L(j-1|k_1,S_c)-L(j|k_1,S_c)\}\cdot L(n|k_2,\rho_1S_c)$$
$$-L(n|k_2,\rho_1S_c)\cdot\bar{F}_S\left(\frac{s_B}{\rho_1}\right)\cdot L(j-1|k_1=0,S_c)$$
$$=\{L(j-1|k_1,S_c)-L(j|k_1,S_c)\}\cdot L(n|k_2,\rho_1S_c)$$
$$-L(n|k_2,\rho_1S_c)\cdot\{1-L(j|k_1=0,S_c)\}\cdot\frac{\bar{F}_S(s_B/\rho_1)}{\bar{F}_S(s_B)}$$

となる。したがつて

$$P\{(N_2>n)\cap(N_1\leq n)|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c\}$$
$$\geq\{1-L(n|k_1,S_c)\}\cdot L(n|k_2,\rho_1S_c)\}-\varepsilon_{12}L(n|k_2,\rho_1S_c)$$
$$>\{1-L(n|k_2,S_c)\}\cdot L(n|k_2,\rho_1S_c)-\varepsilon_{12}L(n|k_2,\rho_1S_c)$$

ここに, $\varepsilon_{12}=\bar{F}_S(s_B/\rho_1)\{1-L(n|k=0,S_c)\}/\bar{F}_S(s_B)$

となる。

これより, eq. (56) の1つの lower bound として,

$$P_l\{N_2>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c\}$$
$$=L(n|k_1,S_c)+\{1-L(n|k_2,S_c)\}\cdot L(n|k_2,\rho_1S_c)-\varepsilon_{12}L(n|k_2,\rho_1S_c)\tag{58}$$

が得られる。この式は

“各部材にランダム応力が作用したときに1つも破損しない確率と, 1つが破損したとして, 残りの部材には始めから ρ_1 倍の応力が作用していた, すなわち被害を大きく見積つて, 第2の破損の生じない確率との和である”。——〔A〕

m部材中少くとも $m-1$ が生存している確率の下限は

$$L_{2,m}(n|S_c)\geq L_{2,m}^l(n|S_c)$$
$$=m!\int_D P_l(N_2>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c)\cdot f_K(k_1)f_K(k_2)\cdots f_K(k_m)dk_1\cdots dk_m$$
$$=m\int_0^\infty L(n|k_1,S_c)f_K(k_1)F_K^{m-1}(k_1)dk_1$$
$$+m(m-1)\int_0^\infty\{1-L(n|k_2,S_c)\}\cdot L(n|k_2,\rho_1S_c)\cdot F_K^{m-1}(k_2)\{1-F_K(k_2)\}f_K(k_2)dk_2$$
$$-\varepsilon_{12}\cdot m(m-1)\int_0^\infty L(n|k_2,\rho_1S_c)F_K^{m-1}(k_2)\{1-F_K(k_2)\}\cdot f_K(k_2)dk_2\tag{59}$$

ここに, $F_K(k)=\int_0^k f_K(k)dk$

となる。eq. (59) を eq. (54) と比較すれば判るようにm重積分が1回の積分になる。

同様にして, $i=3$ のときは

$$P_l(N_3>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c)$$
$$=P_l(N_2>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c)$$
$$+L(n|k_3,\rho_2S_c)[1-P_u(N_3>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c)]$$
$$-\varepsilon_{23}\cdot L(n|k_3,\rho_2S_c)\tag{60}$$

ここに, $P_u(A)$ は $P(A)$ の1つの上限

一般に

$$P_l(N_i>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c)$$
$$=P_l(N_{i-1}>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c)$$
$$+L(n|k_i,\rho_{i-1}S_c)[1-P_u(N_i>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m,S_c)]$$
$$-\varepsilon_{(i-1)i}L(n|k_i,\rho_{i-1}S_c)\tag{61}$$

となる。

上式を求めるには1つの上限を必要とするが，比較的簡単な上限としては

“幾つかの部材が破損しても，残存部材に加わる応力が変らない——characteristic stress が不変の意——とすれば，これは被害を過小評価することになるから，1つの上限を与える”——〔B〕

ことから

$$P_u(N_i>n|k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_m, S_c)=L(n|k_i, S_c) \tag{62}$$

がえられる。

したがって，$L_{i,m}(n|S_c)$ の上下限は

$$\begin{aligned}L^u_{i.m}(n|S_c)&=\frac{m!}{(m-i)!(i-1)!}\int_D^\infty L(n|k, S_c)F_K^{m-i}(k)\{1-F_K(k)\}^{i-1}f_K(k)dk\\&\geq L_{i,m}(n|S_c)\\&\geq m\int_0^\infty L(n|k, S_c)F_K^{m-k}(k)\cdot f_K(k)dk\\&\quad+\sum_{j=2}^{m}\frac{m!}{(m-j)!(j-1)!}\int_0^\infty[L(n|k, \rho_{j-1}S_c)\times\\&\{1-L(n|k, S_c)\}-\varepsilon_{(j-1)j}L(n|k, \rho_{j-1}S_c)]F_K^{m-j}(k)\{1-F_K(k)\}^{j-1}f_K(k)dk\\&=L^l_{i.m}(n|S_c)\end{aligned} \tag{63}$$

のように求まる。

eq. (63) を計算するためには材料常数 (K) の probability density および，K が与えられた時の生存確率 $L(n|k, S_c)$ が必要である。本報告のモデルでは $L(n|k, S_c)$ は eq. (36) で与えられる。

〔第2法〕

一般には $f_K(k)$ あるいは $L(n|k, S_c)$ を定めることは甚だ困難である。一方，変動荷重試験を行えば

$$L(n|S_c)=\int_D L(n|k, S_c)f_K(k)dk \tag{64}$$

を得ることは可能である。この場合に〔A〕および〔B〕を用いて上下限を定めうる。

少くとも $m-1$ 部材が生存している1つの下限は

$$[L(n|S_c)]^m+m[1-L(n|S_c)]\cdot[L(n|\rho_1S_c)]^{m-1} \tag{65}$$

上限は

$$[L(n|S_c)]^m+m[1-L(n|S_c)][L(n|S_c)]^{m-1} \tag{66}$$

少くとも $m-2$ 部材が生存しているときは，

$$\begin{aligned}\text{下限}&=[L(n|S_c)]^m+m[1-L(n|S_c)][L(n|\rho_1S_c)]^{m-1}\\&\quad+\frac{m(m-1)}{2}[1-L(n|S_c)][1-L(n|\rho_1S_c)]\cdot[L(n|\rho_2S_c)]^{m-2}\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}\text{上限}&=[L(n|S_c)]^m+m[1-L(n|S_c)][L(n|S_c)]^{m-1}\\&\quad+\frac{m(m-1)}{2}[1-L(n|S_c)]^2[L(nS_c)]^{m-2}\end{aligned} \tag{68}$$

一般に

$$\begin{aligned}\text{下限}&=[L(n|S_c)]^m+\sum_{j=1}^{i-1}{}_mC_j\{[1-L(n|S_c)][1-L(n|\rho_1S_c)]\cdots\\&\quad[1-L(n|\rho_{j-1}S_c)]\cdot[L(n|\rho_jS_c)]^{m-j}\}\end{aligned} \tag{69}$$

および

$$\text{上限}=[L(n|S_c)]^m+\sum_{j=1}^{i-1}{}_mC_j[1-L(n|S_c)]^j\cdot[L(n|S_c)]^{m-j} \tag{70}$$

ここに $\quad {}_mC_j=m!/(m-j)!j!$

ただし，eq. (69)$\leq L_{i,m}(n|S_c)$ は成立するが，必ずしも. eq. (70)$\geq L_{i,m}(n|S_c)$ であるとはいえないので，eqs. (69)，(70) で上下限をきめ生存確率の範囲を定めると寿命を過小評価することがある。また，参考文献 (24)(定荷重の場合) と比較すると (求め方は違うが) 上限は全く一致し，下限は僅か異るが数値的には全く同一と見做しうる。

6-3　数値計算例

疲労亀裂伝播係数Kの分布函数として，最大値の分布

$$F_K(x)=\exp\{-(x/K_c)^{-\gamma}\} \tag{71}$$

ここに　K_c=characteristic value

γ=定数（>0）

を仮定して数値計算を行なつた。部材総数は20とし，3部材が破壊するまで（$i_{cr}=3$）計算している。K_c, γ, S_c の組合せは Table 3 に示すような6通りを用いた。結果を Figs. 10～15 に示す。図中，$\mathrm{I}_l{}^i$

Table 3

	Initial Central Safety Factor	Nondimensionalized Characteristic Crack Propagation Factor	Shape Factor
(1)	4	0.00001	2
(2)	4	0.00001	3
(3)	4	0.00001	4
(4)	4	0.00005	3
(5)	4	0.000005	3
(6)	6	0.00001	3

は第1法による i_{cr} が i の場合の下限，$\mathrm{I}_u{}^i$ は同じく上限，$\mathrm{II}_l{}^i$, $\mathrm{II}_u{}^i$ は第2法によるものである。また single とした曲線は単一部材の場合の reliability function である。$i=1$ のとき，すなわち，全部材とも破壊しないとき，第2法によると甚しく conservative なことがあることが判る。第1法による下限はあまり i_{cr} の効果がみられず，下限に着目する限り fail-safe capacity は余りないように思われるが，上限および第2法の上下限から判断すると fail-safe capacity があることになる。（$\mathrm{II}_l{}^1$, 曲線より $\mathrm{II}_l{}^2$, $\mathrm{II}_l{}^3$ のが右側にある）同じような条件下での実験例はないが，10部材の曲げ試験結果[25]があるので参考のため Fig. 16 に示しておく。図中曲線に附した数字は 10 本中，1, 2, …, i

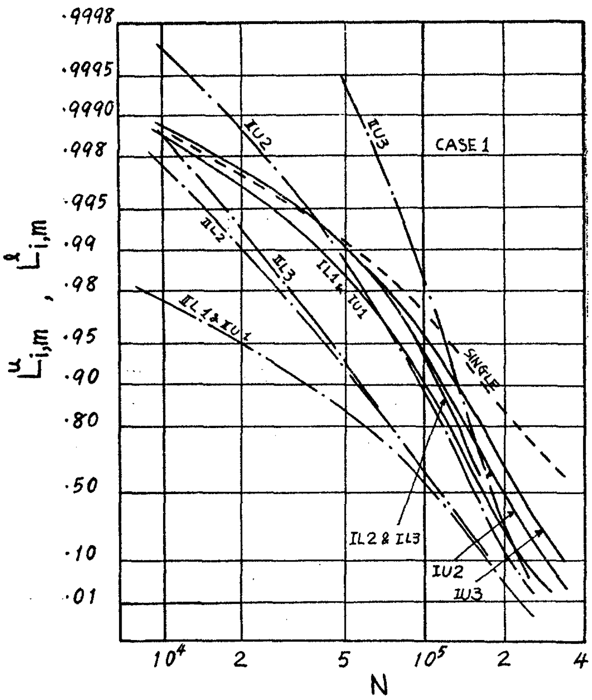


Fig. 10　信頼性の上下限

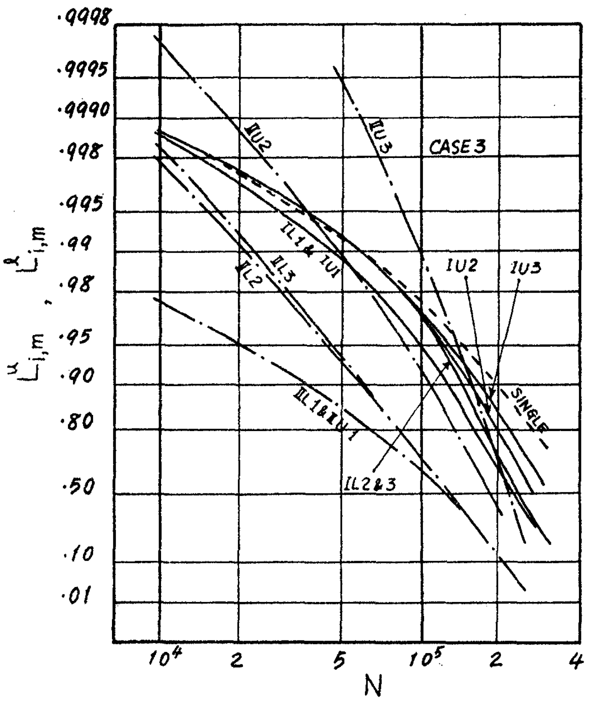


Fig. 11 信頼性の上下限

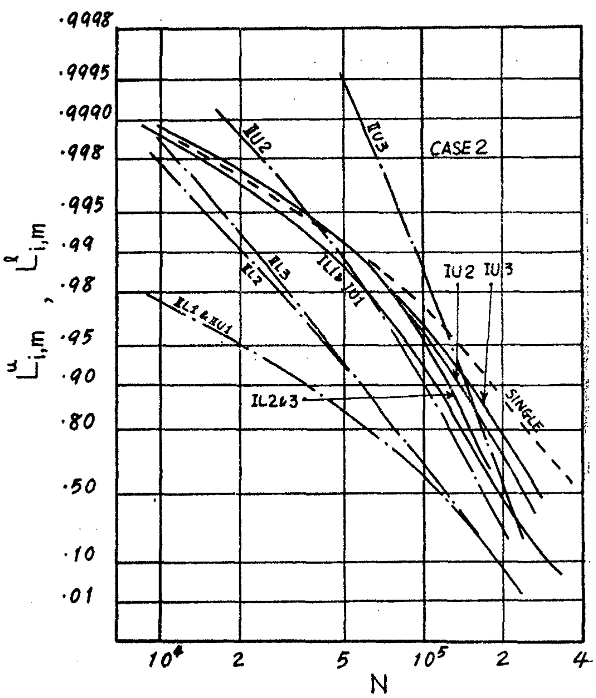


Fig. 12　信頼性の上下限

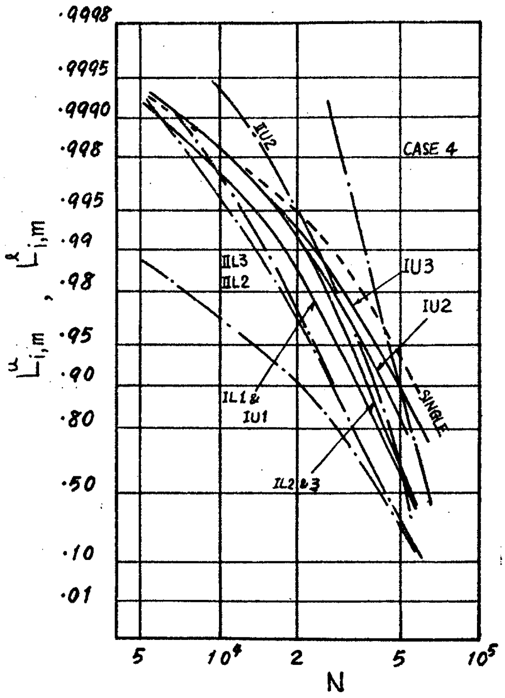


Fig. 13　信頼性の上下限

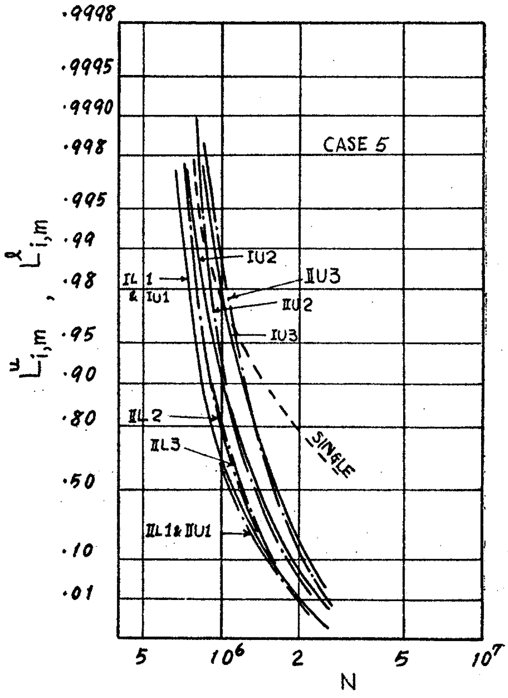


Fig. 14　信頼性の上下限

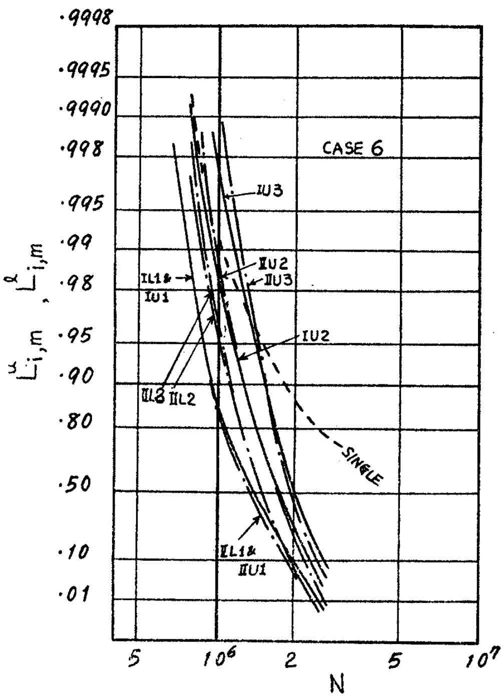


Fig. 15　信頼性の上下限

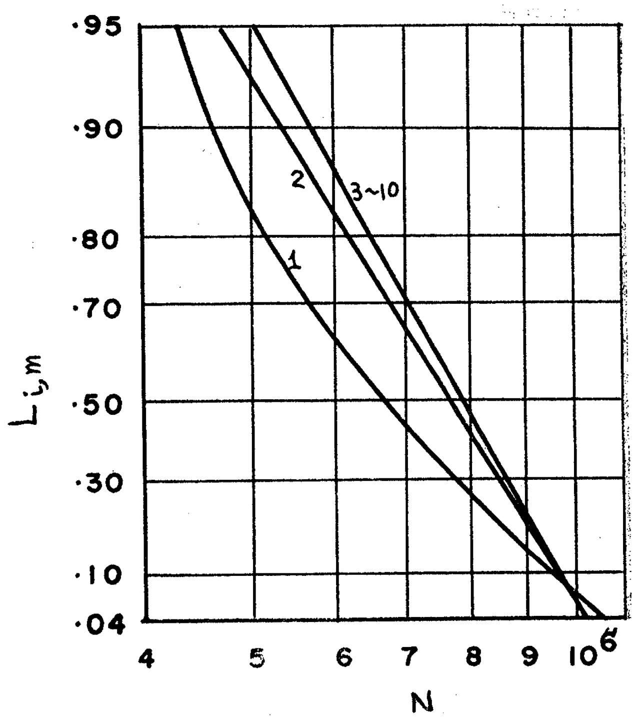


Fig. 16　多部材構造の信頼性曲線（参考文献（25）より）

本破壊するまでの寿命に対応する。同図でも判るように破壊部材数が3以上になると reliability function にはほとんど差が無くなる。これは本計算の結果と類似している。本計算結果ならびに上述の実験結果から疲労のある時は fail-safe という考えが成立するといえよう。これは同一モデル（並列構造）で疲労の無い場合の結論(21)と対照的である。

結　　　論

亀裂伝播過程のモデルを設定し，ランダム振幅のプログラム繰返し荷重が作用した時の疲労亀裂長さの確率分

布を定め，Griffith-Irwin criterion にしたがつて最終破壊が生ずるとして信頼性関数を求めた。その結果，疲労寿命は荷重（応力）の randomness のみならず，初期強度，亀裂成長係数の変動によつても大きく作用されることが明らかとなつた。使用期間に応じた材質の選定が非常に重要であることが，信頼性関数の曲線から再認識されよう。安全係数を大きくとつておいても，疲労を受け易い材料（C.P.F. の大なる材料）は信頼性曲線が急激に低下しているからである。また，本報告のモデルでは最終破断時の被害を一定としないため，Palmgren-Miner rule が成立しない点を明らかにしたと同時に numerical simulation によつてそれを確めた。とくに Palmgren-Miner rule が寿命を過小評価することが明らかな場合を除いては，同仮説を用いるのは甚だ危険であるといわざるを得ない。本モデルの場合，寿命を約2倍に過大評価した。さらに，簡単な多部材構造の信頼性の上下限を定める2方法を提案し，それ等を数例について比較した結果，疲労のある場合は fail-safe の概念が有効でありうること，および，単一部材の実動荷重試験によつて得られる信頼性関数を用いて多部材構造の信頼性あるいは fail-safe の可能性の有無をほぼ推定しうることを示した。

本論文では，特定の亀裂伝播の式と，荷重の Rayleigh 分布とを仮定したが，亀裂伝播速度が，$dC/dn=kC^{\alpha}S^{\gamma}$ のような形で，応力分布が $\{1-\exp(-s^{\gamma}/S_c^{\gamma})\}$ のような extremal distribution であつても全く同様に扱いうる。他の分布の場合は，central limit theorem を援用し risk function を定めねばなるまい。以下の手順は全く同様である。

謝　辞

本研究はコロムビア大学内の疲労と信頼性のための研究所における研究の一部として行なわれたものであることを附記して，関係各位のご協力に謝意を表する。特に講演者（板垣）は留学の機を与えられた東京大学の金沢教授，高橋教授，柴田教授に紙面を借りてお礼を申上げます。

参 考 文 献

(1) 横堀武夫，材料強度学，pp. 184～186 & 261～263，技報堂，1955
(2) Freudenthal, A.M. and Gumbel, E.J., "Statistical Interpretation of Fatigue Test", Proc. Royal Soc. London, A, Vol. 216, 1953
(3) Parzen, E., "On Models for the Probability of Fatigue Failure of a Structure", Tech. Report No. 45, Applied Mathematics and Statistics Laboratory Stamford University, 1957
(4) Crandall, S.H., Mark, N.D. and Khabbaz, G.R., "The Variance in Palmgren-Miner damage due to Random Vibration", Proc. 4th U.S. National Cong. App. Mech., Vol. I, 1962
(5) Shinozuka, M., "Application of Stochastic Processes to Fatigue, Creep, and Catastrophic Failures", Lecture Note for Seminer in the Application of Structural Mechanics, 1966
(6) 横堀武夫，材料強度学，pp. 178～184，技報堂，1955
(7) Freudenthal, A.M., "Fatigue Sensitivity and Reliability of Mechanical System, Especially Aircraft Structures", WADD Tech. Report 61-53 Columbia Univ. 1961
(8) Head, A.K., "The Growth of Fatigue Cracks," Phil. Mag. Vol. 447, 1953
(9) Valluri, S.R., "Some Recent Development at GALCIT Concerning A Theory of Metal Fatigue," Mech. of Fatigue in Crystalline Solids, Pergamon Press, 1963
(10) Paris, P.C. and Erdogan, F., "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws," J. Basic Engg. No. 4, 1963
(11) Liw. H.W., "Fatigue Crack Propagation and Applied Stress Range— An Energy Approach," J. Basic Engg. No. 4, 1963
(12) Minami, Y. and Itagaki, H., "Study of Low Cycle Fatigue-2nd Report," J. Soci. Naval Arch. of Japan, 1964
(13) Yokobori, T. and Nanbu, M., "Fatigue Crack Propapation in the High Hardened Steel," Report of the Research Institute for Strength and Fracture of Materials, Tohoku Univ., Vol. 2, No. 2, 1966
(14) Lardner, R.W., "Crack Propagation Under Random Loading," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 14, 1699
(15) Wood, W.A. and Reimann, W.H., "Some Direct Observation of Cumulative Damage in Metals," Tech. Report No. 11, Institute for the Study of Fatigue and Reliability, Columbia Univ., 1964
(16) Freudenthal, A.M. and Heller, R.A., "On Stress Interaction in Fatigue and a Cumulative

Damage Rule," J. Aero/Space Science, Vol. 26, No. 7, 1957

(17) Smith, S. H., "Fatigue Cracking Under Random Roading," Proc. Second Intl. Conf. on Acoustical Fatigue in Aerospace Structure, Syracuse Univ. Press, 1965

(18) Schijve, J., "The Analysis of Random Load-Time Histories with Relation to Fatigue Tests and Life Calculations," 2 nd ICAF-AGARD Symposium, Paris, 1961

(19) Heller, A. S. and Heller, R. A. and Freudenthal, A. M., "Random Fatigue Failure of a Multiple Load Path Redundant Structure," Tech. Report No. ML-TDR-64-160, Columbia Univ., 1964

(20) Finney, J. M. and Mann, J. Y., "Fatigue Behavior of Notched Aluminum Alloy Specimens Under Simulated Random Gust Loading with and without Grnund-To-Air Cycle of Loading," Fatigue of Aircraft Structures, 1963

(21) Shinozuka, M. and Itagaki, H., "On the Reliability of Redundtnt Structures," Annals of Reliability and Maintainability, Vol. 5, 1966

(22) Heller, R. A., and Heller, A. S. "Fatigue Life and Reliability of a Redundant Structure," Annals of Reliability and Maintainability, Vol. 4, 1965

(23) Eggwerz, S. and Lindsjo, G., "Analysis of the Probability of Collapse of a Fail-Safe Aircraft Structure Consisting of Parallel Elements", The Aeronautical Reserach Institute of Sweden, FAA report 102, 1965

(24) Freudenthal, A. M. and Shinozuka, M., "On Fatigue Failure of a Multiple Load Path Redundant Structure," Proc. 1 st International Conference on Fracture, Vol. 2, 1965

(25) Heller, R. A., and Donat, R. C., "Random-load Fatigue Tests on a Fail-safe Structure Model," Experimental Mech. Oct, 1967