(昭和 43 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析

正員 上田幸雄* 正員 松石正克**
正員 山川武人*** 正員 赤松毅人***

Elastic-Plastic Analysis of Framed Structures using the Matrix Method

By Yukio Ueda, *Member*
Masakatsu Matsuishi, *Member*
Taketo Yamakawa, *Member*
Taketo Akamatsu, *Member*

Summary

Recently, the matrix method has become a powerful tool for structural analysis in conjunction with the rapid development of digital computers and the method of elastic analysis of framed structures is almost established. While, the plastic analysis on the structures is performed with the aid of the mechanism method, the moment distribution method or the linear programming method. However, it is impossible by these methods to analyze the elastic-plastic behavior of the framed sructures for the entire process of loading.

Jennings and others studied on the elastic-plastic strength of plane frames subjected only to bending and showed a method to analyze the frames by inserting hinges at the yielded sections. This kind of method is not satisfactory to the analysis for framed structures, especially, for space frames, since the interaction is not taken into account and this may produce a serious error in the result of the analysis. The authors contrived a new mechanism of plastic hinge based on the plastic flow theory and established a new method of elastic-plastic analysis of framed structures in two and three dimensions with full consideration of the interaction.

The result of analysis approaches to the exact solution when the increment of external load becomes infinitesimal.

The analysis was made on several kinds of structures including plane frames under combined axial forces and bending and space frame.

The following important informations are obtained.

(1) The new mechanism of plastic hinge is characterized by that the continuity is maintained at yield section through the entire process of elastic-plastic behavior, and the rigidity is reduced automatically by plastification of the section. It should be also noted that a combination of forces and bending (twisting) moment is possible to change at the plastic hinge without violating the yield condition.

(2) By the new method of analysis, the elastic-plastic behavior of framed structures is investigated, taking into account of the interaction. And the deformation is obtained at each step of loading and the plastic collapse load is evaluated.

* 大阪大学 工学部
** 日立造船㈱ 技術研究所
*** 大阪大学 大学院 工学研究科

1 緒 言

近年，高速電子計算機の出現に伴い，マトリックス法による構造物の解析法が急激に発達してきた。その中で骨組構造に対する弾性解析法はすでに確立されている[1]。一方，骨組構造物の塑性解析は，従来，崩壊機構法，モーメント分配法，不等式に基づく線型計画法によつて行なわれて来た[2]。しかしこれらの計算では外力の増加とともに構造物が弾性から順次塑性関節を生じて崩壊に至るまでの挙動を詳しく知ることはできない。

Jennings[3] 等が曲げを受ける平面骨組の弾塑性解析に対してマトリックス法と単純塑性解析法を組み合わせて，順次塑性関節を生じさせ，最後に塑性崩壊荷重を得ている。しかし，この解析においては，降伏相関関係を考慮していない。さらに立体骨組においては，塑性関節が形成されると，部材の内力比が大きく変動する場合があり，このような方法では結果の精度が悪く，まだ解析例は見ないようである。

これらの問題を解決するために，著者等は，塑性流れ理論をもとに新しい概念に基づく塑性関節機構を考案し，それを用いて降伏相関関係を考慮し全断面降伏の新しい弾塑性解析法を展開した。この解析法を用いると，降伏相関関係を正確に考慮して塑性関節の形成順序を追跡し，弾性，弾塑性におよぶ構造物の変形を得て，最後に塑性崩壊荷重を求めることができる。さらに，外力の増加率を小にすると，解析結果は次第に上界から正解に漸近する。

本論文では，新しい解析法について述べ，引き続き曲げと軸力を同時に受ける平面骨組ならびに曲げと捩りを受ける立体骨組構造の弾塑性挙動に対する解析例を示す。

2 骨組構造の弾塑性解析

2.1 前 提 条 件

骨組構造の弾塑性解析に対する基礎理論を導びくための主な仮定を次に示す。

（1） 部材は均質一様断面である。

（2） 荷重は集中荷重とし，分布荷重は等価な集中荷重に置換させる。

（3） 荷重は比例荷重とする。

（4） 力の作用は重畳できる。

（5） 材料は完全弾塑性体で，部材の形状係数 (shape factor) を1とする。

（6） 部材の全断面降伏は，降伏関数をFとすると

$$F=0 \tag{1}$$

で生じ，それ以後の変形に対して

$$\delta F=0 \tag{2}$$

を常に満足する。

（7） 荷重の作用方向は部材の主軸方向と一致する。

（8） 構造物は崩壊荷重に達する以前に，不安定現象ならびに脆性破壊を生じない。

2.2 骨組構造の弾塑性解析理論

可能な降伏断面間を単位部材とし，その部材端を i, j とする。いま，部材が弾性の場合，部材端(i および j)に作用する力 $\{R\}$ と変形 $\{u\}$ の関係は剛性行列 $[K]$ を用いて次式で与えられる。

$$\{R\}=\begin{Bmatrix}R_i\\R_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\K_{ji} & K_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix} \tag{3}$$

上記の仮定より，部材の最大曲げモーメントは部材端に生じる。したがつて部材端が降伏条件 $f=0$ を満足するとき，その点に全断面降伏が生じる。

部材端が全断面降伏となると，それ以後の変形の変化 $\{\delta u\}$ は，弾性および塑性変形成分，$\{\delta u^e\}$ および $\{\delta u^p\}$ からなる。すなわち

$$\{\delta u\}=\begin{Bmatrix}\delta u_i{}^e\\\delta u_j{}^e\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\delta u_i{}^p\\\delta u_j{}^p\end{Bmatrix} \tag{4}$$

塑性流れ理論によると塑性変形 $\{\delta u^p\}$ は定数 $[\lambda]$ を用いて，次のように表わせる。

$$\{\delta u^p\}=\begin{Bmatrix}\delta u_i{}^p\\ \delta u_j{}^p\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & \lambda_j\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\left(\dfrac{\partial F}{\partial R}\right)_i\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial R}\right)_j\end{Bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & \lambda_j\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\end{Bmatrix} \tag{5}$$

上式から知られるように塑性変形量は $[\lambda]$ の大きさによつて決定される。したがつて，部材端 i または j が塑性条件を満足していない場合は $[\lambda_i]=0$ または $[\lambda_j]=0$ となる。

変形の変化に対応する力の変化 $\{\delta R\}$ は

$$\{\delta R\}=\begin{Bmatrix}\delta R_i\\ \delta R_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta u_i{}^e\\ \delta u_j{}^e\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta u_i-\delta u_i{}^p\\ \delta u_j-\delta u_j{}^p\end{Bmatrix} \tag{6}$$

（5）式の関係を代入すると，上式はあらためて

$$\{\delta R]=\begin{bmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta u_i-\lambda_i\phi_i\\ \delta u_j-\lambda_j\phi_j\end{Bmatrix} \tag{7}$$

全断面降伏となつた部材端においては，変形成分の比によつて内力成分の比は変化するが，それらは常に塑性条件を満足するように変化せねばならない。その条件が（2）式であり，次のように書ける。

$$0=\{\delta f\}=\begin{Bmatrix}\delta f_i\\ \delta f_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\left(\dfrac{\partial F}{\partial R}\right)_i^T\delta R_i\\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial R}\right)_j^T\delta R_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_i{}^T & 0\\ 0 & \phi_j{}^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta R_i\\ \delta R_j\end{Bmatrix} \tag{8}$$

上式の $\{\delta R\}$ は（7）式で表わされて，それを代入すると $[\lambda]$ と $\{\delta u\}$ との関係式を与える。その関係を用いると（7）式は

$$\{\delta R\}=\begin{Bmatrix}\delta R_i\\ \delta R_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{ii}{}^p & K_{ij}{}^p\\ K_{ji}{}^p & K_{jj}{}^p\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta u_i\\ \delta u_j\end{Bmatrix} \tag{9}$$

となり，弾性の場合と違つた剛性行列を有する力と変形の関係式となる。

本論文では，骨組構造物を変位法によつて解析する。したがつて，弾性解析は，（3）式を各部材に適用し，各節点における変形は等しいとして骨組全体の平衡方程式を得て，それを解くことによつて行なう。弾性解析の結果から最初に全断面降伏となる点が知られる。全断面降伏の生じた部材に対しては，（9）式を適用し次の荷重増分に対して $(\partial F/\partial R)$ は変化しないと仮定して弾性の場合とまつたく同じ手法によつて計算を行なうと第2番目に全断面降伏となる点および荷重が得られる。このようにして，順次全断面降伏の形成を追跡し，最後に非常に大きな撓みとなつたときの荷重として塑性崩壊荷重を得る。

なお，本解法では，各荷重段階において $(\partial F/\partial R)$ は変化しないと仮定した。このことは，全断面降伏となつた点における内力が相関曲面のその点における接平面上で変化することであり，したがつて荷重増分を無限小にすれば解析結果は正解に収束する。このことから塑性関節において内力比が変化し大きく相関曲面上を移動する場合には，荷重増分を小にすれば良い精度の結果が得られることが解る。

3 解　析　例

前章の理論を具体的に展開し，電子計算機プログラムを開発して軸力と曲げを同時に受ける平面骨組，ならびに曲げと捩りを受ける立体骨組構造の弾塑性解析を行なう。

3.1 平面骨組構造

一般の平面構造物では，剪断力の影響は無視できるのでここでは塑性条件に曲げモーメント M_z と軸力 F_x の影響を考慮した相関関係を用いる。

部材の無次元化降伏関数 f として次式を用いる。

$$f=m_z+n_x{}^2-1 \tag{10}$$

ここで

$$m_z=\frac{M_z}{M_{0z}},\qquad n_x=\frac{F_x}{F_{0x}},\qquad M_{0z}=\text{全塑性モーメント},\qquad F_{0x}=\text{全断面降伏}$$

i－j 部材に対する力（およびモーメント）の成分 $\{R\}$ ならびに変形成分 $\{u\}$ は

$$\{R\}=\begin{Bmatrix}F_x\\F_y\\M_z\end{Bmatrix}\qquad \{u\}=\begin{Bmatrix}v_x\\v_y\\\theta_z\end{Bmatrix} \tag{11}$$

となる (Fig. 1-a)。

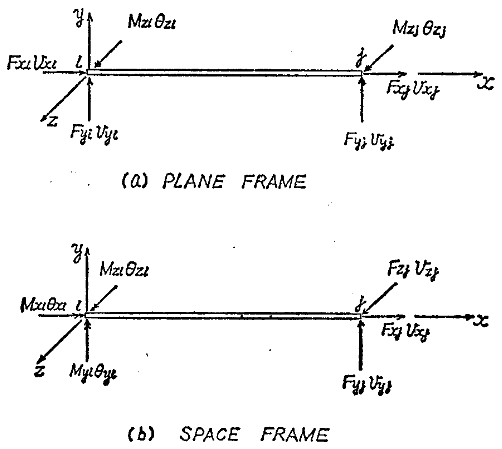

Fig. 1 Nodal forces and nodal displacements

(a) 解析例 1 (Fig. 2)

本解析法の基本的な性質を知るために，集中荷重Pが作用する両端固定梁の弾塑性解析を行なう。その結果を単純塑性解析結果と比較すると，全断面降伏形成順序，およびそのときの荷重さらに撓みも両者は完全に一致している。

このように，部材の塑性条件が曲げモーメントだけで決定される場合には，本解析法は単純塑性解析法と等価となる。

(b) 解析例 2 (Fig. 3)

米国リーハイ大学で行なわれた門型フレームの実験[4]の弾塑性解析を行ない，それを実験結果と比較すると Fig. 3 となる。両者の荷重，撓み曲線は非常に良い一致を示している。

(c) 解析例 3 (Fig. 4)

従来の解析法では，軸力と曲げを同時に受ける場合に，全断面降伏を順次追跡して解析を行なうことは，塑性関節における内力比が変化する場合には非常に困難である。

ここではそのような例題として，Fig. 4 に示すような門型フレーム[2]を解析する。解析では，荷重増分を小さくしたので各部材端で降伏条件を超えるところは無く，結果は正解と考えられる。この結果は，塑性崩壊荷重が軸力の影響で 2.1% 低くなつていることを示している。

3.2 立体骨組構造

一般に立体骨組構造では，部材は主として主軸方向の曲げモーメント (M_y, M_z) と捩りモーメント (M_x) を同時に受ける。このような場合，全断面降伏が順次形成されるに従い内力比は変化し，全断面降伏では相関曲面上を移動する。

部材の降伏関数として

$$f=m_x{}^2+m_y{}^2+m_z{}^2-1 \tag{12}$$

ここで

$$m_x=\frac{M_x}{M_{0x}},\quad m_y=\frac{M_y}{M_{0y}},\quad m_z=\frac{M_z}{M_{0z}}$$

$i-j$ 部材端における力（およびモーメント）$\{R\}$，ならびに変形 $\{u\}$ は Fig. 1-b を参照して，

$$\{R\}=\begin{Bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\\M_x\\M_y\\M_z\end{Bmatrix}\qquad \{u\}=\begin{Bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\\\theta_x\\\theta_y\\\theta_z\end{Bmatrix} \tag{13}$$

(a) 解析例 4 (Fig. 5)

直角折線梁に面外荷重を作用させた場合を解析する。解析では，荷重増分として全断面降伏間を3分割して，荷重～撓み曲線を，最後に塑性崩壊荷重として，$p_u{}^u=4.94$ を得た。いま，崩壊時の塑性モーメントのチェックを行なうと，第一番目の全断面降伏点の値が最大で 5.6% 越えていた。そこでその点のモーメントが塑性条件を満足するように 100/105.6 を乗じて下界値を求めると，$p_u{}^l=4.71$ となる。したがつて，$p_u=4.82\ \pm0.11$.

次に，荷重増分をさらに小にし，塑性関節形成間を 10 分割すると，上界値と下界値はほとんど一致し，塑性崩壊荷重として，$p_u=4.91$ を得る。

このように，荷重の増分の大小によつて得られる解の精度が変動するのは，2.2 節で説明したように，内力比

が変動するからである。この場合の内力比の変化を Fig.6 に示す。

なお，P. G. Hodge(2) は相関曲線を直線近似し，塑性崩壊荷重として，$p_u=4.90$ を得ている。これは相関曲線の近似性から，下界値となつている。

(b) 解析例 5 (Fig.7)

半立体構造物として Fig.7 に示したものを解析する。解析結果も同図に示す。塑性崩壊荷重として

$$p_u=5.587$$

を得た。吉識等(5) はこの構造物の上界値 $p_u{}^u$ および下界値 $p_u{}^l$ として近似的に

$$p_u{}^u=7.375 \qquad p_u{}^l=5.531$$

また実験を行なつて $p_u)_{exp}=5.90$ を与えている。

本解析では，さらに荷重を維持し吉識等が実験で得た崩壊機構に対しては崩壊を示さず，もう1個所で全断面降伏を生じて崩壊している。なお，解析に用いた部材寸法を Table 1 に示す。

Table 1 Dimensions and some items of semispace framed structure

	EXTERNAL DIA OF PIPE mm	THICKNESS OF PIPE mm	YIELD STRESS kg/mm²	FULLY PLASTIC MOMENT ton-mm
$COLUMN_i$	60.73	5.99	27.5	495.6
$BEAM_j$	60.73	5.99	27.5	495.6
$BEAM_k$	50.93	5.30	31.4	354.0

YOUNGS MODULUS 21,000 kg/mm²
MODULUS OF RIGIDITY 8076.9 kg/mm²
L=710 mm

(c) 解析例 6 (Fig.8)

Fig.8 に示した立体骨組構造物を弾塑性解析する。全断面降伏を順次追跡し，荷重～撓み曲線として Fig.8 を得た。塑性崩壊荷重として

$$p_u=6.850$$

この問題に対して吉識等(5) は次の結果を与えている。

$$p_u{}^u=7.132 \qquad p_u{}^l=6.264 \qquad p_u)_{exp}=6.72$$

この場合は全断面降伏の位置は実験と一致している。

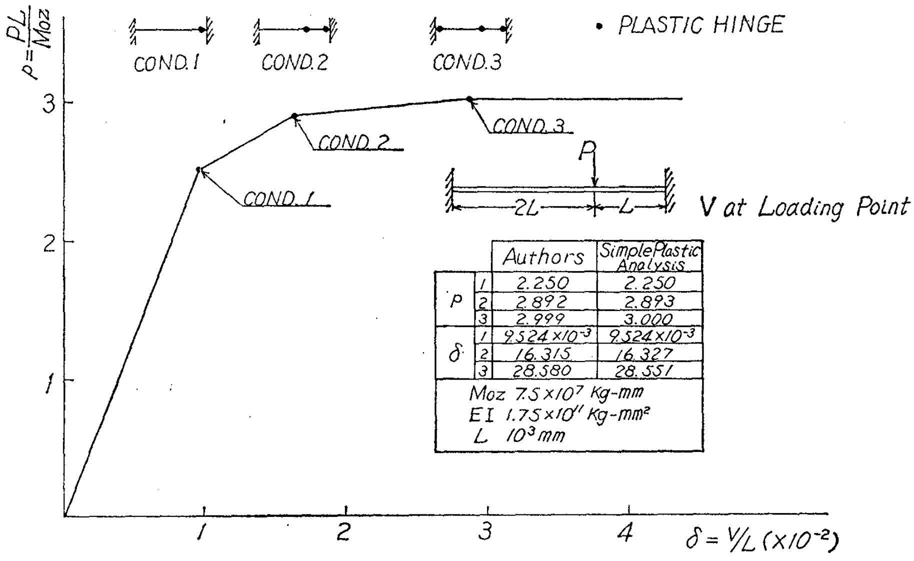

Fig.2 Load deflection curve for beam

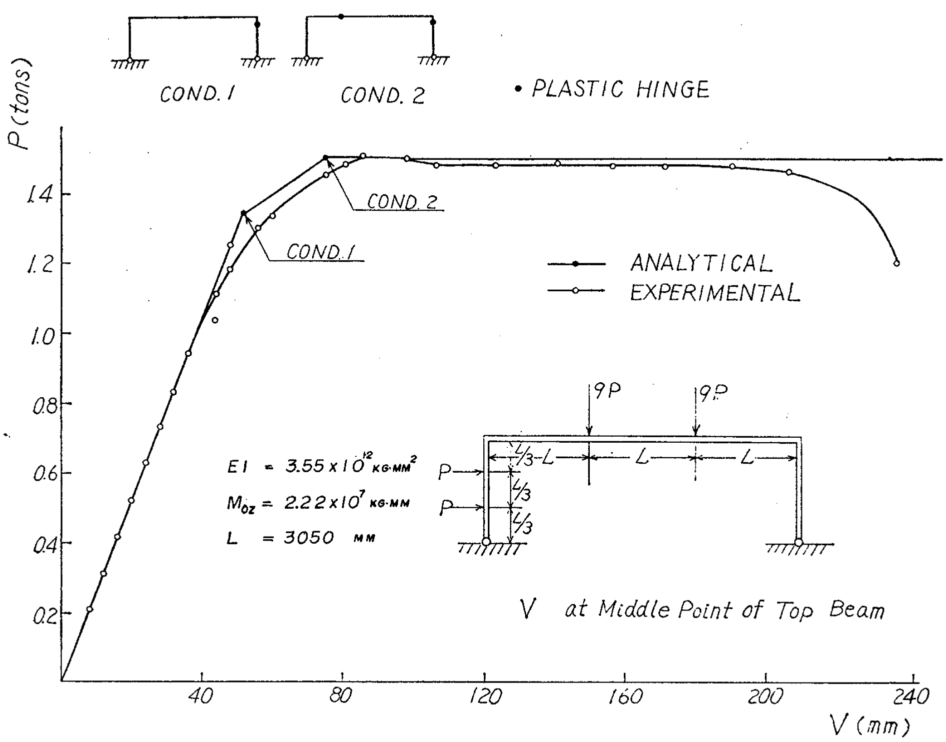

Fig. 3 Load deflection curve for one bay portal frame

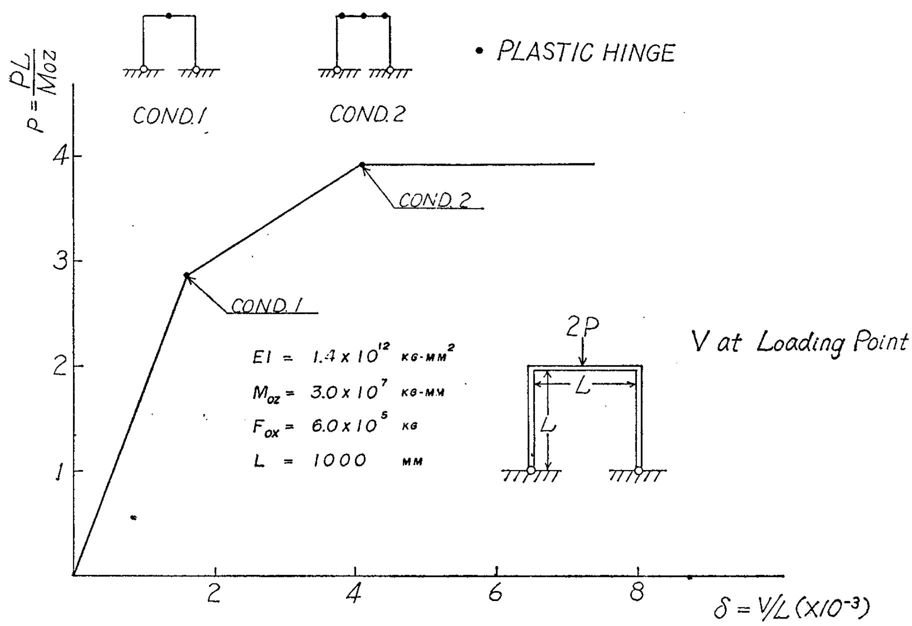

Fig. 4 Load-deflection curve for one bay portal frame

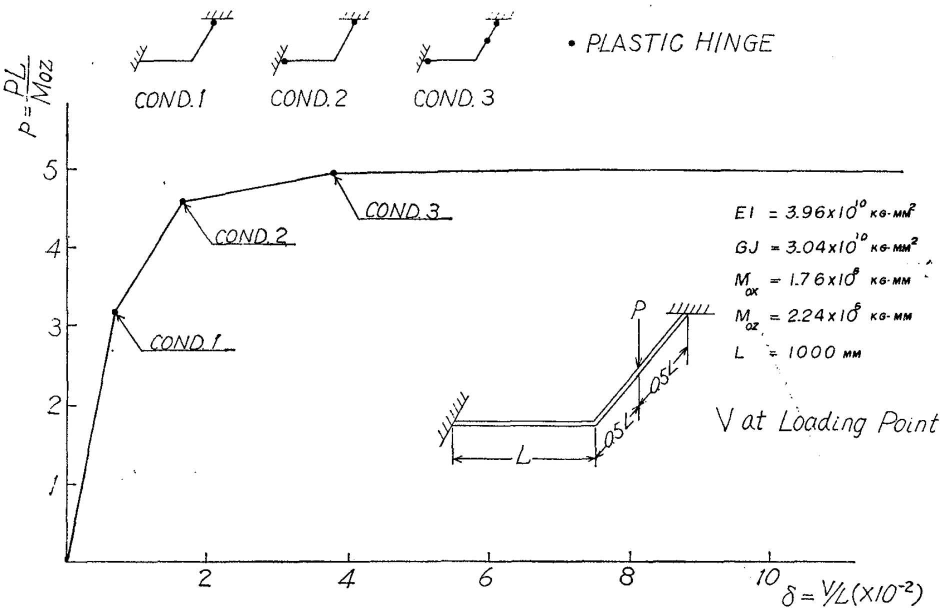

Fig. 5 Load deflection curve for right-angle bent

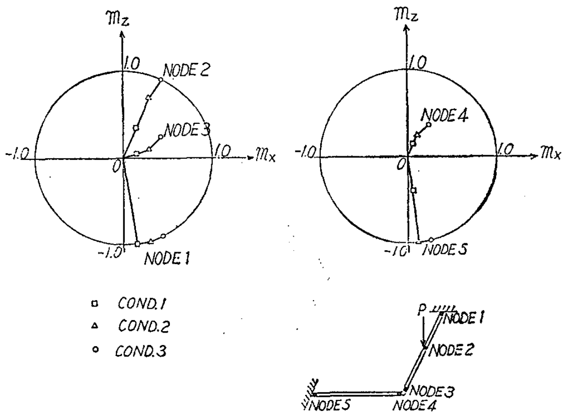

Fig. 6 Stress profiles for right-angle bent

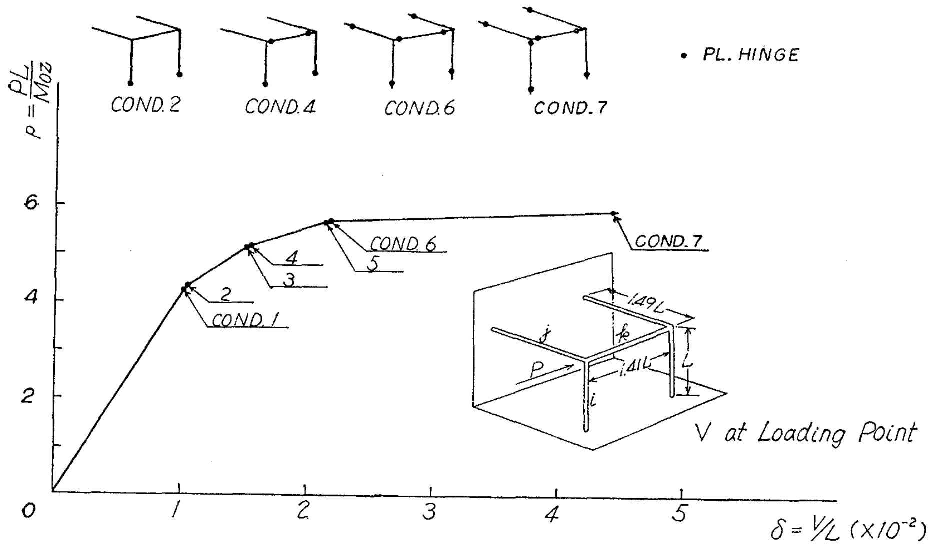

Fig. 7 Load deflection curve for semi-space framed structure

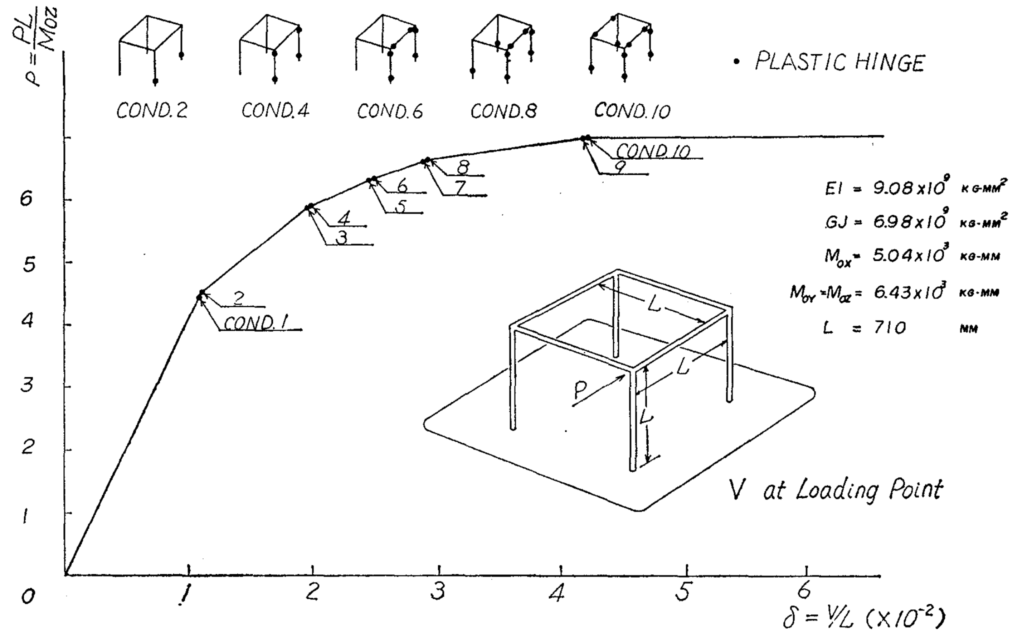

Fig. 8 Load deflection curve for space framed structure

4 新しい塑性関節構の特性

本論文の弾塑性解析理論の中にあらわれる塑性関節機構は，解析例からも知られるように，これまでのものと比較して次のような特性を有している。すなわち

（1） 解析において降伏相関関係を線形化する必要はなく，そのまま使用することができる。

（2） 降伏条件を満足し全断面降伏後も変形（撓み角を含む）は常に連続している。

（3） 全断面降伏を生じた部材の剛性は変形成分の比によつて自動的に調節される。

（4） 降伏条件を満足し全断面降伏した後も，変形成分の割合によつて降伏条件を満足するように内力の組合せが変化しうる。

（5） この全断面降伏を導入して得られる部材の変形は，塑性関節に回転ピンを挿入して得られるこれまでの解析によつて得られる変形と等価なものである。

（6） 荷重（もしくは変形）増分の間隔を無限に小にすれば解析結果は，上界値から正解に収束する。

5 結　　論

本論文では，新しい概念に基づく塑性関節機構を考案し，それを用いて展開した骨組構造物に対する新しい弾塑性解析理論について述べた。そして本理論を適用して，軸力と曲げを同時に受ける平面骨組を始め，立体構造にいたる種々の構造物についての解析例を示した。その結果次に示す主要な結論を得た。

（1） 新しく考案した塑性関節機構は4章で述べたような特性を有している。特に可能な全断面降伏点での撓み(撓み角を含む)は弾性・塑性を通じて常に連続であり，塑性化によつて自動的に剛性が低下する。また降伏断面では変形成分の成分比の変化によつて内力比が変るが，その場合でも常に塑性条件を満足している。

（2） このような塑性関節機構を導入した本弾塑性解析法では，任意の降伏相関関係を適用して解析を行なうことができる。解析では，全断面降伏の形成順序を追跡しながら荷重～撓み曲線を得ることは容易である。そして最後に塑性崩壊荷重が得られる。ここで得られる荷重～撓み曲線は単純塑性解析によつて得られるものと等価であるが，常に降伏相関関係が考慮されている。計算において荷重増分を無限に小にすれば解析結果は常に上界より正解に収束する。

なお，ここで展開された解析法は，トラス構造に対しても，部材に軸力だけが作用する場合として取扱えば，そのまま適用することができる。

本論文では，新しく考案した塑性関節機構を導入して骨組構造物の弾塑性解析法を展開したが，一般骨組構造の弾塑性挙動を解析するのに対して，非常に有用な方法であることがわかつた。

最後に，終始ご指導をいただいた大阪大学，寺沢名誉教授，八木教授ならびに，貴重なご意見，ご討論をいただいた日本鋼構造協会，構造解析小委員会委員の各位に深謝します。

なお，計算を行なうにについては，東大大型計算機センター HITAC 5020，阪大計算機センター NEAC 2200 (M 500) を使用した。

記

b : breadth
EI : bending rigidity
F : yield function
F_x, F_y, F_z : axial force and shearing forces
F_{0x} : yielding force
f : yield function (in dimensionless form)
GJ : twisting rigidity
h : depth
$[K]$: stiffness matrix
L : length
M_x, M_y, M_z : twisting and bending moments
M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} : fully plastic moments
P : load
$p=PL/M_{0z}$: load (in dimensionless form)
p_u : ultimate load (in dimensionless form)
$p_u{}^u$: upper ultimate load (in dimensionless form)
$p_u{}^l$: lower ultimate load (in dimensionless form)
$p_u)_{\exp}$: experimental ultimate load (in dimensionless form)
$\{R\}$: nodal force
$\{u\}$: nodal displacement
$\{\delta u\}$: increment in total displacement
$\{\delta u^e\}$: increment in elastic displacement
$\{\delta u^p\}$: increment in plastic displacement
V : displacement
v_x, v_y, v_z : displacements
$\delta=V/L$: displacement (in dimensionless form)
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$: slopes
σ_Y : yield stress
$[\lambda]$: constant

参 考 文 献

(1) 例えば，H.C. Martin : Introduction to Matrix Method of Structural Analysis Mc-Graw Hill, New York,
(2) P.G. Hodge : Plastic Analysis of Structures Mc-Graw Hill, New York, (1959)
(3) A. Jennings & K. Najid : An Elastic-Plastic Analysis by Commputer for Framed Structures Loaded up to Collapse, The Structural Engi, Vol. 43, No. 12, (1959 December)
(4) C.G. Schilling, F.W. Schutz & L.S. Beedle : Behavior of Welded Single-Span Frames under Combined Loading, Welding. Jr. Research, Suppl. 35, (1956)
(5) 吉識 雅夫 外：構造物の塑性設計（その８），造協論文集，第120号，(昭和 41 年)