(昭和 44 年5月日本造船学会春季講演会において講演)

多入力スペクトラム解析法の船の応答研究えの応用と非線形応答の一取扱いについて

正員 山 内 保 文*

On the Application of the Multiple Input Analysis to the Study of Ship's Behaviour and an Approach to the Non-linearity of Responses

Yasufumi Yamanouchi, *Member*

Summary

Previously, this author intended to judge the extent of linearity of the response of a system working under the stochastic environments, by the level of coherency, that is an important function in the spectrum analysis of time series. However, finding the fact that the simple coherency could stay at low level because of the secondary effect of the spectrum window on the estimation of the cross-spectrum, he proposed[4] a practical method to remove this difficulty. This was made clear also theoretically later[3].

It is natural that the coherency stays at low level (or sometimes high, anyway at eroneous value), also when some other co-existing inputs which are affecting that output, were failed to be taken into account. The theory of multiple input analysis that has been published by a few authors[7)~10)] in these days give us a function called multiple coherency, that takes account of all inputs affecting one output simultaneously, and also the partial coherency that is the coherency of one definite input to the output, under the condition that other inputs co-exist simultaneously, although very few results of application are published.

Here this fact will be checked for the analysis of ship's responses in waves, and the necessity and the usefullness of the multiple input analysis will be demonstrated.

The identification of non-linear response was the initial motive to start this study. Every stage of the trials to find out the simple non-linearity was checked, and the multiple input analysis was found to be helpful even for this kind of purpose. The multiple input analysis technique can be expected to be used effectively in future for the analysis of ship's behaviour, for example thrust or torque increase of propeller shaft in irregular waves, together with the identification technique of their non-linearity.

1 ま え が き

以前著者はランダムな環境の下に置かれたある力学系の応答の線型性の度合いを，その系の応答のスペクトラム解析を行なつたときに求められる coherency 函数の値によつて示すことができるのではないかと考えた。しかしながら精しく調べているうちに，殊に模型船の応答の場合入力と考えられる波浪の計測が船とかなり離れた点で行なわれる場合のように，入力と出力とに大きな位相ズレがあるような場合には，有限記録からの標本計算に使用されるラグウィンドウの二次的効果によつて，クロスの値が切下げられ，クロススペクトラムが低く見積られ，ために coherency はかなり低く出てしまうことがあることを見出した。この困難を除く方法は著者により実験的[4] に後にはまた赤池および著者[3] により理論的に示されている。このことが成立つのは然し一入力に対

* 船舶技術研究所

して一出力が対応する場合に限られる。

もし同時に2つ以上の入力が一つの出力に影響を及ぼすような場合に，先の一入力一出力の解析[1)~3)]を行なうと，入力間の相関の程度によつて coherency は実際よりも低く，ときには高く表われてしまうことはもちろん想像されよう。多入力解析の理論については最近2～3の著者[7)~10)]によりかなり明らかにされているが，それによると多くの入力が同時に存在する場合，それら入力すべてを考えに入れた multiple coherency や，また他のすべての入力も存在するという条件の下での特定の入力に対する出力の coherency を示す partial coherency 函数等の形が示されている。所がこのような multiple coherency は計算にはかなりの手数を要し，現実には殆んど計算されたものがない。然しながら現実の環境は多くの場合多入力と考えるべき場合が多いように思われる。そこでここに船の応答の解析にこれを応用してみることにより多入力解析が如何に有効であり，船の応答解析にも必要であるかを明らかにしようとした。

また海洋波の線型性はすでに L. Tick[11)] によつて示されたように，ほぼ許しうる仮定であるとしてもすべての応答は線型とは云い得ない。そこで非線型応答要素が存在する系のランダム入力に対する応答についても著者は先に検討したが[4)]，これだけでは非線型応答特性の性質を求めるには不十分である。最近このために高次スペクトラム[12)~14)]を利用する等の動きも表われている。また船の応答についても Hasselmann[15)] によつて極めて美しい理論式が導かれているがすぐ計算には用いられない。ここでは船の横方向ストレスのある簡単な非線型応答について調査しようとして二，三の試みを行なつた。その結果このような場合にも多入力解析の手法が極めて有効であることが明らかとなつた。ここでは多入力解析法の有用性に到達し，非線型性の検討をも行なうためにとられた試行錯誤の経過に従つて述べることとする。

Table.1 Environments & Particulars of Analysis for Test Runs

Run NO.	Date Time	Wind Scale	Wind Dir.(deg) / Vel.(m/s)	Sea State Sketch (Swell ⇒, Sea →)	Waves Scale	Waves Swell/Sea Ht.	Waves Swell/Sea Period Sec.	Digitized Channel Contents 1	2	3	4	Sample Δt	Sample Total / Max. Lag
204	Jan.15 1335 1345	3	-70/13		5	4.8/1.2	8.5/5.3	R	P	S	W	1.5	630/60
205	Jan.16 0910 0920	3	-127/6		4	2.2/0.7	9.0/4.0	R	P	S	W	1.5	600/60
206	Jan.17 0900 0910	3	-80/8		3	3.5/0.7	11.3/3.7	R	P	S	W	1.5	600/60
207	Jan.18 0900 0910	4	-70/11.5		4	2.9/1.0	9.7/6.2	R	P	S	W	1.5	600/60
208	Jan.19 0900 0910	2	10/5.5		3	3.0/0.5	10.6/3.5	R	P	S	W	1.5	600/60
209	Jan.20 0900 0910	2	-120/7		3	1.5/1.0	8.7/5.8	R	P	S	W	1.5	400/60
211	Jan.22 0900 0910	6	0/12.5		5	3.9/1.5	9.3/5.6	R	P	A	W	1.5	550/60
214	Jan.23 0805 0820	5	-10/1[illegible]		8	7.8/3.2	13.5/6.0	R	P	S	/	1.125	800/80
215	Jan.23 1400 1415	6	35/16		7	6.4/2.1	11.4/6.2	R	P	S	/	1.125	800/80
216	Jan.25 1317 1330	4	40/8.5		8	6.2/1.6	11.0/5.5	R	P	S	/	1.125	720/80
218	Jan.26 1330 1350	7	75/20		8	5.4/2.0	8.7/6.8	R	P	S	/	1.125	800/80
219	Jan.26 1530 1545	7	35/17		7	6.2/1.8	8.5/5.7	R	P	S	/	1.125	800/80
220	Jan.27 0900 0918	2	30/5		4	1.5/1.5	9.0/8.0	R	A	S	W	1.5	800/60

R: Rolling　S: Stress　(A): Vert. Acc.
P: Pitching　W: Rel. Wave Ht.

2 本例に用いたデータ

1964年，ニューヨーク航路 山下新日本汽船，山隆丸について行なわれた第3回船舶技術研究所の実船実験結果[16)]のうち，パナマ海峡から横浜までの復航の際，北太平洋横断中に取られた船の運動およびストレスの十数個の連続記録を例として用いた。原則として1日1回行なわれた定時計測において計測された諸量のうち，横揺れ，縦揺れ，中央に近いある断面における相対波高，およびその横断面リングに生じたストレス，あるいは場合によつてはその点の上下加速度等は，実験と同時に船上でディジタル化され紙テープに穿孔されているので，これを用いることとした。ここで相対波高というのは，船の舷側における水位の変化で甲板縁から下方垂直に超音波波高計によつて計測されたものである。横方向ストレスは，ウェブ肋骨でストレンゲージによつて計測され，横揺れ，縦揺れは人工起立装置を有する自由ジャイロを用いて計測された。各実験時の海象気象の一般状況および解析の際の諸量はまとめて Table 1 に示してある。

3 解析の経過，その考察

3.1 基礎解析とある平均化

最初に Fig.1 に例が示してあるように現在われわれの用いている標準法[4)]によつて各測定項目の（オート）コレログラム，スペクトラムを求めた。標本数値の数 M，最大ラグ数 m，標本読取時間間隔 Δt は Table.1 に示してある。M/m の比は二，三の例外を除くと 10 になるようにした。使用したスペクトラムウィンドウは赤池[5)]によつて示された W_2 即ち $a_0=0.6398$，$a_1=a_{-1}=0.2401$，$a_2=a_{-2}=-0.0600$ という値である。もちろんこのような結果だけからでもわれわれ造船技術者は各応答について多くの情報を得ることができる。

さてここで既に先にも著者が述べた[17)]ように，一つの平均化を行なつた。即ち全実験値のコレログラムを

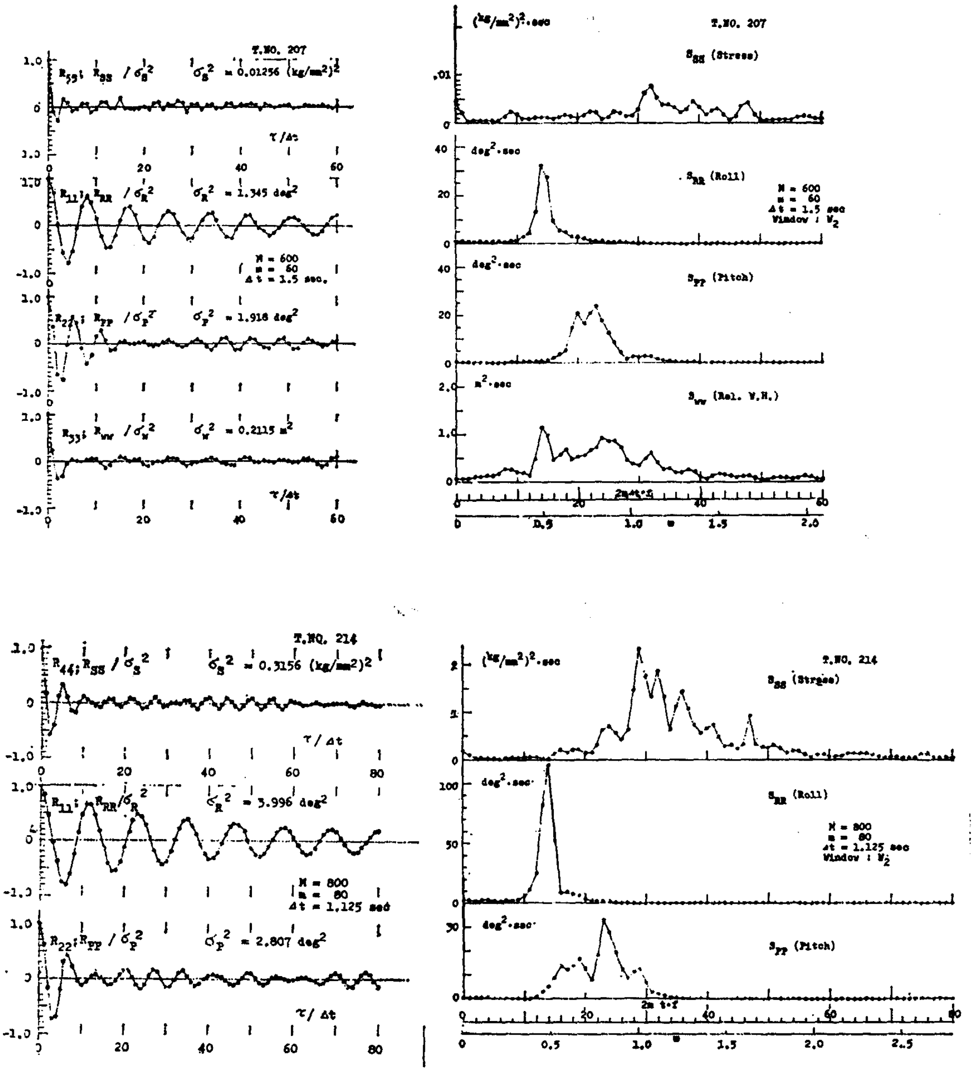

Fig.1 Examples of spectra of each process

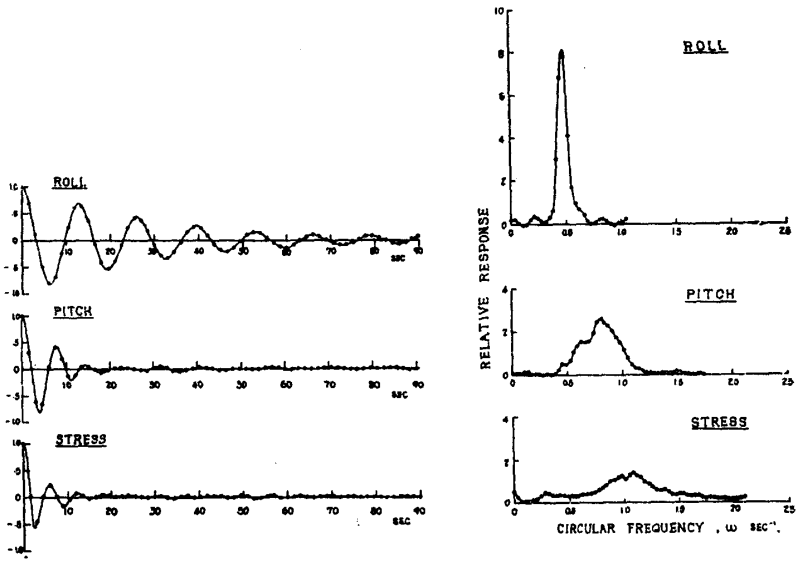

Fig.2 Averaged correlograms and spectra

normalize したものの平均値をとり，そのフーリェ変換としての平均スペクトラム密度を求めた。その結果を文献(17)より再び引用したものが Fig.2 である。この場合スペクトラムの縦軸は各スペクトラムの囲む面積が1になるようなものである。この平均化は，平均化によつて外力即ちこの場合は波浪の効果が平均化され，理想的に行なつた場合には外力は全くランダムな過程，即ち white なスペクトラムを持つようなものとなりその結果平均化した応答のスペクトラムには，波に対する応答特性の周波数特性（二乗形）そのものの形が表われることを期待したものである。即ち，平均化されたスペクトラムは

$$P_{rr}(\omega)=|H_{r\zeta}(\omega)|^2\cdot\left[\overline{\hat{S}_{\zeta\zeta}(\omega)/\hat{\sigma}_r^2}\right]$$

の形となる。ここで $r(t)$ は応答過程を，$\zeta(t)$ は波浪過程を示し，σ_r^2 は応答の分数を，$S_{\zeta\zeta}(\omega)$ は波浪のスペクトラムを，$H_{r\zeta}(\omega)$ は波浪 $\zeta(t)$ に対する応答 $r(t)$ の周波数応答特性を示している。平均化の符号の下にある値は多くのものの平均となればなる程，周波数による変動が減じ，理想的にはωに対して一定の値を持つようになる筈である。今ここで平均化を行なつたものは 20 にも足りない実験値で，然もあるシーズンの北太平横断の片航であるから波の向き，そのスペクトラムに実験毎にそう大きな変化があつた訳でも又広く各種の変化を含んでいるものでもないから，平均化によつて外力の効果が完全に white になつたとは云えない。にも拘らず，コレログラムの形状も，又スペクトラムの形状も，平均化によつて極めて美しく平滑化され卓越したもののみが残り，例えば縦揺れ，横揺れではスペクトラムのピークの周波数も又ピークの形状もこの船のものとして極めて妥当なものとなつている。船の横ストレスの波に対する周波数応答の形状は未だよく研究されていない。これは今までの船体構造では縦方向の強度程横方向の強度は重要でなかつたことによるのであろう。しかし最近の船の巨大化の傾向と共に横方向強度も構造設計者にとつて次第に注目されるようになりつつある。そこで以下横方向ストレスの応答機構について極めて大胆な仮定をこの平均化されたスペクトラムの形から引出し，これを確率過程解析の手法の上でチェックし，その経過で多入力スペクトラム，非線型要素の扱いについて話を進めてゆくことにする。

まずわれわれの持つている知識より云つて，横方向ストレスは縦方向のストレスが縦揺れと密接な関連があるのと同様に，横揺れとかなり密接に関連しているに違いないと考えられる。また当然，舷側の相対水位にも関連があるであろう。いま平均化された横ストレスのスペクトラムを見ると，その形状は極めて美しいので，これも横揺れ縦揺れと同じくこの船の横ストレスの応答特性の形を示していると考える。するとそのピークの周波数は丁度横揺れ周波数の二倍の所にある。この理由として

i） なんらかの機構によつて横方向ストレスは横揺れの二倍の周波数で変動する。

ii） 横ストレスがなんらかの理由で横揺れの強い非線型の影響，二乗の影響を受けている。

iii） 横ストレスの固有周期が，たまたまこのような周波数にある等の可能性が考えられる。このうち iii）については，このような船の構造上の固有振動数でこのように低いものはあり得ないので考えられない。i）についても現状ではあまり妥当な説明は見出されない。又ピークの位置が横揺れのピーク周波数の丁度二倍の周波数の所に表れるという事実は，その後注意をしていると例えばシアトル丸の実験[18]等他の船舶の横ストレスを解析した際にも認めることができた。即ち偶然のものとも考えられない。そこで ii）の仮定を確かめる方向で解析を進めることとした。

3.2 非線型応答の検討

3.2.1 弱い非線型性の検討　横ストレスを生じている根源はもちろん波浪である。しかし現在出会波浪は測定されていないので，計測されている相対波高，横揺れ，縦揺れをすべて横ストレスを生ぜしめる外力であると考える。従つて横ストレスの非線型性を考えるに当つて，まずこれら外力の非線型性を考える必要があろう。このうち最も非線型の影響が大きいと思われるのは横揺れである。横揺れの応答に非線型な二乗減衰があると考えた場合スペクトラムにどのような形として表われるかについては著者[4]は先に単純化された横揺れについて近似的に調べている。これは

$$I\ddot{\phi}+N_1\dot{\phi}+N_2\dot{\phi}|\dot{\phi}|+K_1\phi=M \tag{3.2.1}$$

または

$$\ddot{\phi}+2\alpha\dot{\phi}+\beta\dot{\phi}|\dot{\phi}|+\omega_0^2\phi=m(t) \tag{3.2.1$'$}$$

のように $\beta\dot{\phi}|\dot{\phi}|$ という非線型項を含む場合についてのものであつた。その結果は二乗減衰のないときの線型解を第0近似 $\phi_0(\omega)$ とし，第一近似 $\phi_1(\omega)$ のスペクトラム $S_{\phi_1\phi_1}(\omega)$ は次のような形で与えられた。

$$S_{\phi_1\phi_1}(\omega)\doteqdot S_{\phi_0\phi_0}(\omega)+4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_{\dot{\phi}_0}\beta S_{\phi_0\phi_0}(\omega)\cdot\omega\cdot I_m[H_{\phi_0 m}(\omega)]$$
$$+\beta^2|H_{\phi_0 m}(\omega)|^2\left[\frac{8}{\pi}\sigma_{\dot{\phi}_0}{}^2\cdot S_{\dot{\phi}_0\dot{\phi}_0}(\omega)+\frac{4}{3\pi\sigma_{\phi_0}{}^2}\boldsymbol{S}_{\dot{\phi}_0\dot{\phi}_0}(\omega)\right] \tag{3.2.2}$$

ここで

$$\boldsymbol{S}_{\dot{\phi}_0\dot{\phi}_0}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\dot{\phi}_0\dot{\phi}_0}(\omega_1)S_{\dot{\phi}_0\dot{\phi}_0}(\omega_2)S_{\dot{\phi}_0\dot{\phi}_0}(\omega-\omega_1-\omega_2)d\omega_1 d\omega_2 \tag{3.2.3}$$

$$S_{\dot{\phi}_0\dot{\phi}_0}(\omega)=\omega^2 S_{\phi_0\phi_0}(\omega) \tag{3.2.4}$$

$$H_{\phi_0 m}(\omega)=\frac{1}{-\omega^2+\omega_0{}^2+2j\alpha\omega} \tag{3.3.5}$$

このときは横揺れ角速度のスペクトラムの二重コンボリューションの項とβによる項とが附加項として含まれることになり，非線型減衰項のない場合のスペクトラムにくらべ，二乗減衰のためにピークは低くなり，二重コンボリューションの性質として更に固有周期 ω_0 の三倍の周波数 $3\omega_0$ の所に副次的な小さなピークが表われる可能性があることが示された。これと同じようにして

$$I\ddot{\phi}+N\dot{\phi}+(K_1\phi+K_3\phi^3)=M \tag{3.2.6}$$

または

$$\ddot{\phi}+2\alpha\dot{\phi}+\omega_0{}^2\phi+k_3\phi^3=m(t) \tag{3.2.6$'$}$$

というように非線型復原力 $k_3\phi^3$ がある場合の効果についても逐次近似法によつて計算することが出来る。

$$\begin{aligned}S_{\phi_2\phi_2}(\omega)&\doteqdot S_{\phi_0\phi_0}(\omega)-k_3 2R[H_{\phi_0 m}{}^*(\omega)3\sigma_{\phi_0}{}^3S_{\phi_0\phi_0}(\omega)]\\&\quad+k_3{}^2|H_{\phi_0 m}(\omega)|^2\{9\sigma_{\phi_0}{}^4S_{\phi_0\phi_0}(\omega)+6\boldsymbol{S}_{\phi_0\phi_0}(\omega)\}\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

ここで

$$\boldsymbol{S}_{\phi_0\phi_0}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\phi_0\phi_0}(\omega_1)S_{\phi_0\phi_0}(\omega_2)S_{\phi_0\phi_0}(\omega-\omega_1-\omega_2)d\omega_1 d\omega_2 \tag{3.2.8}$$

となつて修正項によつてスペクトラムの主ピークの片側は低く，他の側は高くなつてピークの skewness が生ずる傾向と，再び二重コンボリューションの影響によつて主ピークを示す周波数 ω_0 の三倍の周波数 $3\omega_0$ の所に生ずる副次的なピークの存在となつて表われる。ただ $\boldsymbol{S}_{\dot{\phi}_0\dot{\phi}_0}(\omega)$ や $\boldsymbol{S}_{\phi_0\phi_0}(\omega)$ の項に $3\omega_0$ の周波数ではかなり小さな値となる $|H_{\phi_0 m}(\omega)|^2$ の項がかかるので実際には副次的な山は極めて小さくなり，例えばスペクトラムの縦軸を対数目盛で示した Fig.8 には明らかにそれと思われる山が認められるものの，エネルギーの大さはあまり問題とはならない。又βの値も船が前進速度を持つ場合には停止中にくらべて極めて小さくなり，逆に線型減衰αは大きくなつて，振幅ϕは減じ，$k_3\phi^3$ の効果も小さくなるので，航走中の横揺れは意外に線型に近づくことも既に明らかにされている[19]。従つてここでは横揺れ自体の応答は線型の近似が成立つと考えてよいこととする。

3.2.2 一般の非線型応答の検討　横揺れを入力と考えると，横ストレスは横揺れのピークを示す周波数においてさえ極めて僅かしか反応していない。このことは例えば Fig.3 に示したような横揺れを入力，ストレスを出力として計算したときの coherency 函数 $\hat{\gamma}^2_{SR}$ にも極めて低い値として表われている。従つて 3.2.1 に述べたような弱い非線型特性では説明ができない。そこで一般に非線型応答について考える必要がある。

ガウス過程である入力に応答する系の非線型特性を見出す方法として，高次のスペクトラム，クロススペクトラムの応用が二，三の著者[12)~14)]によつて最近示されている。海洋波をガウス過程であると仮定すると，若し，横揺れ $\phi(t)$ およびその応答 $r(t)$ の三次モーメントのスペクトラムであるバイスペクトラム $B_{\phi\phi\phi}(\omega_1,\ \omega_2)$，$B_{rrr}(\omega_1,\omega_2)$ を計算できたとすると，たとえ横揺れが完全に線型でなくバイスペクトラムの値が存在しても（ガウス過程では，バイスペクトラムは0となる），skewness 函数と呼ばれる

$$\nu=\langle\xi^3\rangle/\langle\xi^2\rangle^{3/2} \tag{3.2.9}$$

は，横揺れについての値よりもさらにその応答についての値の方が大きくなる筈である。

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega=R(0)=\langle\xi^2\rangle \tag{3.2.10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega_1,\omega_2)d\omega_1 d\omega_2=M(0,0)=\langle\xi^3\rangle \tag{3.2.11}$$

またバイスペクトラムは

$$B(\omega_1,\omega_2)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}M(\tau_1,\tau_2)e^{-j\omega_1\tau_1-j\omega_2\tau_2}d\tau_1,d\tau_2 \tag{3.2.12}$$

$$M(\tau_1,\tau_2)=E[x(t)\cdot x(t+\tau_1)\cdot x(t+\tau_2)] \tag{3.2.13}$$

である。しかしバイスペクトラムの数値計算はかなりの手数を要するので，これはバイスペクトラムの検討とともに将来のこととし，ここではより単純な方法を試みた。

まず横揺れの各読取りの値の二乗を計算して横揺れの二乗過程を作つた。この二乗過程を新らしい入力 $x(t)$

として，横ストレス $y(t)$ との coherency 函数

$$\gamma^2_{yx}(\omega)=\frac{|S_{yx}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)\cdot S_{yy}(\omega)} \tag{3.2.14}$$

を計算し，すでに Fig.3 に示した横揺れ原過程とストレスとの coherency $\hat{\gamma}^2_{SR}$ と比較してみた。これは，クロ

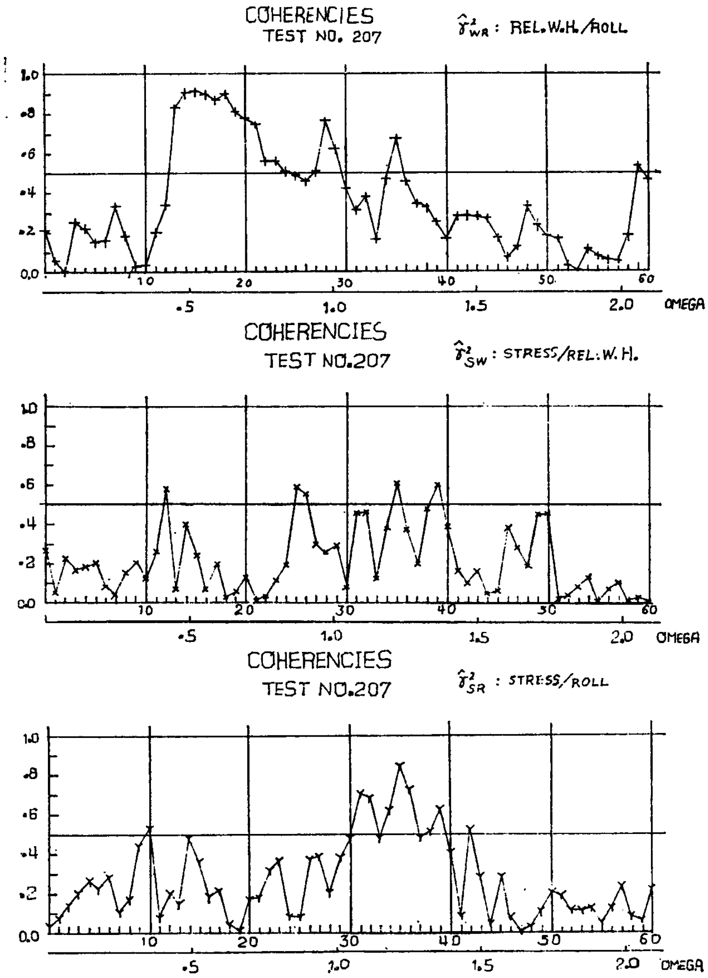

Fig.3 Coherencies of single input to output

スバイスペクトラム解析または赤池[14]によつて示された mixed spectrum 解析の特殊な場合である。すなわち赤池の表現に従えば

$$m_{yxx}(\tau,\sigma)=E[y(t+\tau)-E\{y(t+\tau)\}]x(t+\sigma)x(t)$$

$$B_{yxx}(f;\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-j2\pi f\tau)m_{yxx}(\tau,\sigma)d\tau \tag{3.2.16}$$

において σ を 0 とおいた

$$m_{y\cdot x^2}(\tau)=E[y(t+\tau)-E\{y(t+\tau)\}]x^2(t) \tag{3.2.17}$$

$$B_{y\cdot x^2}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi f\cdot\tau}m_{y\cdot x^2}(\tau)d\tau \tag{3.2.18}$$

のようなクロスバイスペクトラム，又は mixed spectrum を計算したことになる。この $B_{y\cdot x^2}$，および S_{yy}，$S_{x^2x^2}$ を用いて応答特性，coherency 函数が計算されることになる。この計算を行なつた結果のうち cohenecy函数 $\hat{\gamma}^2_{SR}$ の一例を Fig.4 に示した。ところが Fig.3 のもとの横揺れ過程とストレスとの coherency $\hat{\gamma}^2_{SR}$ にくらべて周波数の 0 に近い近傍を除けば期待した程改善のあとは見られない。この理由について次のような可能性が考えられた。

新らしい入力は横揺れの二乗過程である。従つて Fig.6 または Fig.8 のスペクトラム $S_{R^2R^2}(\omega)$ に，又は

Fig.5 に示される二乗過程そのものの形に示されるように，二乗過程は成分周波数の和から来る，もとのピーク周波数の二倍に近い周波数域における成分の他に，成分周波数の差から来る成分として0に近い極めて低い周波数域にかなり高いエネルギーを有している。このことは ω_0 という中心周波数に狭帯域スペクトラムを持つガウス過程のスペクトラムの convolution が周波数0にイムパルス的な山を，$2\omega_0$ にもとの帯域幅の略々2倍の帯域幅のピークを有することからも予想される事である。この事実は我々に先のモデル ii）を信ぜしめる他の証拠を与える。即ちすべての実験航走について，各過程のスペクトラムを通観してみると，横方向ストレスのスペクトラムの殆んどすべてには周波数0の所にピークが認められるが他の横揺れ，縦揺れ，相対波高等には殆んどそれが認められない。これは横揺れスペクトラムの周波数0におけるピークに対する応答と考えられないこともない。横揺れスペクトラムのピーク周波数 ω_0 の二倍 $2\omega_0$ におけるストレスの平均スペクトラムに示されるピークの帯域幅は横揺れのピーク幅の約2倍になつている。これらの事実は横ストレスを横揺れの二乗過程の応答と推定させるに役立つて来る。然しここにわれわれが得た coherency の値は，これらの仮定から期待される所に反して極めて低い。事実低波周成分のエネルギーはスペクトラムによれば極めて大きい。そこで高い周波数成分の効果が覆われてしまつて表われないのではないかと考えられた。

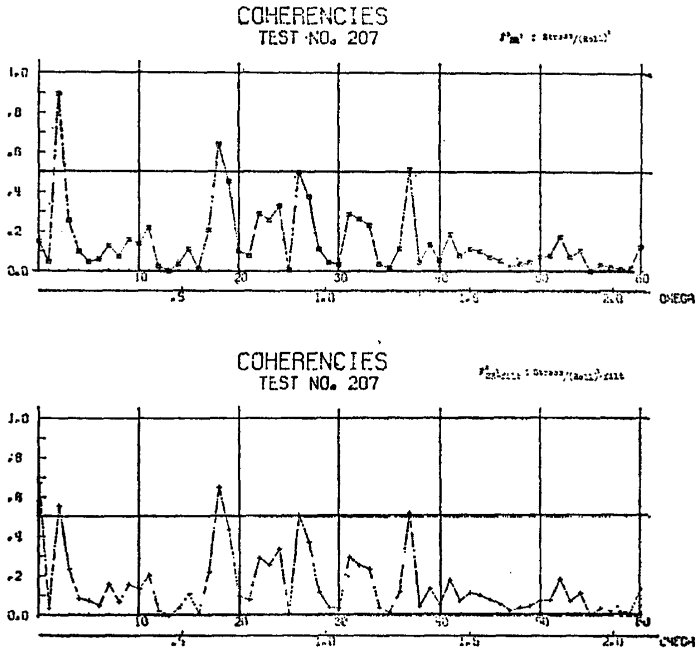

Fig.4 Coherency of squared rolling process and filtered squared rolling process to the stress

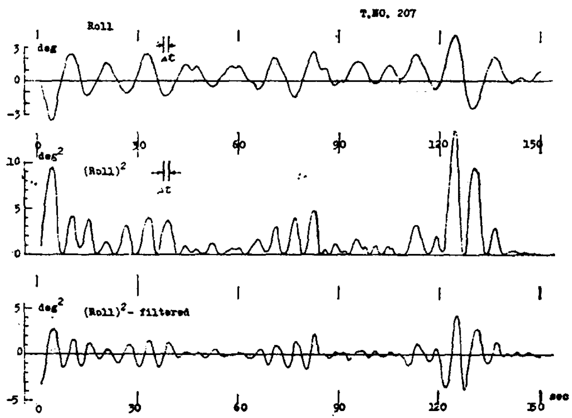

Fig.5 Roll, $(\mathrm{Roll})^2$, $\frac{1}{2}\{(\mathrm{Roll})_n{}^2-(\mathrm{Roll})_{n+1}{}^2\}$ Processes

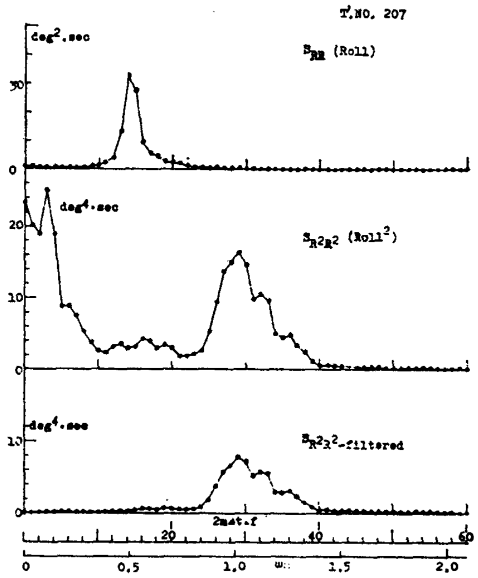

Fig.6 Spectra of Roll, $(\mathrm{Roll})^2$, $(\mathrm{Roll})^2$-filtered

そこで第二の試みとして横揺れの二乗過程から低周波成分を数値フィルターによつて除いて見ることとした。これはごく簡単に相隣る標本値の差の半分を新らしい過程とする。すなわち

$$X_n(t)=\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1}) \tag{3.2.19}$$

をとることによつて行なわれた。いまは $x_n(t)$ としては横揺れの二乗過程をとる訳である。この数値フィルターの形は周波数領域では単純な余弦函数で Fig.6 に示すように周波数0の値は完全にカットオフしてしまう。即

ち

$$S_{XX}(\omega)=\left(\frac{1-\cos\omega\cdot\Delta t}{2}\right)S_{xx}(\omega) \tag{3.2.20}$$

このフィルターを通した過程が Fig.5 にも示されているが，これを次に入力としてストレスの応答を求めた。coherency 函数の例が Fig.4 に示されている。結果は期待に反し，横揺れの二乗過程が卓越したピークを示す $2\omega_0$ においてさえ cherency はあまり高い値を示していない。

このようないくつかの結果にかんがみ，多入力スペクトラム解析を試みる必要が痛感された。即ち一つの応答出力を考えると，ある特定の入力に対する応答を考えようとしてもその入力と共存している他のいくつかの入力の効果によつて大いに影響を受けている可能性があることである。そしてこのことはその入力が共存している他の入力にくらべてあまり大きい効果をもつていない場合には殊に一対一の入力出力の対応では関連は分らないのではないかと思われる。そこで多入力スペクトラム解析を適用することとした。

3.3 多入力解析

ここに用いられた十数回の航走記録のうち横揺れは全部の記録に，縦揺れと横方向ストレスとは殆ど全部の記録に含まれているが，相対波高は約半数の記録にしか含まれていない。いま横方向ストレスを一つの出力と考えると，船のほとんどすべての応答と同じく波浪が唯一つの入力であることはもちろんである。しかしこの場合残念ながら出会波浪の計測はまだ不可能であつたため，行なわれていない。船の二つの動揺の他には外力としては舷側における相対水位の変動だけが取られている。

船体の動揺は波浪によつて引起されるが相互に関連を持ち，それぞれ二次的に横方向ストレスに影響を及ぼす。船体運動には6つのモードの動揺があるが前後揺れ，左右揺れは小さく無視できるとすれば，横方向ストレスに最も影響があると思われるのは横揺れ，縦揺れ，上下揺れである。相対水位の変動ももちろん直接横ストレスに影響するであろう。従つて応答の形式を Fig.7 のように考える。ここで other effect というのは風，操舵等波浪以外の外力であるが波の影響にくらべれば小さいとしてよい。

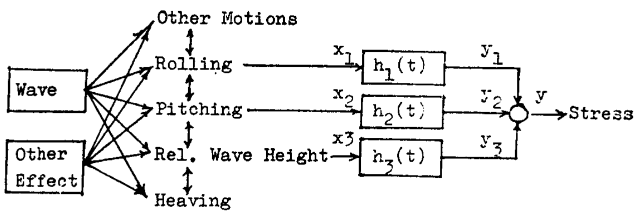

Fig.7 Pattern of the stress response

海洋波は測定されていないので議論を Fig.7 における横ストレスを船体動揺と相対波高に対する応答と考える所から始めることとする。上下揺れは計測されていないが，その効果は相対波高の中に含まれていると見なす。もちろん Fig.7 に示す以外の経路でこれらと直交な即ち関連のない部分を含む入力が存在する可能性はある。そのようなものはすべて雑音として一括されてしまうことになる。

多入力過程解析の概念，その手法については，Tick[7]，Goodman[8]，赤池[9] および Enochson[10] らによつて示されている。しかし応用例についてはほとんど発表されていない。以下議論を進める必要上，この手法について簡単にまとめておくこととする。これは線型1入力1出力の場合のヴェクトル入力対出力の場合への拡張と考えればよい。すると解析の各段階は，単一入力の解析に用いられたと同ような表現を用いて示すことができる。

出力 $y(t)$ は定常過程である入力の一つ一つ $x_i(t)$ にそれぞれ応答した成分出力 $y_i(t)$ の和で

$$y(t)=\sum_{i=1}^{k}y_i(t)=\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}h_i(\tau)x_i(t-\tau)d\tau \tag{3.3.1}$$

と考えることができる。従つて相関函数は

$$R_{yy}(\tau)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_i(\alpha)h_j{}^*(\beta)R_{ij}(\alpha-\beta+\tau)d\alpha\cdot d\beta \tag{3.3.2}$$

スペクトラムは

$$S_{yy}(f)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}H_i(f)H_j{}^*(f)S_{ij}(f) \tag{3.3.3}$$

ここで，$H_j{}^*(f)$ は，応答特性 $H_j(f)$ の共軛函数を示す。

同様にして

$$S_{yj}(f)=\sum_{i=1}^{k}H_i(f)S_{ij}(f) \tag{3.3.4}$$

ここで $R_{ij}(\tau)$, $S_{ij}(f)$, $S_{yj}(f)$ は

$$R_{ij}(\tau)=R_{x_ix_j}(\tau)=E[x_i(t+\tau)\cdot x_j^*(t)] \tag{3.3.5}$$

$$S_{ij}(f)=S_{x_ix_j}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{ij}(\tau)e^{-j2\pi f\cdot\tau}d\tau \tag{3.3.6}$$

$$R_{yj}(\tau)=E[y(t+\tau)\cdot x_j^*(t)]=\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}h_i(\alpha)R_{ij}(\tau-\alpha)d\alpha \tag{3.3.7}$$

すなわち入力，周波数応答函数，クロスペクトラムを k 次元と考えると，いずれも次のようなマトリックス表示ができ

$$x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)] \tag{3.3.8}$$

$$H(f)=[H_1(f),H_2(f),\cdots H_k(t)] \tag{3.3.9}$$

$$S_{xx}(f)=\begin{bmatrix}S_{11}(f) & S_{21}(f)\cdots S_{k1}(f)\\ S_{12}(f) & S_{22}(f)\cdots S_{k2}(f)\\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots\\ S_{1k}(f) & S_{2k}(f)\cdots S_{kk}(f)\end{bmatrix} \tag{3.3.10}$$

出力のスペクトラムおよびクロススペクトラムは

$$S_{yy}(f)=H(f)\cdot S_{xx}(f)\cdot H^{*\prime}(f), \tag{3.3.11}$$

$H^{*\prime}(f)$ は $H(f)$ の複素共軛随伴行列である。すなわち

$$S_{yy}(f)=[H_1(f),H_2(f),\cdots,H_k(f)]\begin{bmatrix}S_{11}(f) & S_{21}(f)\cdots S_{k1}(f)\\ S_{12}(f) & S_{22}(f)\cdots S_{k2}(f)\\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots\\ S_{1k}(f) & S_{2k}(f)\cdots S_{kk}(f)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_1^*(f)\\ H_2^*(f)\\ \vdots\\ H_k^*(f)\end{bmatrix} \tag{3.3.12}$$

そしてまた

$$S_{yx}'(f)=S_{xx}(f)\cdot H'(f) \tag{3.3.13}$$

すなわち

$$\begin{bmatrix}S_{y1}(f)\\ S_{y2}(f)\\ \vdots\\ S_{yk}(f)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}(f) & S_{21}(f)\cdots S_{k1}(f)\\ S_{12}(f) & S_{22}(f)\cdots S_{k2}(f)\\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots\\ S_{1k}(f) & S_{2k}(f)\cdots S_{kk}(f)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_1(f)\\ H_1(f)\\ \vdots\\ H_k(f)\end{bmatrix} \tag{3.3.14}$$

(3.3.13) 式から k 次元周波数応答函数は次のように求められる。

$$H'(f)=S_{xx}^{-1}(f)S_{yx}'(f) \tag{3.3.15}$$

あるいは

$$\begin{bmatrix}H_1(f)\\ H_2(f)\\ \vdots\\ H_k(f)\end{bmatrix}=\frac{1}{S_{xx}(f)}\begin{bmatrix}S_{y1}(f)\\ S_{y2}(f)\\ \vdots\\ S_{yk}(f)\end{bmatrix} \tag{3.3.16}$$

これらすべての関係式は次のような単一入力出力の関係式と類似している。

すなわち

$$S_{yy}(f)=H(f)\cdot S_{xx}(f)\cdot H^*(f) \tag{3.3.17}$$

$$\therefore\quad |H(f)|^2=\frac{S_{yy}(f)}{S_{xx}(f)} \tag{3.3.18}$$

$$S_{yx}(f)=H(f)\cdot S_{xx}(f) \tag{3.3.19}$$

$$\therefore\quad H(f)=\frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)} \tag{3.2.20}$$

単一入力出力の関係式では coherency 函数は (3.3.18) 式と (3.3.20) 式と二通りの式から求めた二乗応答特性の比である。すなわち

$$\text{Coherency } \gamma^2(f)=\left|\frac{S_{yx}(f)}{S_{xx}(f)}\right|^2\Big/\frac{S_{yy}(f)}{S_{xx}(f)} \tag{3.3.21}$$

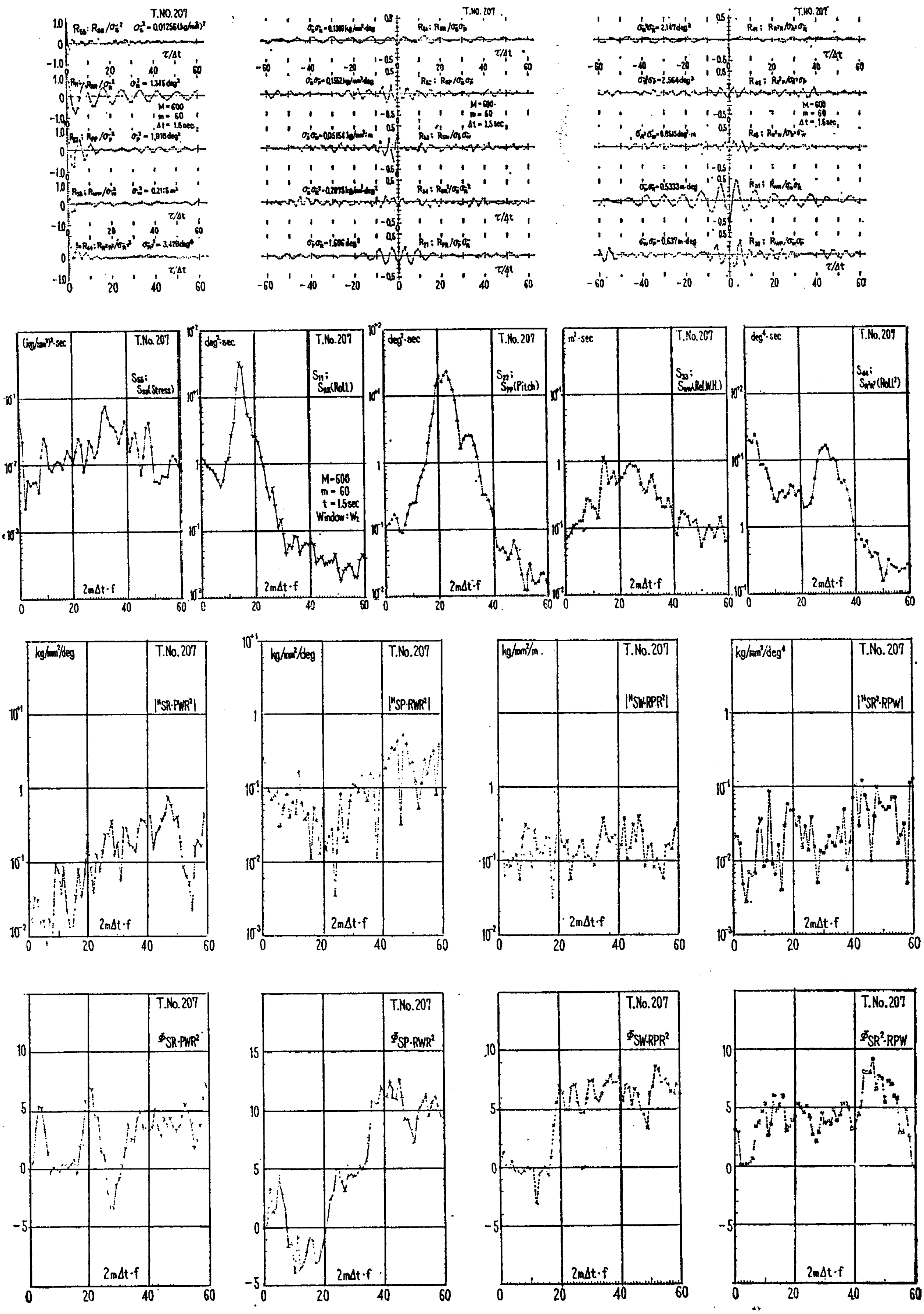

Fig.8 Example of Inputs Analysis
(a) Correlogram, Spectra, Amplitude Gain and Phase Shift

理想的に云つて入力はすべてガウス過程で，応答特性はすべて線型であり入力の測定にも出力の測定にも雑音が含まれない場合には，この二つの方法で求められた周波数応答は等しい筈である。従つてそのときには coherency は1になる。しかし実際にはこのような仮定はどれ一つ満足されない。いま入力は理想的なガウス過程で，出力に雑音 $n(t)$ が含まれることは避けられないが，入力の測定には雑音は含まれないものとする。ふつうこの雑音 $n(t)$ は入力 $x(t)$ とは相関がないと仮定される。
すなわち

$$E[x(t+\tau)\cdot n(t)]=0 \qquad (3.3.22)$$

すると，出力は真の出力 $y_0(t)$ にこの雑音 $n(t)$ が加わつたものと考えられ，

$$y(t)=y_0(t)+n(t) \qquad (3.3.23)$$

したがつて $y_0(t)$ と $n(t)$ とも相関はなく，

$$S_{yy}(f)=S_{y_0y_0}(f)+S_{nn}(f)=H^2(f)S_{xx}(f)+S_{nn}(f) \qquad (3.3.24)$$

$$S_{yx}(f)=S_{y_0x}(f)=H(f)\cdot S_{xx}(f) \qquad (3.3.25)$$

ゆえに

$$\text{Coherency } \hat{\gamma}^2(f)=H^2(f)\cdot S_{xx}(f)/\{H^2(f)\cdot S_{xx}(f)+S_{nn}(f)\}$$

$$=1-S_{nn}/\{H^2(f)\cdot S_{xx}(f)+S_{nn}(f)\}=1-\frac{S_{nn}(f)}{S_{yy}(f)}=1-\frac{\varepsilon}{S_{yy}\cdot(f)} \qquad (3.3.26)$$

これは coherency $\gamma^2(f)$ の値は常に1より小さく，$0\leqq\hat{\gamma}^2(f)\leqq1$ であつて，出力が雑音によつてどの程度汚されているかを表わす指標であることを示している。ここで雑音と云つてもこれは広義に解釈すべきであつて，入力に対する考えられた応答特性今の場合は線型な応答として説明できない部分は全部含まれている。従つて誤差 ε とも呼ばれる。coherency $\hat{\gamma}^2(f)$ がある入力に対する系の線型性の度合いを示すと云つてよいわけである。かつて著者は[6] この手法を用いる場合クロススペクトラム計算に使用するウィンドウの効果のためにクロスコレレーションの値が切下げられ，coherency が実際より小さく出ることになることを見出し，実用的見地からこれを取除く方策を提案したことも既に述べた所である。その方法は後に赤池および著者[3] によつて理論的に裏付けられている。

(3.3.26)式から

$$\text{Coherency } \hat{\gamma}^2{}_{gx}(f)=\frac{|H(f)|^2\cdot S_{xx}(f)}{S_{yy}(f)}=\frac{1}{S_{yy}(f)}\cdot S_{yx}(f)\cdot H^*(f) \qquad (3.3.27)$$

多入力解析でも同様に

$$\text{Coherency } \hat{\gamma}^2{}_{yx}(f)=\frac{[S_{yx}(f)]^2}{S_{xx}(f)\cdot S_{yy}(f)}=\frac{S_{yx}(f)\cdot S_{yx}{}^{*\prime}(f)}{S_{xx}(f)\cdot S_{yy}(f)}$$

$$=\frac{H(f)\cdot S_{xx}(f)S_{yx}{}^{*\prime}(f)}{S_{xx}(f)\cdot S_{yy}(f)}=\frac{1}{S_{yy}(f)}H(f)\cdot S_{yx}{}^{*\prime}(f) \qquad (3.3.28)$$

行列の形で表わすと

$$\text{Multiple Coherency } \hat{\gamma}^2{}_{yx}(f)\equiv\hat{\gamma}^2{}_{y,12\cdots k}(f)$$

$$=\frac{1}{S_{yy}(f)}[H_{y1}(f)\cdot H_{y2}(f)\cdots H_{yk}(f)]\begin{bmatrix}S_{y1}{}^*(f)\\ S_{y2}{}^*(f)\\ \vdots\\ S_{yk}{}^*(f)\end{bmatrix} \qquad (3\cdot3\cdot29)$$

Tick[7] の使用した条件付きスペクトラムの考え方を使えば partial coherency は次のような形で示される。

$$\text{Partial Coherency } \hat{\gamma}_{yj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)=\frac{|S_{yj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)|^2}{S_{jj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)\cdot S_{yy,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)} \qquad (3.3.30)$$

ここで，$S_{jj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)$，$S_{yy,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)$，$S_{yj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)$ は夫々 Tick[7]，赤池[9]又は Enochson[10] が定義した条件付きスペクトラムおよび条件付きクロススペクトラムである。

そのような定義と表現法とを用いると，j 番目の入力に対するこの出力の周波数応答特性は次のように表わせる。

$$H_j(f)=H_{yj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)=\frac{S_{yj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)}{S_{jj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)} \qquad (3.3.31)$$

単一入力の場合と同じく，赤池は信頼限界を次のように導いている。

$$Prob.\{|\hat{H}_j(f)-H_j(f)|\leq R_{j\cdot\delta}(f)\cdot|\hat{H}_j(f)|\}=\delta \tag{3.3.32}$$

ここで $R_{j\cdot\delta}(f)$ は相対誤差で

$$R_{j\cdot\delta}(f)=\left\{\frac{1}{N-k}\left(\frac{1}{\hat{\gamma}^2_{yj,12\cdots\hat{j}\cdots k}(f)}-1\right)\cdot F(2,2(N-k),\delta)\right\}^{1/2} \tag{3.3.33}$$

Nは $(M/n)\left[1\middle/\left\{2\sum_{n=-d}^{d}|a_n|^2\right\}\right.$ に最も近い整数で N, n は標本数，最大ラグ数，a_n はスペクトラムの平滑化に使用したウィンドウから定まる重み函数 $\{a_n\}$ である。ここではすでに 3.1 で述べたようにウィンドウ W_2 に対する値を使用すればよい。

多入力解析の計算プログラムは赤池の表現に従い，その指導の下に作成された。計算の大部分は，伊藤忠電算機サーヴィス(株)の電子計算機 CDC-3600 によつて行なわれたが，補充的ないくつかの計算は船舶技術研究所の電子計算機 NEAC 2260 G および FACOM-230-10 によつても行なわれた。計算の各ステップの一例は Fig.8 に示されている。

もともと穿孔テープに取つた記録のうち半数（Test No.214～219）では横揺れ，縦揺れおよびストレスの3チャンネルしか含んでいない。残り半数（*T.* No.204～209, 211, 220）が横揺れ，縦揺れ，ストレスおよび相対波高の4チャンネルを含んでいる。そこで先ず全体にわたつて比較ができるよう全航走について2入力(横揺れ，縦揺れ）解析を行ないついで入力に相対波高を加えて3入力解析を8航走について行なつた。

これらの結果の一例が Fig.9 および 10 に示してあるが，multiple coherency は相対波高を入力につけ加えることによつてより高い値を示している。又これらの結果を見ると，横揺れ，縦揺れ，および相対波高を入力と考えると，横ストレスはその線型な応答であると見なしたモデルはかなりよいものであることが認められる。ことにストレスのエネルギーがある程度以上高く表われている周波数範囲では coherency は 0.9 というような高い値に達している。そしてこのような範囲では縦揺れと相対波高との方が横揺れよりもより密接に横ストレスに影響していることはそれぞれ入力に対する partial coherency の値から推定することができる。ただしこの場合ある入力の寄与が大きく従つて partial coherency が高く出るのはその入力が大きなエネルギーを持つ周波数範囲である点には注意する必要がある。横揺れの寄与は横揺れのスペクトラムがピークを示す比較的低い周波数の所に大きく表われている。何れにせよ coherency は解

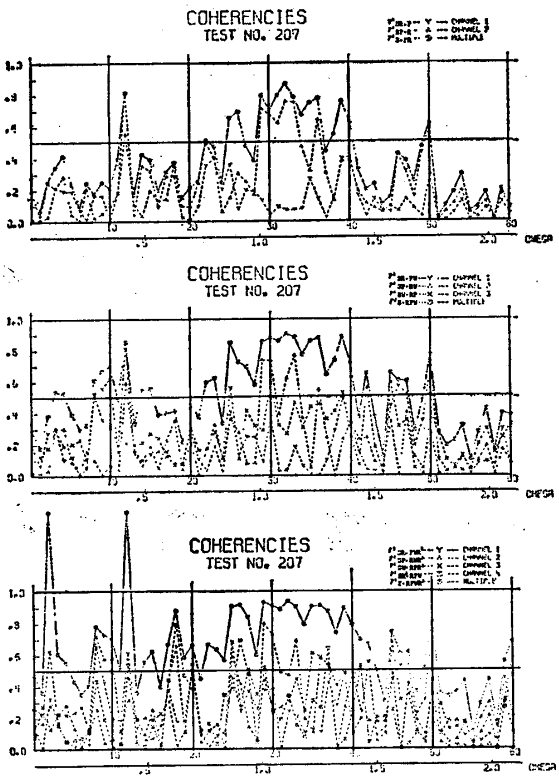

Fig.9　Examples of Multi and Partial Coherencies-(I) Stress-Roll, Pitch, Rel. W. H. & (Roll)²

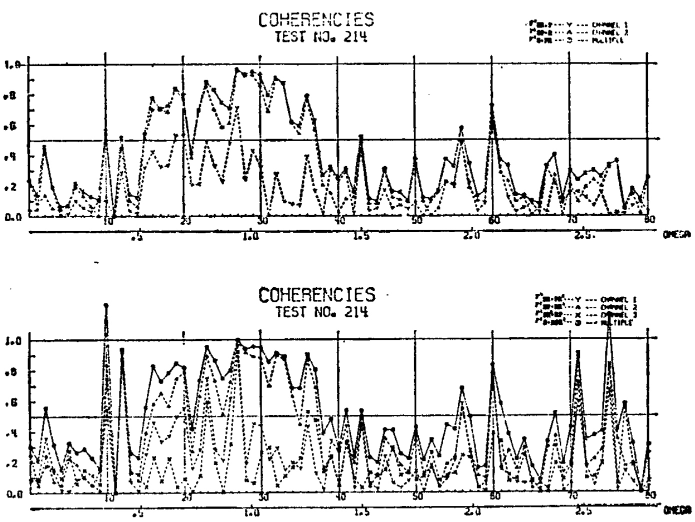

Fig.10　Examples of Multi and Partial Coherencies-(II) Stress-Roll, Pitch & (Roll)²

析を行なつた周波数の全範囲にわたつて一入力一出力の解析では未だわれわれが嘗て経験したことのない程な高い値を示していることは印象的である。

なお，coherency がさらに高い値を示す例として多少現在の話の筋からは外れるが，航走 No.211 の結果を Fig.11 に示した。これは今われわれが考えている横ストレスの代りに，相対波高を測定した断面の甲板縁で測定した上下加速度を出力と考えて，横揺れ縦揺れ相対波高と合わせて3つの入力に対する解析を行なつた結果である。Fig.12 に示した航走 No.220 の結果は入力の縦揺れをこの上下加速度と置換えたものであるが縦揺れの方がストレスに対する寄与が大きいことを示している。

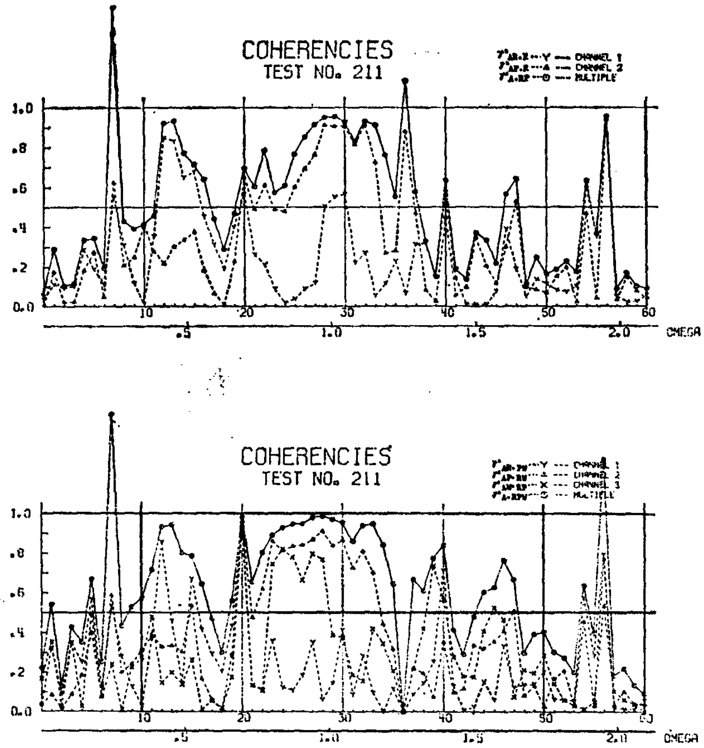

Fig.11 Examples of Multi and Partial Coherencies-(III) Vert. Acc.—Roll, Pitch & Rel. W.H.

さてここにおいて先の試みの継続として横揺れ二乗過程をさらに入力に追加して入力の数を再び一つ増して解析を行なつた。これは非線型応答の性質を調べるためのものであつて，すなわち縦揺れや相対波高，さらには線型な横揺れ等の入力が存在する条件の下で，横揺れ二乗過程の応答がどの位あるかを調べることになる。結果の一例が Fig.9 および 10 に示されているが，これによつて multiple coherency も向上し二乗過程の partial coherency と周波数0の附近および横揺れのスペクトラムがピークを示す周波数の二倍の周波数の近傍では高い値を示していて，横揺二乗過程も一つの入力と考えてよいと考えられる。ただし他の入力の partial coherency の値や，他の入力をも加味したときの multiple coherency が遙かに高い値を示す事実を考えると，他の入力の寄与も十分に考えなくてはいけないことも同時に明らかとなる。このことは，非線型応答特性を見つけ出すためにも，他の入力，または線型な応答も存在するという条件の下で解析を行なうという多入力解析が必要であることを明らかにしていると云つてよい。

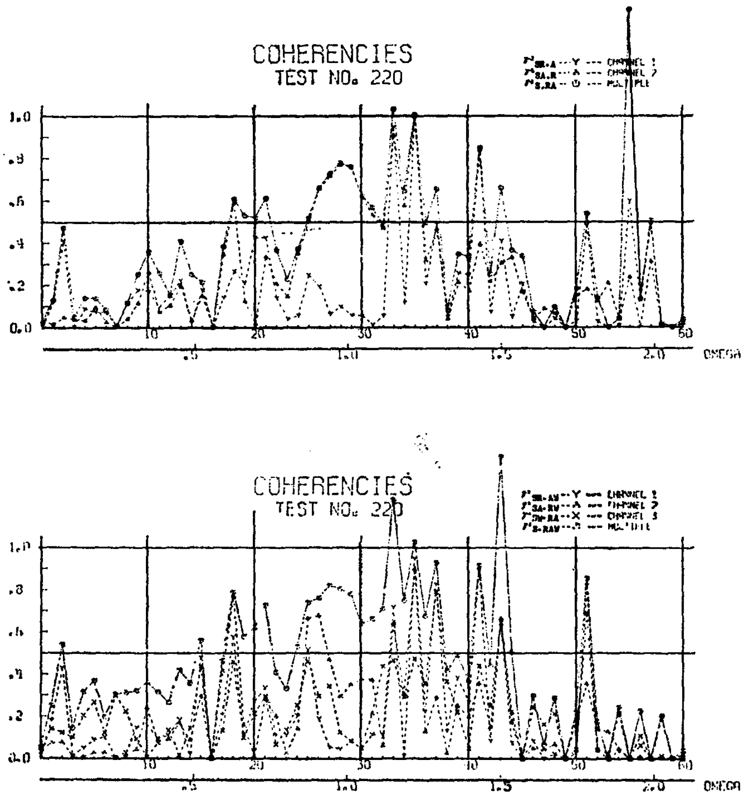

Fig.12 Examples of Multi and Partial Coherencies-(IV) Stress-Roll, Vert. Acc. & Rel. W.H.

すべての入力に対する横ストレスの応答特性を周波数振幅特性および位相特性の形で全航走について求めた。そのうち一航走についての例のみを Fig.8 に示した。振幅特性は条件付きの形式で表わし

た。すなわち $H_{SR\cdot PWR^2}$ というのは，縦揺れ（P）も相対波高（W）も，横揺れ二乗過程（R^2）も存在するという条件の下で，ストレス（S）の振幅の横揺れ（R）の振幅に対するゲインを示すということを意味している。

例えば航走 No.207 に対しては単一入力の解析をも含めると，Table. 2 のような解析を行つたことになる。ここに示したチャンネル番号はコレログラムス，ペクトラムおよび coherency 等の表現にも標識として使用されている。

Table 2　List of Analysis tried for Run No. 207

No. of Inputs	Inputs Channel No. 1	2	3	4	Output (Channel No.)	Resut Shown in
1	Roll				Rel. W. Height (2)	Fig. 3
1	Rel. W. H.				Stress (2)	Fig. 3
1	Roll				Stress (2)	Fig. 3
1	(Roll)^2				Stress (2)	Fig. 4
1	filtered (Roll)^2				Stress (2)	Fig. 4
2	Roll	Pitch			Stress (3)	Fig. 9
3	Roll	Pitch	Rel. W. H.		Stress (4)	Fig. 9
4	Roll	Pitch	Rel. W. H.	(Roll)^2	Stress (4)	Fig. 9

以上述べて来た所から多入力解析の必要性及び有効性が明らかである。これは次のような種々の云い方によつて示されよう。

1)　ある力学系の応答のモデルを多くの入力による線型な応答出力であると想定した場合，多入力解析を行なつて multiple coherency を計算すると，このモデルの適合の良否を判断するよい手懸りとなる。云いかえれば，ある系の線型性の度合いを明らかにするためには，その系に影響を与える可能性のあるすべての入力を考えに入れて調べる必要がある。そのためには多入力解析技術は極めて有用である。

2)　解析の際考慮に入れる入力の数を増すにつれて，もしその入力が真に応答出力に係りがあるものであれば multiple coherency の値は増大する。その増大の度合いはその入力の影響の度合いによつて変るし，その程度は又その入力の partial coherency にも表われる。

3)　もし他にもその応答出力に影響する入力がいくつもある場合，ある特定な入力の応答出力に対する寄与の程度を明らかにするためには，現在考えている入力とも密接な相関を持ち，応答出力とも関連している他の入力の効果を消去して，coherency が見掛け上低く出たり，高く出たりすることを防がなければならない。partial coherency すなわち多入力解析によつて，関連しているすべての入力が考慮されているという条件付きで求めた特定入力の出力との coherency を調べなければならない。

4)　ある系の非線型応答特性を見出すためには，非線型系の応答の中でもある程度の貢献をしている線型の効果を引去つて考えることが有効である。このような場合，赤池[4]によつて提案された mixed spectrum の手法を多入力解析の手法と組合せて使うことがよいのではないかと考えられる。

4　考察および将来の課題

波浪中の船体構造部材に生じた横方向ストレスの解析の経過を検討した。そうすることによつて非線型応答特性を見出す様々な試行錯誤の結価の評果をも行つた。

ある入力に対する応答出力の周波数応答特性を求めようとする場合，ふつうの環境の下ではその応答に相関のある他の入力が共存するのが常であるから，一般に多入力解析を行なうことが必要であることが明らかとなつた。多入力解析は又ある入力に対する非線型応答特性を見出そうとする場合にも，それを掩つてしまつている他の入力や，今考えている入力の線型効果を取去るのに有効であることも明らかになつた。

多入力解析の手法は今後船舶の波浪中応答の解析に効果を挙げることが期待される。この方法は例えば波浪中推進器軸に加わる推力の増加に最も強く影響するのは，横揺れ，縦揺れ，上下揺れ，船首揺れ，左右揺れ等の船の運動のうちどの運動であろうかというように，一つの応答に影響する入力のうちで最も代表的な入力を探すのにも有効である。また波浪中の推力やトルクの増加の非線型な程度やその特性を求めるのにも役立ち，ひいては抵抗増加を少くするのにも寄与するであろう。今まで述べて来た例では横ストレスの根源的な入力である波浪の計測値がないために，二次的な横揺れ，縦揺れ，相対波高等を多入力と考えて来た。波浪の計測が可能になつた暁には一入力で足りるのではないかと考えられるかも知れない。然しながら，たとえ出会波浪計によつて船と共に動く座標上の一点で波高が測れたとしても，一点で測つた波高だけでは短波頂不規則な波浪の影響すべてを代表させることはできない。波浪のもつと別の性質，一点で測つた波高との相関が1でない他の性質が応答に寄与する可能性が十分にある。その場合にはもしこのような波浪の性質を直接測定できぬならばやはり一点で測つた

波高以外の波の物理的性質による効果をも受けている他の応答，例えば動揺等をも入力として補なつて用い，多入力解析を行なわなければならない場合もあるのではないかと思われる。

バイスペクトラム，クロスバイスペクトラム，あるいは mixed spectrum のような一般的な高次のスペクトラムについても更に検討し実用性を確認する努力を積重ねる必要がある。又このように次第に計算が複雑になつて来ると，たとえ電子計算機を使用してもかなりの計算量が必要となつて来る。そこでこの１～２年唱えられ始めている FFT[20] (Fast Frourier Transfomation) の実用性等についても検討する必要があろう。

この稿を終るに当つて有益な討論や助言を通し，又多入力解析のプログラムの開発等を通して著者にこの研究を可能ならしめられた統計数理研究所　赤池弘次博士に深甚の謝意を表するものである。また船舶技術研究所内における電子計算機による計算の労を取られた運動性能部　安藤定雄技官に感謝するものである。

引 用 文 献

1) Blackman, R. B. and Tukey, J. W. : "The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering" Part I and II, Bell System Tech. Jour., Vol. XXXVI, No.1 Jan. 1958 and No.2, March, 1958 または Dover Publications.
2) Goodman, N. R. : "On the join estimation of the spectra, cospectrum and quadrature spectrum of a two dimensional stationary Gaussian processes", Scientific Paper No.10 Engineering Statistics Laboratory, New York Univ., March, 1957
3) Akaike, H. and Yamanouchi, Y. : "On the statistical estimation of frequency response function", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. XIV, No.1, 1962
4) 山内保文：波浪中船の応答特性の統計的解析に関する二,三の考察――インパルス応答の推定と非線型要素のスペクトラム計算への影響――造船協会論文集第 117 巻，昭 40. 6
5) Akaike, H., Yamanouehi, Y., Kawashima, R. and others : "Studies on the statistical estimation of frequency response function", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Supplemant III, 1964
6) 山内保文：船の波浪中動揺応答の解析法について（その２），造船協会論文集第 110 巻，昭 36. 12
7) Tick, L. J, : "Conditional Spectra, Linear Systems and Coherency", Proc. of the Symposium on Time Series Analysis, John Wiley & Sons, New York, London, 1963, pp. 197—203
8) Goodman, N. R. : "Spectral Analysis of Multiple time Series", Proc. of the Symposium on Time Series Analysis, John Wiley & Sons, New York, London, 1963, pp. 260—266
9) Akaike, H : "On the Statistical Estimation of the Frequency Response Function on a System Having Multipe Input". Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. 17, No.2, 1965
10) Enochson, L. D. : "Frequency Response Functions and Coherency Functions for Multiple Input Linear System", Measurement Analysis Corporation, National Aeronautic and Space Administration NASA CR-32
11) Tick, L. J. : "A non-linear random model of gravity waves-I", Scientific Paper No.11, Statistics Laboratory, Tech. Report No.10 College of Engineering, Research Division, New York Univ., Oct. 1958
12) Tick, L. J. : "The estimation of Transfer Function of quadratic systems", Technometrics Vol. 3, Nov. 1961
13) Hasselmann, K., Munk, W. and MacDonald, G. : "Bispectra of Ocean Waves", Proc. of the Symposium on Time Series Analysis, John Wiley & Sons, New York, London, 1963, pp 125～139
14) Akaike, H. : "Note on Higher Order Spectra", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. 18, No.1, 1966
15) Hasselmann, K. : "On Nonlinear Ship Motions in Irregular Waves", Journal of Ship Research, Vol. 10, No.1, March 1966, The Soc. of Nav. Arch. & Mar. Engineers,
16) 高石敬史，安藤定雄，門井弘行："ニューヨーク定期貨物船山隆丸による北太平洋航海性能実船試験について（第１報)"，船舶技術研究所報告第２巻第２号，昭 40. 3
17) 山内保文，高石敬史，菅井和夫，安藤定雄：船の波浪中動揺応答の解析法について（その４)，造船協会論文集第 119 号，昭 41. 6
18) "船舶の耐航性に関する実船試験" 第 63 研究部会，日本造船研究協会報告第 65 号，昭 43. 6
19) 山内保文：船の波浪中応答の解析法について（その１)，造船協会論文集第 109 号，昭 36. 6
20) Special Issue on Fast Fourier Transform and its Application to Digital Filtering and Spectral Analysis : IEEE Transactions on AU-15, No.2, June 1967