(昭和 44 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

平板の幾何学的非線形問題の一解法 (I)

正員 川 井 忠 彦* 正員 大 坪 英 臣**

A Method of Solution of the Geometrically Nonlinear Problems of Elastic Plates (I)

By Tadahiko Kawai, *Member* Hideomi Otsubo, *Member*

Summary

Since the famous paper on the postbuckling behavior of an elastic rectangular plate was published by von Kármán, much work has been done on the various geometrically nonlinear problems such as large deflection, postbuckling, snap-through and dynamic stability of elastic plates due to lateral as well as inplane loadings. Most of these studies are based on the Energy method proposed by E. Trefftz, K. Marguerre and others in which solution can be found by the stationary condition of the total potential energy of a given plate whose deflection is assumed in the form of known functional series with unknown coefficients. Numerical calculation in this method, however, is so laborious that problems of simple plate shapes, boundary conditions as well as loading conditions were only considered before high-speed digital computers became available.

A practical method of solution on the general nonlinear problem of elastic plates with arbitrary shape, boundary and loading conditions is proposed in this paper by extending the method proposed by K. Marguerre, E. Trefftz and others.

Displacement functions used are constructed by combined use of the finite element method and Rayleigh-Ritz's procedure.

1 緒　　言

平板の座屈後の挙動問題，あるいは平板が横荷重をうけて大きく撓む問題，あるいは初期撓みを有する平板の飛び移り問題等を調べるには，有限変形理論によらなければならない。Th. v. Kármán が圧縮荷重を受ける矩形板の座屈後の挙動について有名な論文を発表して以来，平板の大撓み問題について数多くの優れた論文が発表され，平板の幾何学的非線形問題に関する研究が著しく進展を遂げたことは周知の通りである。しかしながら，これまでの研究はほとんどが，解析し易い形状の平板（例えば矩形板など）で簡単な荷重条件と境界条件下の問題に集中されていたといつて過言ではなく，また従来この問題は解析が複雑なため，静変形，熱応力，座屈，飛移り，非線形振動と個々別々に取扱われて来ており，統一的な理論的考察はなされていないようである。

そこで著者等は，K. Marguerre, E. Trefftz その他の提案した方法を拡張し，有限要素法による数値解析法を用いることにより形状，荷重分布，境界条件が任意に与えられる平板の各種大撓み問題の実用的解析法を提案し，本報告においてはその諸問題に対する解析法の一般的な説明をし，次報以下に個々の問題に対する適用結果を報告する次第である。

2 記号及びエネルギに関する記法

A 記　　号

とくに説明のないものは，一般の工学的記号法に従う。

V：板の体積，論文中の三重積分はこのVに関して行なわれる。

S：板の中央面，論文中の二重積分はこのSに関して行なわれる。

* 東京大学生産技術研究所
** 東京大学大学院工学系

C：平板の周辺境界の板厚中央線　$C=C_1+C_2$

C_1：力学的境界の中央線

C_2：幾何学的境界の中央線

h：板厚

E：ヤング率

ν：ポアソン比

D：曲げ剛性　$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

u, v, w：x, y, z 方向の変位

$w^{(0)}$：初期撓み

$e_{xx}, e_{yy}, 2e_{xy}$：平板の歪成分

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \cdots$$

$e_{xx0}, e_{yy0}, 2e_{xy0}$：中央面の歪成分

$$e_{xx0}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \cdots$$

$\varepsilon^{(0)}, \varepsilon_y^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)}$：初期歪

N_x, N_y, N_{xy}：面内力成分

$F(x,y)$：Airy の応力関数

$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$：$C_1$ 上に加わる x, y, z 方向の外荷重

q：S 上に加わる分布横荷重

$\bar{M}_n, \bar{M}_{ns}$：C_1 上に加わる曲げ及び捩りモーメント

B　エネルギに関する記法

$$E(\varepsilon_x)=\iint_S\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left[(\varepsilon_x+\varepsilon_y)^2+2(1-\nu)\left(\frac{\gamma_{xy}^2}{4}-\varepsilon_x\varepsilon_y\right)\right]dxdy$$

$$E(\varepsilon_x^1;\varepsilon_x^2)=\iint_S\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left[(\varepsilon_x^1+\varepsilon_y^1)(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2)+2(1-\nu)\left(\frac{\gamma_{xy}^1\gamma_{xy}^2}{4}-\frac{1}{2}\varepsilon_x^1\varepsilon_y^2-\frac{1}{2}\varepsilon_x^2\varepsilon_y^1\right)\right]dxdy$$

$$E(N_x;\varepsilon_x)=\iint_S\frac{1}{2}(N_x\varepsilon_x+N_y\varepsilon_y+N_{xy}\gamma_{xy})\,dxdy$$

$$E_b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=\iint_S\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\nu)\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\right]dxdy$$

$$V_0(X;u)=\int_C(Xu+Yv)\,ds$$

$$V_1(X;u)=\int_{C1}(Xu+Yv)\,ds$$

$$V_2(X;u)=\int_{C2}(Xu+Yv)\,ds$$

$$V_b(w)=\iint_S qw\,dxdy+\int_{C1}\bar{Z}w\,ds-\int_{C1}\left[\bar{M}n\frac{\partial w}{\partial n}+\bar{M}ns\frac{\partial w}{\partial s}\right]ds$$

U：板の歪エネルギ　$U=U_m+U_0$

$U_m=E(e_{xx0})$：中央面の歪による歪エネルギ　$U_m=U_p+2U_{pw}+U_w$

$U_b=E_b\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$：曲げの歪エネルギ

$U_p=E\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$：微小変形理論における面内歪エネルギ

$$U_{pw}=E\left(\frac{\partial u}{\partial x};\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$U_w=E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)$$

T：運動エネルギ　$T=\displaystyle\iint_S\frac{1}{2}\frac{\gamma h}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2dxdy$　γ　板の密度，g　重力加速度

3　解析法の理論

3.1　ポテンシャルエネルギ停留原理

ポテンシャルエネルギ停留原理に従つて解析を進める。

(a)　静変形問題

$$\delta(U-W)=0 \qquad (1)$$

(b)　動的変形問題

$$\delta(U-T-W)=0 \qquad (2)$$

ここにUは平板の有する歪エネルギ，Tは運動エネルギ，Wは外荷重のなす仕事を表わす。

歪エネルギUは平板内の歪成分を e_{xx}, e_{yy}, $2e_{xy}$ とすると,

$$U=\iiint_V \frac{E}{2(1-\nu^2)}[(e_{xx}+e_{yy})^2+2(1-\nu)(e_{xy}{}^2-e_{xx}e_{yy})]\,dxdydz \tag{3}$$

ただし

$$e_{xx}=e_{xx0}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad e_{yy}=e_{yy0}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad 2e_{xy}=2e_{xy0}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{4}$$

さらに

$$e_{xx0}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad e_{yy0}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\quad 2e_{xy0}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{5}$$

ここに u, v, w は板の中央面上の x, y, z 方向の変位, e_{xx0}, e_{yy0}, $2e_{xy0}$ は中央面上の歪成分を表わす。

ここで前述のエネルギに関する記法Eを使うと, Uは次のように書き表わすことができる。

$$\begin{aligned}U&=\iint_S \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}[(e_{xx0}+e_{yy0})^2+2(1-\nu)(e_{xy0}{}^2-e_{xx0}e_{yy0})]\,dxdy\\&\quad+\iint_S\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{dx^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\nu)\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\right]dxdy\\&=E(e_{xx0})+E_b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

(5)式の歪-変位の関係式を使うと $E(e_{xx0})$ は変位で書き表すことができて,

$$E(e_{xx0})=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,;\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \tag{7}$$

ここで表示を簡単にするために次の置き替えをする。

$$\begin{aligned}&U_m=E(e_{xx0}),\quad U_p=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad U_{pw}=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,;\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\\&U_w=E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right),\quad U_b=E_b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

したがつて(6),(7)式は次のように表示できる。

$$U=U_m+U_b \tag{9}$$

$$U_m=U_p+2U_{pw}+U_w \tag{10}$$

U_m は平板の膜応力状態の歪エネルギ, U_b は曲げ応力状態に対する歪エネルギを表わす。また U_p は微小変形の場合の面内変位による歪エネルギを表わすことは周知の通りである。

動的変形問題における運動エネルギTは次式で与えられる。

$$T=\iint_S\frac{1}{2}\frac{\gamma h}{g}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy \tag{11}$$

さて外力の成分としては, 境界周辺上に働く面内荷重 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ および分布横荷重q, 剪断力 $\bar{Z}$, モーメント $\bar{M}_n$, M_{ns} を考えるとすれば, 外荷重のなす仕事Wは

$$W=W_p+W_b$$

ただし

$$W_p=\int_{c1}(\bar{X}u+\bar{Y}v)\,ds,\qquad W_b=\iint_S qw\,dxdy+\int_{c1}\bar{Z}w\,ds-\int_{c1}\left[\bar{M}_n\frac{\partial w}{\partial n}+\bar{M}_{ns}\frac{\partial w}{\partial s}\right]ds \tag{12}$$

さらに 2. Bの記法 $V_1(\ )$, $V_b(\ )$ を用いると

$$W_p=V_1(\bar{X}\,;\,u),\quad W_b=V_b(w) \tag{13}$$

ここに平板の境界線Cは C_1 と C_2 の部分とからなるとし, C_1 上では外荷重が, C_2 上では強制変位 $\bar{u}$, $\bar{v}$ が与えられているものとする。以上に与えるような基礎式(1)又は(2)式を満足する変位(u, v, w)を決定するのが我々に課せられた問題である。

3.2 静変形問題に対する変分方程式

簡単のために先ず静的変形問題を考えよう。変分方程式(1)は次式のごとく与えられる。

$$\delta(U_m+U_b-W_p-W_b)=0\quad (u,\ v,\ w) \tag{14}$$

ここに( )内は変分をとるべき変数を示す。(14)式の変分方程式を満足する変位 u, v, w の解を一遍に求.

めることは困難である。そこで我々は大撓み問題の解析に先立ち，つぎの線形解を求める。

3.3 微小変形の範囲における線形変位解

微小変形の範囲では，平面変位 u, v と撓み w は互に独立であると考えることができ，各々次のように別個に求めることができる。

3.3.1 平面応力場の線形解　微小変形状態にのみ関係するエネルギ項をとると，(13) 式から次の変分方程式が得られ，これを解くことにより，面内変位の線形解 (u^0, v^0) が計算できる。

$$\delta(U_p-W_p)=0 \quad (u,\ v) \tag{15}$$

これは普通の平面応力場問題であり，二次元問題解析用の標準的な有限要素法のプログラムにより解析することができる。

3.3.2 平板の曲げ問題の線形解　3.3.1 と同様に，平板の曲げ問題の線形解 w^0 は次のように得られる。

$$\delta(U_b-W_b)=0 \quad (w) \tag{16}$$

3.4 平板の大撓み問題における付加面内変位 u^*, v^*

前節においては平板が微小変形を起す場合の面内及び面外変位解を求めた。平板に大撓みが生ずる場合には，u, v と w は独立でなくなり，撓み w が生ずることによつて面内変位 u, v はこれによつて影響をうける。この w による面内付加変位を u^*, v^* とすると

$$u=u^0+u^*,\quad v=v^0+v^* \tag{17}$$

が全体の面内変位を表わす。

まず面内の平衡方程式を満す面内変位 u, v と w の関係を求めることにする。

$$\delta(U_m-W_p)=0 \quad (u,\ v) \tag{18}$$

書き直すと

$$\delta(U_p{}^{00}+2\,U_p{}^{0*}+2\,U_{pw}{}^0+U_m{}^*-W_p{}^0-W_p{}^*)=0 \quad (u,\ v) \tag{19}$$

ただし

$$U_p{}^{00}=E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\right),\quad U_p{}^{0*}=E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\,;\,\frac{\partial u^*}{\partial x}\right),\quad U_{pw}{}^0=E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\,;\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$U_m{}^*=E\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right),\quad W_p{}^0=V_1(\bar{X}\,;\,u^0),\quad W_p{}^*=V_1(\bar{X}\,;\,u^*) \tag{20}$$

既に線形平面解 (u^0, v^0) は (15) 式により平衡条件，境界条件を満すように得られている。従つて (19) 式は次のように書き直せる。

$$\delta(U_m{}^*+2\,U_p{}^{0*}-W_p{}^*)=0 \quad (u^*,\ v^*) \tag{21}$$

ここで

$$2\,U_p{}^{0*}-W_p{}^*=2\,E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\,;\,\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)-V_1(\bar{X}\,;\,u^*)=V_2(X^0\,;\,\bar{u}^*) \tag{22}$$

であるので (21) 式は次のようになる。

$$\delta U_m{}^*=0 \quad (u^*,\ v^*) \tag{23}$$

さらに $U_m{}^*$ は次のように書ける。

$$U_m{}^*=E\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}-\varepsilon_x{}^{(0)}\right)=\iint\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left[\left\{\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}-\varepsilon_x{}^{(0)}\right)+\left(\frac{\partial v^*}{\partial y}-\varepsilon_y{}^{(0)}\right)\right\}^2\right.$$
$$\left.+2(1-\nu)\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}-\gamma_{xy}{}^{(0)}\right)^2-\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}-\varepsilon_x{}^{(0)}\right)\left(\frac{\partial v^*}{\partial y}-\varepsilon_y{}^{(0)}\right)\right\}\right]dxdy \tag{24}$$

ここで

$$\varepsilon_x{}^{(0)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad \varepsilon_y{}^{(0)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\quad \gamma_{xy}{}^{(0)}=-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{25}$$

従つて (23) 式は (25) 式で与えられる初期歪分布によつて生ずる線形平面応力場を決定する方程式にほかならない。ただし境界条件は大撓みになつても微小変形のときの境界条件は変化しないと考えられるので

$$\bar{X}^*=0,\quad \bar{Y}^*=0 \quad \text{on} \quad C_1 \qquad \bar{u}^*=0,\quad \bar{v}^*=0 \ \text{on} \ C_2 \tag{26}$$

ここでよく使用される Airy の応力関数 F 表示の微分方程式との相関を考えてみると，中央面上の歪 e_{xx0}, e_{yy0}, $2\,e_{xy0}$ と変位 u. v, w の関係式 (5) より u, v を消去すると次の適合条件が得られる。

$$\frac{\partial^2 e_{xx0}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy0}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 2\,e_{xy0}}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{27}$$

これを Airy の応力関数で書き直すと

$$\Delta\Delta F=Eh\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \tag{28}$$

本論文が従つているポテンシャルエネルギ停留原理においては面内平衡条件式が初期歪問題となることが，本節で示されたが，(28) 式はこの停留原理と対の関係にあるコンプリメンタリエネルギ停留原理から得られる。

3.5 撓み関数 $w(x, y)$ の級数展開

ここで撓み w が未定係数を含んだ形で級数展開できたとする。

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n w_n(x,y) \tag{29}$$

ここで c_n は未定係数である。

このとき (25) 式の初期歪分布式は次のように表わせる。

$$\varepsilon_x{}^{(0)}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_i c_j\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_j}{\partial x}\right),\quad \varepsilon_y{}^{(0)}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_i c_j\left(\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w_j}{\partial y}\right)$$

$$\gamma_{xy}{}^{(0)}=-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_i c_j\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_j}{\partial y}\right) \tag{30}$$

そこで

$$\varepsilon_{xij}{}^{(0)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_j}{\partial x}\right),\quad \varepsilon_{yij}{}^{(0)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w_j}{\partial y}\right),\quad \gamma_{xyij}{}^{(0)}=-\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_j}{\partial y}\right) \tag{31}$$

と書き，初期歪分布 ($\varepsilon_{xij}{}^{(0)}$, $\varepsilon_{yij}{}^{(0)}$, $\gamma_{xyij}{}^{(0)}$) に対する面内変位の解を $u_{ij}(x, y)$, $v_{ij}(x, y)$ とすると (23) 式の解は

$$u^*(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_i c_j u_{ij}(x,y),\quad v^*(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_i c_j v_{ij}(x,y) \tag{32}$$

と決定される。

3.6 未定係数 c_n の決定

さて，以上の方法により平板の変位解 u, v, w が次式のごとく与えられた。

$$u(x,y)=u^0(x,y)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_i c_j u_{ij}(x,y)$$

$$v(x,y)=v^0(x,y)+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_i c_j v_{ij}(x,y)$$

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i w_i(x,y) \tag{33}$$

ここで u^0, v^0 は平板の微小変形の範囲内における面内及び面外変位の線形解である。

ここで w_n の選び方は種々あるが，少ない項数で実際の撓み形が十分近似できるように選ぶ必要がある。少くとも w に関しての幾何学的境界条件を満すべきである。さらに，たとえば初項の選び方についても問題に応じて静変形問題においては線形曲げ問題の解 w^0 を，安定問題を含む場合には座屈モード，振動問題に関しては基本振動モードを選べば初項のみでもかなり精度のよい解が得られることが推察される。さらに初項以下の項も一般に安定問題には座屈固有数列，その他には振動固有関数列で展開することが望ましい。

さて (33) 式を (14) 式に代入すれば，次式より c_n に関する非線形連立3次方程式が得られるから，それを数値的に解くことによつて c_n が決定し，(33) 式に代入すれば変位 u, v, w が近似的に決定されることになる。

$$\frac{\partial}{\partial c_n}(U_m+U_b-W_p-W_b)=0\quad (n=1,2,\cdots\cdots) \tag{34}$$

3.7 初期歪分布あるいは初期撓みを有する平板の歪エネルギ

既に平板そのものに温度分布あるいは初期歪分布が存在するとき，又平板に初期撓み等が存在する時は，以下のように歪エネルギを考えればよい。

3.7.1 初期歪分布が存在する場合 初期歪が存在しない時の歪成分を e_{xx}, e_{yy}, $2\,e_{xy}$ とすると，初期歪分布が存在するときの歪成分は次のようになる。

$$e_{xx}'=e_{xx}-\varepsilon_x^{(0)},\quad e_{yy}'=e_{yy}-\varepsilon_y^{(0)},\quad 2\,e_{xy}'=2\,e_{xy}-\gamma_{xy}^{(0)} \tag{35}$$

従つて今までの歪エネルギUの代りに次の歪エネルギを考えればよい。

$$U'=U-2\,U_t+U_{tt} \tag{36}$$

ただし

$$U=\iiint\frac{E}{2(1-\nu^2)}[(e_{xx}+e_{yy})^2+2(1-\nu)(e_{xy}^2-e_{xx}e_{yy})]\,dxdydz$$

$$U_t=\iiint\frac{E}{2(1-\nu)^2}\Big[(e_{xx}+e_{yy})(\varepsilon_x^{(0)}+\varepsilon_y^{(0)})+2(1-\nu)\frac{e_{xy}\gamma_{yy}^{(0)}}{2}-\frac{1}{2}e_{xx}\varepsilon_y^{(0)}-\frac{1}{2}e_{yy}\varepsilon_x^{(0)}\Big]dxdydz$$

$$U_{tt}=\iiint\frac{E}{2(1-\nu^2)}\Big[(\varepsilon_x^{(0)}+\varepsilon_y^{(0)})^2+2(1-\nu)\Big(\frac{\gamma_{xy}^{(0)2}}{4}-\varepsilon_x^{(0)}\varepsilon_y^{(0)}\Big)\Big]dxdydz \tag{37}$$

ここで $\varepsilon_x^{(0)}$, $\varepsilon_y^{(0)}$, $\gamma_{xy}^{(0)}$ は初期歪分布であり, x, y のみならず z の関数である一般の場合を考えている。

なお U_{tt} は既知関数であるので変分に際しては最初から考慮する必要はない。U_t をさらに書き直すと,

$$U_t=U_{tp}-U_{tb} \tag{38}$$

ここで

$$U_{tp}=E(N_x^{(0)}\,;\,e_{xx0})=E\Big(N_x^{(0)}\,;\,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big)$$

$$U_{tb}=E\Big(M_x^{(0)}\,;\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) \tag{39}$$

ただし

$$N_x^{(0)}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x^{(0)}+\nu\varepsilon_y^{(0)})\,dz,\quad N_y^{(0)}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x^{(0)}+\varepsilon_y^{(0)})\,dz$$

$$N_{xy}^{(0)}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}^{(0)}\,dz$$

$$M_x^{(0)}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{Ez}{1-\nu^2}(\varepsilon_x^{(0)}+\nu\varepsilon_y^{(0)})\,dz,\quad M_y^{(0)}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{Ez}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x^{(0)}+\varepsilon_y^{(0)})\,dz$$

$$M_{xy}^{(0)}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{Ez}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}^{(0)}\,dz \tag{40}$$

以上の結果を用いると変分方程式 (14) は次式のごとく与えられる。

$$\delta(U_m+U_b-2\,U_{tp}+2\,U_{tb}-W_p-W_b)=0\quad(u,\ v,\ w) \tag{41}$$

3.7.2 初期撓みの存在する場合 初期撓み $w^{(0)}$ の存在する場合の中央面の歪 e_{xx0}', e_{yy0}' $2\,e_{xy0}'$ は初期撓みの存在しない歪を e_{xx0}, e_{yy0}, $2\,e_{xy0}$ とすれば

$$e_{xx0}'=e_{xx0}+\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x},\quad e_{yy0}'=e_{yy0}+\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y},\quad 2\,e_{xy0}'=2\,e_{xy0}+\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{42}$$

したがつて膜力に関する歪エネルギ U_m' は今までの U_m と異なり

$$U_m'=U_m+2\,U_d+U_{dd} \tag{43}$$

ここで

$$U_d=E\Big(e_{xx0}\,;\,\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big)=E\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\,;\,\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big)$$

$$U_{dd}=E\Big(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big) \tag{44}$$

したがつて変分方程式は

$$\delta(U_m'+U_b-W_p-W_b)=0\quad(u,\ v,\ w) \tag{45}$$

あるいは

$$\delta(U_m+2\,U_d+U_{dd}+U_b-W_p-W_b)=0\quad(u,\ v,\ w) \tag{46}$$

u, v に関しての変分式も同様に次のようになる。

$$\delta(U_m+2\,U_d-W_p)=0\quad(u,\ v) \tag{47}$$

この平面解は初期撓みが存在しないとした時の解 $u=u^0+u^*$, $v=v^0+v^*$ と次に示される初期撓みの影響項 u_d,

v_d の和として得られることを示す。

$$u_d=\sum_{i=1}^{\infty}c_i u_{di},\quad v_d=\sum_{i=1}^{\infty}c_i v_{di} \tag{48}$$

ただし u_{di}, v_{di} は次の初期歪分布を有する平面解である。

$$\varepsilon_{xi}{}^{(0)}=-\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\right),\quad \varepsilon_{yi}{}^{(0)}=-\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w_i}{\partial y}\right)$$

$$\gamma_{xyi}{}^{(0)}=-\left\{\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w_i}{\partial y}+\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y}\frac{\partial w_i}{\partial x}\right\} \tag{49}$$

ただし境界条件は u^*, v^* の境界条件と同様に

$$X_d=0,\quad Y_d=0 \text{ on } C_1,\quad u_d=0,\quad v_d=0 \text{ on } C_2 \tag{50}$$

したがつて面内平衡条件を満す変位は

$$u=u^0+u^*+u_d$$
$$v=v^0+v^*+v_d \tag{51}$$

となる。

3.8 平板の座屈後の問題の基礎変分式

Kármán の研究以来平板の大撓み問題の大きな関心事であつた平板の座屈後の問題を考えてみよう。平板の座屈後の問題を論じるときも，大撓み静変形問題の (14) 式が使える。

$$\delta(U_m+U_b-W_p)=0 \quad (u,\ v,\ w) \tag{52}$$

一方平板が座屈を起す瞬間まで持続してきた純粋圧縮状態の基礎式は次に示される。

$$\delta(U_p-W_p)=0 \quad (u,\ v) \tag{53}$$

したがつて座屈瞬間の変形状態 (u_0, v_0, w_0) は

$$\delta(U_{p0}-W_{p0})=0 \quad (u_0,\ v_0) \tag{54}$$

から決定された u_0, v_0 を (14) 式に代入して

$$\delta(2\,U_{pw0}+U_{w0}+U_{b0})=0 \quad (w_0) \tag{55}$$

ここで下付き 0 は座屈瞬間までの歪エネルギ及び外力仕事を意味する。さらに w_0 を微小であるとして，w_0 に関する高次エネルギ項 U_{w0} を無視すれば

$$\delta(2\,U_{pw0}+U_{b0})=0 \quad (w_0) \tag{56}$$

これが平板の座屈荷重値及び座屈変形を決定する固有値問題となる。

平板の変位及び面内荷重を座屈直後の (u_0, v_0, 0) 及び ($\bar{X}_0$, $\bar{Y}_0$) から測つて各々 (Δu, Δv, Δw), ($\Delta\bar{X}$, $\Delta\bar{Y}$) とすると，座屈後の変形状態に関して次のような基礎方程式が得られる。座屈直前まで変位は既に (54) 式を満すものとして得られているので，(Δu, Δv, Δw) を決定するにはポテンシャルエネルギの座屈後の増加量 $\Delta\Pi$ を考えればよい。

$$\Delta\Pi=(U_m+U_b-W_p)-(U_{p0}-W_{p0}) \tag{57}$$

変分方程式は

$$\delta\Delta\Pi=0 \quad (\Delta u,\ \Delta v,\ \Delta w) \tag{58}$$

(57) 式を変形させると結局次のようになる。

$$\delta(\bar{U}_m+2\,\bar{U}_{pw0}+\bar{U}_b-\bar{W}_p)=0 \quad (\Delta u,\ \Delta v,\ \Delta w) \tag{59}$$

ただし

$$\bar{U}_m=E\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta w}{\partial x}\right)^2\right),\quad \bar{U}_{pw0}=E\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\ ;\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta w}{\partial x}\right)^2\right)=E\left(N_{x0}\ ;\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta w}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$\bar{U}_b=E_b\left(\frac{\partial\Delta^2 w}{\partial x^2}\right),\quad \bar{W}_{p1}=V_1(\Delta\bar{X}\ ;\ \Delta u) \tag{60}$$

さらに

$$N_{x0}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}+\nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),\quad \cdots\cdots$$

である。

座屈後の問題における変分式は静変形問題の歪エネルギに座屈時の応力と撓みによる非線形項によるエネルギ $2\,\bar{U}_{pw0}$ を付加して考慮すればよいことがわかる。

3.8 平板の非線形振動問題の解析

平板の動的問題は（2）式で与えられる Hamilton の原理に立脚して静的問題と同様に取扱うことができる。すなわち，これまで述べた静的問題の解法に習い動的問題においても平板の撓み変形 $w(w, y, t)$ を同じ平板の固有振動関数の級数として与えよう。

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)w_n(x,y) \tag{61}$$

したがつて（2）式をより具体的に書くとすると，次の連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{c}_n}\right)+\frac{\partial}{\partial c_n}(U_m+U_b-W_p-W_b)=0 \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \tag{62}$$

この式の左辺の第2項は（34）式の左辺の項と時間の変数を含む点を除けば全く同じであり，従つて

$$M_{ij}=\frac{1}{2}\iint\frac{\gamma h}{g}w_iw_jdxdy \tag{63}$$

とおくと

$$2\sum_{i=1}^{\infty}M_{ni}\ddot{c}_i+\frac{\partial}{\partial c_n}(U_m+U_b-W_p-W_b)=0 \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \tag{64}$$

がその運動方程式となる。このようにして得られる多自由度質点-バネ系の非線形振動を一般的に論ずることは現在のところ困難であるが，その第一近似解についてはかなり研究が行なわれており，標準的な振動学の本を参照すればよい。

4 本解析法における有限要素法の応用

以上において述べてきた事柄は，K. Marguerre その他が矩形板の座屈後の挙動を取扱う場合に用いた方法を拡張したものに過ぎない。しかしながら，形状，荷重分布，境界条件を任意に与える場合，以上の解析的手法は忽ち大きな困難に当面する。すなわち

（1） 基本となる線形解；u^0, v^0

（2） 平板の曲げ問題及び平板の撓み振動や座屈の固有関数の決定（つまり w_n の決定）

（3） 膜応力解 $u_{ij}(x,y)$, $v_{ij}(x,y)$ の実用的決定

など，どれを取ても従来の方法では高精度の近似解を求めることが比較的困難であつたが，我々は有限要素法を使用して以上の諸問題の解析を行なう。（1）と（3）に関しては平面問題についての有限要素法の手法が完成されているので，これを用いればよい。（2）に関しては筆者等は Reyleigh-Ritz 法もしくは Reyleigh-Ritz 法と有限要素法を結合させて解析を行う方法を提案している。このとき歪エネルギに関する二重積分を線積分に変換する公式を用いて計算時間の短縮を考えた。

5 平板の大撓みに関する諸問題の第一近似解

平板の幾何学的非線形性に関する諸問題は，第2節に述べた様な一般的解析法により究明されるわけである が，一般にその解析は容易でない。しかしながら平板に起る変形がそれ程大きくない間はその変形状態は微小変形の範囲内で求められた撓みと相似であると考えることができよう。この物理的な議論を数式的に解釈すれば変位関数（65）式において初項のみをとつて次の形に仮定することを意味する。

$$\begin{aligned}u(x,y)&=u^0(x,y)+c_1{}^2u_{11}(x,y)\\ v(x,y)&=v^0(x,y)+c_1{}^2v_{11}(x,y)\\ w(x,y)&=c_1w_1(x,y)\end{aligned} \tag{65}$$

以下諸問題に対する第一次近似解を求めることにする。

5.1 静変形の第一次近似式

このとき w_1 は平板曲げの線形解である。

（65）式を（34）式に代入すると，各エネルギ項は次のように表示できる。

$$U_p=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\right)+2c_1{}^2E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x};\frac{\partial u_{11}}{\partial x}\right)+c_1{}^4E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}\right)$$

$$U_{pw}=E\left(\frac{\partial u}{\partial x};\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)=c_1{}^2E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x};\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)+c_1{}^4E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x};\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$U_w=c_1^4E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right),\quad U_b=c_1^2E_b\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)$$

$$W_p=V_1(\bar{X}\ ;\ u)=V_1(\bar{X}\ ;\ u^0)+c_1^2V_1(\bar{X}\ ;\ u_{11}),\quad W_b=V_b(w)=c_1V_b(w_1) \tag{66}$$

また次の関係式が得られる。

$$2E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial u_{11}}{\partial x}\right)+2E\left(\frac{\partial u^0}{\partial x}\ ;\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)=2E\left(N_{x11}\ ;\ \frac{\partial u^0}{\partial x}\right)=V_2(X_{11}\ ;\ \bar{u}) \tag{67}$$

以上の記号を用いると静変形の変分式（34）式は次のようになる。

$$4E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)c_1^3+2\left[E_b\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)-V_1(\bar{X}\ ;\ u_{11})+V_2(\bar{X}_{11}\ ;\ \bar{u})\right]c_1+V(w_1)=0 \tag{68}$$

5.2 座屈後の問題

（65）式と同様に座屈後の変位増加 Δu, Δv, Δw は次のように表示できる。

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y)&=u^0(x,y)+c_1^2u_{11}(x,y)\\ \Delta v(x,y)&=v^0(x,y)+c_1^2v_{11}(x,y)\\ \Delta w(x,y)&=c_1w_1(x,y)\end{aligned} \tag{69}$$

ここで Δw の第1次近似として w_1 は座屈波形をとり，（59）式を考える。

$$\bar{U}_{pw0}=E\left(N_{x0}\ ;\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x}\right)^2\right)=c_1^2E\left(N_{x0}\ ;\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right) \tag{70}$$

w_1 が座屈波形であるので（56）式を満す。従つて

$$E_b\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+2E\left(N_{x0}\ ;\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)=0 \tag{71}$$

したがつて

$$4E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)c_1^3+2[-V_1(\Delta\bar{X}\ ;\ u_{11})+V_2(X_{11}\ ;\ \Delta\bar{u})]c_1=0 \tag{72}$$

書き直すと

$$c_1^2=\frac{V_1(\Delta\bar{X}\ ;\ u_{11})-V_2(X_{11}\ ;\ \Delta\bar{u})}{2E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)} \tag{73}$$

$V_1(\Delta\bar{X}\ ;\ u_{11})$ 及び $V_2(X_{11}\ ;\ \Delta\bar{u})$ は各々座屈後の外荷重増加及び面内強制変位増加と比例する項であるので，上式は平板が座屈後でもその撓みは弾性座屈波形と相似であるという仮定の下に，任意形状，任意境界条件の平板の座屈後の撓みの平方は，加わる外荷重増加あるいは面内強制変位に対して比例するということを示している。これは吉識教授が矩形板の座屈値決定法として提案された $P-\delta^2$ 法の初期撓みのない場合についての証明の一般化である。

5.3 初期撓みを有する平板の座屈曲げ問題

座屈以前も考慮するため（59）式の代りに（14）式を使う。面内外荷重のみを考えるので，$W_b=0$ である。

$$\delta(U_m'+U_b-W_p)=0$$

あるいは

$$\delta(U_m+2U_d+U_{dd}+U_b-W_p)=0\quad (u,\ v,\ w) \tag{74}$$

ただし（74）式の U_m は初期撓みの存在しない場合の膜応力状態の歪エネルギである。

平面問題を解くことにより，次の解が得られる。

$$\begin{aligned}u&=u^0+c_1^2u_{11}+c_1u_{d1}\\ v&=v^0+c_1^2v_{11}+c_1v_{d1}\end{aligned} \tag{75}$$

すでに変位 (u^0, v^0)，(u_{11}, v_{11})，(u_{d1}, v_{d1}) が各々の面内の平衡条件及び境界条件を満していることを利用すると最終的に初期撓みを有する平板の座屈曲げの第1次近次は次のようになる。

$$\begin{aligned}&4E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)c_1^3+6E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\ ;\ \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)c_1^2\\ &+2\left[E_b\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+E\left(\frac{\partial u_{d1}}{\partial x}+\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)-V_1(\bar{X}\ ;\ u_{11})+V_2(X_{11}\ ;\ \bar{u})\right]c_1\\ &-V_1(\bar{X}\ ;\ u_{d1})+V_2(X_{1d}\ ;\ \bar{u})=0\end{aligned} \tag{76}$$

5.4 初期撓みを有する平板の飛び移り問題

5.3 の初期撓みを有する平板の座屈曲げ問題と同様に取扱うことができるが，(14) 式においてこの場合は面内外荷重を考えないので $W_p=0$ となる。

$$W_b=c_1V_b(w_1) \tag{77}$$

であるので，結局飛び移りの第1近似は以下のようになる。

$$4E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)c_1^3+6E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2;\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)c_1^2$$
$$+2\left[E_b\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+E\left(\frac{\partial u_{d1}}{\partial x}+\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\right]c_1-V_b(w_1)=0 \tag{78}$$

5.5 熱変形問題

平板が温度分布 $T(x,y,z)$ を受ける場合，その初期歪分布は次式で与えられる。

$$\varepsilon_x^{(0)}=\alpha T,\ \ \varepsilon_y^{(0)}=\alpha T,\ \ \gamma_{xy}^{(0)}=0 \tag{79}$$

このときの平面問題の解は (65) 式のように得られる。

(39) 式に (65) 式の関係を代入すると熱変形問題の第1次近似式は次のようになる。

$$4E\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)c_1^3+2\left[2E\left(N_x^{(0)};\frac{\partial u_{11}}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.+E_b\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)\right]c_1-2E\left(M_x^{(0)};\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)=0 \tag{80}$$

以上いずれの問題も平衡方程式 $\partial \Pi/\partial c_1=0$ は c_1 に関する3次方程式であるので c_1 は3つの根をもち，そのうち実根が平衡状態を示す。さらにその平衡状態の安定，不安定を論ずる場合には，$\partial^2\Pi/\partial c_1^2$ を求めてその正，0，負に従い，安定平衡，中立平衡，不安定平衡のいずれかであるかが決定できる。これらの詳細は，具体的な解析例に基づいて次報に述べることにする。

6 結 論

平板の大撓み諸問題に対する一解法として，平板の座屈後の問題において K. Marguerre, E. Trefftz 等の提案した方法を著者等は変分原理に基づき拡張した。従来面内変位 u, v あるいは Airy の応力関数 F は面内の平衡方程式あるいは適合条件式の微分方程式を解いていたため，複雑な形状及び境界条件を有する平板では得ることは困難であつたが，これを初期歪問題に変換し，有限要素法を用いることにより解決した。さらにエネルギ的な考察の利点として以下の諸問題に統一的に取り扱うことができるようになつた。つまり，(1) 平板の大撓み静変形問題，(2) 平板の座屈後問題，(3) 初期撓みを有する座屈曲げあるいは飛び移り問題，(4) 初期歪分布あるいは温度分布を有する大撓み諸問題（熱座屈等を含む），(5) 動的非線形問題（大撓み振動あるいは動的安定問題）等々，さらには曲面板等の大撓み諸問題も同様に考えることができる。本報告においては平板の大撓み問題の一般論を述べたが，次報以下にその安定問題の詳細と解析の例を示すことにする。

最後に本論文を書くにあたりご援助とご助言をいただいた東大藤田教授，吉田助教授に感謝いたします。

参 考 文 献

1) K. Washizu : "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, N. Y. (1968)
2) V. V. Bolotin : "Dynamic Stability of Elastic System", Holden-Day, S. F. (1966)
3) 山本，近藤："水圧と軸力を受ける平板"，造船協会論文集 118 号 (1965)
4) 吉識，川井，吉村："マトリックス法による船体構造解析に関する研究 (I)，(II)，(III)"，造船協会論文集第 120，121，123 号
5) 吉識，川井，吉村，大坪："平板の曲げ，振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について (I)，(II)，(III)"，造船協会論文集第 117，118，123 号