

(昭和 46 年 5 月日本造船学会春季講演会において講演)

梁構造における衝撃伝達

正員 野 崎 政 治*

The Shock Wave Transmission in Beam Structures

by Masaharu Nozaki, *Member*

Summary

This paper treats the transmission of the shock waves in beam structures.

Main contents are as follows.

1. The transmission of the flexural shock waves in an infinite beam is analysed from a standpoint of energy transmission and approximate solutions are obtained.
2. Approximate solutions are compared with exact solutions. When $\frac{r^2}{a^2}t > 4$, distributions of energy density in beams, envelopes of vibration amplitudes, and periods etc. obtained from exact solutions converge to the approximate solutions given in this paper. Even if the initial conditions of the beam, namely the initial shape and velocity shape of the beam, are arbitrary, approximate solutions of the beam response can be obtained easily by this method.
3. Shock wave transmission in structures composed of beams of different shape sections or corners are analysed using this method and compared with experimental results. In general, they were fairly in good agreement.

1 概 要

第2次大戦において、非接触水中爆発（感応機雷等による）は、船舶に大きな被害を与えた。特に船体、乗組員に大した被害がなくても、装備品またはその取付部分が破損して結局船としての機能を失う場合が多く、接触爆発による被害が局部的であるのに反し、非接触爆発の被害は船の全体に及んだといわれる。「衝撃力に対する船内装備品の抵抗力如何？」という問題は、艦艇にとり重要な課題でありながら、その複雑さのために、いまだ明確な解答が与えられていない。このような船体衝撃問題は図1に見る通り幾つかに分けて論じることができる。即ち

- (i) 爆心の問題（耐衝撃設計上いかなる薬種、薬量、距離を想定すればよいかという O. R. 問題）
- (ii) 水中衝撃波の伝達（圧力、持続時間、波形等）
- (iii) 船体に加わる力（Hydro-Elastic 問題、Cavitation の発生等）
- (iv) 船体内の衝撃伝達（船体の衝撃に対する応答）
- (v) 船体の永久変形および裂傷
- (vi) 装備品（支持構造、マウント等を含む）の応答破損

本論文は (iv) の船体の衝撃応答（これが装備品の応答に対する入力となる）について考えようとするものである。

外国では主として歴大な数の実艦実験により研究を進めているようであるが、我国では制約条件が多く実艦実験を主体に研究を行なうのは困難と思われるのでなるべく理論的にこの問題を取扱うことを考えた。この場合対象が大きな構造である船体であり、且つ衝撃力の持続時間が短かいため、ノーマルモード法等通常の

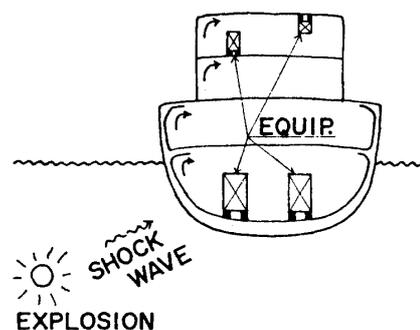


図1 艦船衝撃概要

* 防衛庁技術研究本部 第1研究所



図2 衝撃波形

衝撃問題に用いられる方法ではとても解析ができず、如何にして簡単な解析法を導入するかが研究のポイントであると思われる。本論はこのような目的に対する解析法として、梁の中の衝撃曲げ波の伝達をエネルギー伝達という概念により解析することを提案するものである。

ここで簡単にエネルギーで説明することの利点を挙げて見よう。梁に曲げ衝撃を加えた場合、梁の長さに沿つての変位、速度、歪等の線型量は図2の実線のように、いくつかの異つた振動数が重畳して複雑な形となる。従来の衝撃問題の解析は、この応答の波形を直接求めようとするもので、当然、非常に複雑で一般にはなかなか解が求められない。しかしこのときの梁の中のエネルギー分布を考えたらどうなるだろうか。正弦波形の曲げ波が進行している場合を考えると、(付録参照)運動エネルギーとポテンシャルエネルギー(歪エネルギー)の位相が 90° ずれているため両者を合計したものは常に一定値になる。従つて図2のように複雑な波形でも、そのエネルギーを考えれば、点線のように簡単な曲線になるものと思われ、その取扱いは単純化されることが予想される。その他、後述するようにエネルギーの伝達速度が周波数ごとに一定(この速度を群速度という)であることも利点の一つである。

2 梁の振動の一般的性質(曲げ波の分散性等)

梁の曲げ振動の方程式は*

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho A_r \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

W : 横方向変位, E : ヤング率

I : 断面2次モーメント, A_r : 梁の断面積

ρ : 梁の密度

$W = e^{i\omega t} \cdot w(x)$ なる形の定常解を求めると¹⁾

$$W = e^{i\omega t} (A_1 e^{iK_B x} + A_2 e^{-K_B x} + A_3 e^{-iK_B x} + A_4 e^{K_B x}) \quad (2)$$

$$A_1 \sim A_4: \text{任意定数}, \quad K_B^4 = \frac{\rho A_r \omega^2}{EI} = \frac{\omega^2}{c_L^2 r_g^2}$$

$$c_L = (E/\rho)^{1/2}, \quad r_g = (I/A_r)^{1/2}$$

(2) 式の第1項、第3項は $(\omega t \pm K_B x)$ の関数であるから時間とともに形を変えずに移動する波即ち進行波で第1項は x の負方向へ、第3項は正方向へ伝達する。その波長、移動の速度(これを同一位相の点の速度という意味で位相速度という)等は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_B &= 2\pi/K_B & \lambda_B: \text{曲げ波の波長} \\ V_f &= \omega/K_B = c_L \cdot r_g \cdot K_B = (c_L \cdot r_g \cdot \omega)^{1/2} & V_f: \text{位相速度} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

即ち、位相速度が ω の関数となつているので、曲げ波は分散性をもつことがわかる^{2,3,4)}。

エネルギーが伝達する速度(これを群速度という)は一般に

$$V_g = \partial\omega/\partial K_B \quad (4)$$

V_g : 群速度

で与えられる。曲げ波の場合には

$$V_g = \partial(c_L \cdot r_g \cdot K_B^2)/\partial K_B = 2 c_L \cdot r_g \cdot K_B = 2(c_L \cdot r_g \cdot \omega)^{1/2} = 2 V_f \quad (4')$$

となる。即ち、曲げ波の場合、エネルギーの伝達速度は位相速度の2倍となる²⁾。(付録参照)

(2)の第2項、第4項は近在波(near field wave)と称しその形から明らかなように進行しない。無限長の梁においては、その境界条件からこれらの項は存在することができない。

3 無限長梁における衝撃エネルギーの伝達

一定断面の無限長梁の原点附近(梁の長さ方向に x 軸をとる)に衝撃力が加えられたとし、初期変位を $f(x)$ 、初速を $g(x)$ としよう。このとき梁の応答(衝撃力の近くを除く)を考える。

* 衝撃の方程式として最近 Timoshenko の方程式を用いる場合が多い。しかし打撃点から板厚の数倍離れたら、波頭を除けば(この部分の振幅は極めて小さい)(1)の古典理論で充分である^{5,6)}とされている。

$t=0$ において系の有するエネルギーを求めると、弾性学の公式から歪エネルギー E_s は

$$E_s = \frac{EI}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{d^2f/dx^2\}^2 dx$$

運動のエネルギー E_k は

$$E_k = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 dx \quad m = \rho A_r : \text{梁の単位長さ当りの質量}$$

従がつて総エネルギーを E_t とすれば

$$E_t = E_s + E_k$$

で与えられる。

さて、ここでエネルギーの伝達を考えるため、初期に貯えられたエネルギーをフーリエ成分で表わすことを考える。無限長梁では近在波が存在しないから、フーリエ変換でフーリエ成分が求められる。 $f(x), g(x)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(K_B), G(K_B)$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(f'') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK_B x} \cdot f''(x) dx \equiv -K_B^2 \cdot F(K_B) \\ \mathcal{F}(g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK_B x} \cdot g(x) dx \equiv G(K_B) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

\mathcal{F} はフーリエ変換をしめす。このとき

$$\text{歪エネルギーの } K_B \text{ 成分 } \bar{E}_s(K_B) = \frac{EI}{2} K_B^4 |F(K_B)|^2 = \frac{m\omega^2}{2} |F(K_B)|^2$$

$$\text{運動エネルギーの } K_B \text{ 成分 } \bar{E}_k(K_B) = \frac{m}{2} |G(K_B)|^2$$

である。従つて全エネルギー $\bar{E}(K_B)$ は K_B の関数として、次のようになる。

$$\bar{E}(K_B) = \bar{E}_s(K_B) + \bar{E}_k(K_B) = \frac{m}{2} \{\omega^2 |F(K_B)|^2 + |G(K_B)|^2\} \quad (6)$$

もちろんフーリエ変換の公式から次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} E_s &= \frac{EI}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{f''\}^2 \cdot dx = \frac{EI}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_B^4 |F(K_B)|^2 dK_B \\ E_k &= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 \cdot dx = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G(K_B)|^2 dK_B \\ \therefore E_t &= E_s + E_k = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(K_B) dK_B \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

さて、エネルギーは前述したように、群速度 ((4') 式) で伝達する。いま、 $t=0$ においてすべてのエネルギーが原点にあつたと仮定すると、時間 t においては (4') より

$$K_B \text{ 成分は } x = V_g \cdot t = 2c_L \cdot r_g \cdot K_B \cdot t \quad (8)$$

に

$$(K_B + dK_B) \text{ 成分は } x = \left(V_g + \frac{\partial V_g}{\partial K_B} dK_B \right) t = 2c_L \cdot r_g \cdot (K_B + dK_B) t$$

に達する。即ち、 dK_B 間のエネルギー (図3のハッチ部) が $\partial V_g / \partial K_B \cdot dK_B \cdot t = 2c_L \cdot r_g \cdot dK_B \cdot t$ の長さに分布する。

ゆえに、長さ方向のエネルギー密度 E_u は (6) より

$$E_u = \frac{\bar{E}(K_B) dK_B}{\frac{\partial V_g}{\partial K_B} \cdot dK_B \cdot t} = \frac{m\{\omega^2 |F(K_B)|^2 + |G(K_B)|^2\}}{4c_L \cdot r_g \cdot t} \quad (9)$$

となる。(材料の内部粘性による損失は §6 で述べる)

このとき瞬時周波数⁴⁾は (8) および $K_B^2 = \omega / c_L \cdot r_g$ を使って

$$\omega = K_B^2 \cdot c_L \cdot r_g = \frac{1}{4c_L \cdot r_g} \left(\frac{x}{t} \right)^2 \quad (10)$$

ゆえに周期は

$$T = 2\pi / \omega = 8\pi \cdot c_L \cdot r_g \left(\frac{t}{x} \right)^2 \quad (11)$$

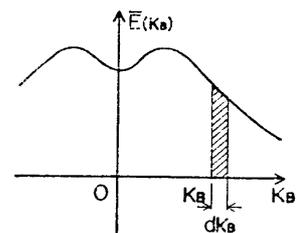


図3 エネルギースペクトル

局所波数⁴⁾は(8)より

$$K_B = \frac{1}{2c_L \cdot r_g} \left(\frac{x}{t} \right) \quad (8')$$

従つて x 方向の波長は

$$\lambda_B = \frac{2\pi}{K_B} = 4\pi \cdot c_L \cdot r_g \cdot \left(\frac{t}{x} \right) \quad (12)$$

(9) 式によつて長さ方向のエネルギー密度が求められたが、このエネルギーから等価変位および等価歪を求めよう。この意味は次の通りである。図5のように振動している梁の任意の点において、変位の速度及び歪は一般に(+)値と(-)値の間を変動し、必ず零を通る。即ち、ある瞬間には運動エネルギーが零で、全エネルギーは歪エネルギーだけ、次の瞬間には丁度逆の関係となるような変動を繰り返す。そこで全エネルギーを運動エネルギーに等しく仮定すれば、速度又は変位の包絡線が求められ、歪エネルギーに等置すれば、歪の包絡線を求めることができる。これらの値をそれぞれ等価変位、等価歪等と呼称することにしよう。

等価変位 y_{eq} は

$$\frac{1}{2} m \cdot y_{eq}^2 \cdot \omega^2 = \frac{m\omega^2 |F(K_B)|^2 + m |G(K_B)|^2}{4c_L \cdot r_g \cdot t}$$

より

$$y_{eq} = \left\{ \frac{\omega^2 |F(K_B)|^2 + |G(K_B)|^2}{2\omega^2 \cdot c_L \cdot r_g \cdot t} \right\}^{1/2} \quad (13)$$

同様に、等価歪 ϵ_{eq} は

$$\frac{M^2}{2EI} = \frac{1}{2EI} \epsilon_{eq}^2 \frac{(EI)^2}{y_t^2} = \frac{m\omega^2 |F(K_B)|^2 + m |G(K_B)|^2}{4c_L \cdot r_g \cdot t} \quad \left. \vphantom{\frac{M^2}{2EI}} \right\} \text{より}$$

ここに y_t : 断面の中立軸から歪計測点迄の距離

$$\epsilon_{eq} = y_t \left\{ \frac{m\omega^2 |F(K_B)|^2 + m |G(K_B)|^2}{2EI \cdot c_L \cdot r_g \cdot t} \right\}^{1/2} \quad (14)$$

(8'), (9), (10), (11), (12), (13), (14) から梁上の任意の点の任意の時刻における応答(エネルギー密度、瞬時周波数、局所波数、変位および歪の包絡線等)を知ることができる。

以上から、曲げ波のように分散性をもつ波では、エネルギー密度、振幅等が波の進行につれて減少することがわかつた。分散性のない波、例えば通常の縦波ではこのようなことは起らない。

なお本節と同様な議論が分散性をもつ曲げ波以外の現象の場合にも成立つものと思う。

4 実 験

以上の理論を確認するため実験を行なつた。

4.1 実験方法

長さ 20 m のフラットバーの梁(試験片 A, 図 4 参照)を吊紐で吊下げ、空気銃で衝撃を加えて、衝撃伝達の有様を歪ゲージにより計測した。概要は図 14 と同じである。

試験片 A 3 mm (厚) × 38 mm (幅) × 20 m (長)

軟鋼フラットバー

空気銃 口径 5.5 mm 銃口と試験片の距離 5 cm

計測位置 図 4 参照

4.2 実験結果

図 5 は試験片 A の中心から 1 m の位置を空気銃で打つたときの各点の歪の時間的变化をしめしたもので、左端に 200 μ のキャリブレーションが入れてある。横方向が時間軸、縦方向が計測位置をしめす。

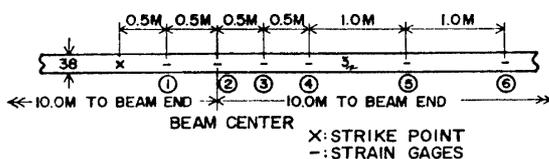


図 4 試験片 A

はじめに周波数関係について調べよう。棒の中の音速

$c_L = 5,120$ m/sec として(4')から群速度を計算すると

1 K. C. の群速度 334 m/sec 波長 17 cm

10 K. C. の " 1,056 m/sec " 5.3 cm

を得る。この速度を図5の中にそれぞれ1点鎖線、2点鎖線で記入しておいた。換言すれば、これらの線は $t-x$ 平面において 1 K.C., 10 K.C. の波が存在する点の軌跡である。従つて例えば 1 K.C. の線上では、見かけの周期はすべて $1/1 \text{ K.C.} = 1 \text{ mm sec}$ となる筈であり、図5でそのことを確かめることができる。同様のことが任意の周波数で成立している。データーレコーダーの周波数特性が 0~10 K.C. なので 10 K.C. の軌跡を入れたのであるが、曲げ波の先端波（波頭ではなく、計測された波の先端を意味する）は 10 K.C. よりも高い周波数が記録されている。その伝達速度から換算すると先端波は大体 14.5 K.C. に相当することがわかる。 $t > 15 \text{ mm sec}$ では記録の中に高い周波数の振幅の小さな波が見られるが、これは梁の自由端まで達した波が反射して来たことを示す。右の方に 10 K.C. の反射波の計算軌跡を示しているが、その線上では記録の周期が $1/10 \text{ mm sec}$ になつていくことがわかる。

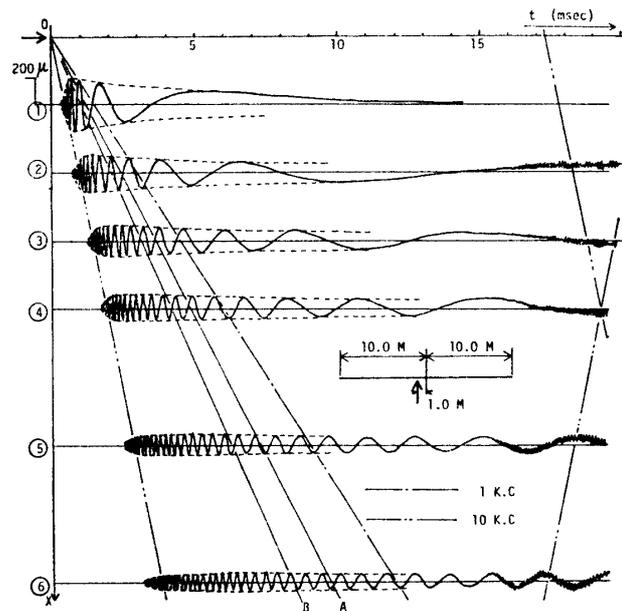


図5 真直棒の衝撃歪

つぎに振幅について検討する。振幅といつても、この振幅は記録の極大値の意味の振幅ではなく、§3で述べた等価歪即ち包絡線のことである。

0点を空気銃で打つと、衝撃力は0点近傍の変位および速度を与える。これから歪エネルギーおよび運動エネルギーの K_B 成分が求められたとし、かつこれらのエネルギーが $t=0$ において原点Oに集中しているものと仮定する。いま、 K_B 成分の波はOA上を、 K_B から dK_B だけずれた成分の波はOB上を伝達するとしよう。時刻 t において $(K_B \sim K_B + dK_B)$ 間のエネルギーが分布する梁上の長さは t に比例して長くなる。従つて K_B 成分のエネルギーの長さ方向の密度は時間に逆比例することになる。(OA等は直線であるから原点からの距離に逆比例するといつてもよい。)ところで、変位、歪等線型のな応答量はエネルギーの平方根に比例するから、変位、歪等の包絡線は K_B 成分に注目すれば結局時間 t 、或は原点からの距離 x の平方根に逆比例することになる。以上のことは(13)式又は(14)式を言葉で表現しただけのことである。図5において原点Oから任意の線を引き、計測点①と④、或は②と⑥(ともに原点からの距離が4倍になつている)の包絡線振幅を比較すれば、距離4倍の点の振幅が $1/2$ になつていくことから前述の平方根に逆比例の関係が成立していることを確かめることができる。

以上の考察から、 $t=t_1$ における梁の長さ方向のエネルギー分布が求められたとき、 x 軸を x/t_1 倍、エネルギー分布を t_1 倍すれば、任意時刻の長さ方向のエネルギー分布が(いわば正規化されて)すべて同一になることが予想される。これらのことを確かめるため、厳密解が得られている場合(初期の変位、速度が正規分布のときは厳密解が求められている)について計算を実施し、且つ近似計算との比較を行なつた。次節にこれを示す。

5 計 算 例

5.1 初期変位 $A_0 e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$ が与えられたとき

5.1.1 近似解

初期変位 $f(x) = A_0 e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$ が与えられ、初速 $g(x) = 0$ とする。フーリエ変換を行なつて

$$F(K_B) = \sqrt{2} a A_0 e^{-K_B^2 a^2}$$

$$G(K_B) = 0$$

故にエネルギー密度は(9)から

$$E_U = \frac{EI}{2 c_L r_0} a^2 A_0^2 \frac{K_B^4}{t} e^{-2K_B^2 a^2} = \frac{EI}{32 \cdot c_L^5 \cdot r_0^5} a^2 \cdot A_0^2 \cdot \left(\frac{x}{t}\right)^4 \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{a^2}{2c_L^2 r_0^2} \left(\frac{x}{t}\right)^2} \quad (15)$$

等価振幅は(13)から

$$y_{eq} = \frac{aA_0}{\sqrt{c_L r_g}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2}{4c_L^2 r_g^2} \left(\frac{x}{t}\right)^2} \quad (16)$$

瞬時周波数, 周期等は (10), (11) で与えられる。

5.1.2 厳密解

この場合の厳密解は文献 3, p. 155 に与えられている。本論文の記号を使うと

$$y = A_0 \left(1 + \frac{\gamma^4 t^2}{a^4}\right)^{-1/4} e^{-\frac{a^2 x^2}{4(a^4 + \gamma^4 t^2)}} \cdot \cos \left[\frac{\gamma^2 t x^2}{4(a^4 + \gamma^4 t^2)} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma^2 t}{a^2} \right) \right] \quad (17)$$

$$\text{ただし } \gamma^2 = c_L \cdot r_g$$

文献 3 では $\gamma^2 = 4\pi^2 c_L \cdot r_g$ となつているがこれは誤である。さらに γ^2 の訂正にもなつて同書 p. 155 (14.7) 式中の三角関数の引数は $4\pi^2 \gamma^2 \mu^2 t$ とする必要がある。

$t \gg a^2/\gamma^2$ なるとき, 振幅は

$$y \doteq \frac{aA_0}{\sqrt{c_L r_g}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2}{4c_L^2 r_g^2} \left(\frac{x}{t}\right)^2} \cdot \cos \left(\frac{x^2}{4c_L \cdot r_g \cdot t} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (17')$$

(17') の包絡線は (16) と一致している。

瞬時周波数はつぎのようにして求められる。即ち (17) 式の \cos 項の引数を t で微分して

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\gamma^2 t x^2}{4(a^4 + \gamma^4 t^2)} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma^2 t}{a^2} \right) \right] \\ &= \frac{\gamma^2}{a^2} \left[\frac{\frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{\gamma^4}{a^4} \cdot t^2\right) - 2 \left(1 + \frac{\gamma^4}{a^4} t^2\right)}{4 \left(1 + \frac{\gamma^4}{a^4} t^2\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

ゆえに瞬時周期 ($T = 2\pi/\omega$) は

$$T = \frac{a^2}{\gamma^2} \frac{8\pi \left(1 + \frac{\gamma^4}{a^4} \cdot t^2\right)^2}{\frac{x^2}{a^2} \left(\frac{\gamma^4}{a^4} t^2 - 1\right) + 2 \left(1 + \frac{\gamma^4}{a^4} \cdot t^2\right)} \quad (19)$$

$t \gg a^2/\gamma^2$ のとき, 振動数, 周期はそれぞれ

$$\omega \doteq -\frac{1}{4c_L r_g} \left(\frac{x}{t}\right)^2 \quad (18')$$

$$T \doteq 8\pi c_L r_g \left(\frac{t}{x}\right)^2 \quad (19')$$

これらは (10), (11) とそれぞれ一致している。

同様に, 局所波数は (17) の \cos の引数を x で微分して

$$K_B = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma^2 t x^2}{4(a^4 + \gamma^4 t^2)} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma^2 t}{a^2} \right) \right] = \frac{\gamma^2 t x}{2(a^4 + \gamma^4 t^2)} \doteq \frac{1}{2c_L r_g} \left(\frac{x}{t}\right) \quad (20)$$

従つて x 方向の波長は

$$\lambda_B = 2\pi/K_B \doteq 4\pi c_L \cdot r_g \left(\frac{t}{x}\right) \quad (20')$$

これは (12) と一致している。

つぎにエネルギー密度を考へて見よう。(17) から x 方向の単位長さに存在するエネルギー E_u を求めると

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{1}{2} EI (y'')^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \\ &= \frac{EI}{8a^4} A_0^2 \left(1 + \frac{\gamma^4}{a^4} t^2\right)^{-5/2} e^{-\frac{a^2 x^2}{2(a^4 + \gamma^4 t^2)}} \left(1 + \frac{\gamma^4}{a^4} t^2 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^4}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式の最終項において dominant な項は $x^4/4a^4$ であるから $t \gg a^2/\gamma^2$ のとき

$$E_u \doteq \frac{EI}{32} A_0^2 \frac{a^2}{\gamma^{10}} \left(\frac{x}{t}\right)^4 \frac{1}{t} e^{-\frac{a^2 x^2}{2\gamma^4 t^2}} \quad (22)$$

これは (15) と一致している。

前節の終りに述べた方法を考慮して無次元化した変位(包絡線), エネルギー分布, 周期等の厳密計算の結果をそれぞれ図 6, 7, 8 にしめす。いづれも横軸は $\frac{a}{c_L r_g} \cdot \frac{x}{t}$ である。図 6 は $\frac{(c_L r_g)^{1/2}}{A_0 a} t^{1/2} y$ を (17) 式 (y は \cos

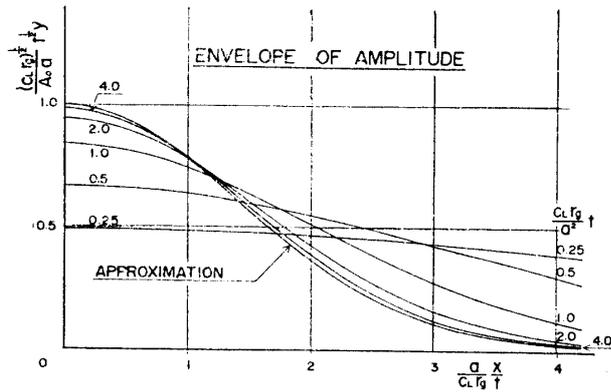


図 6 変位の包絡線

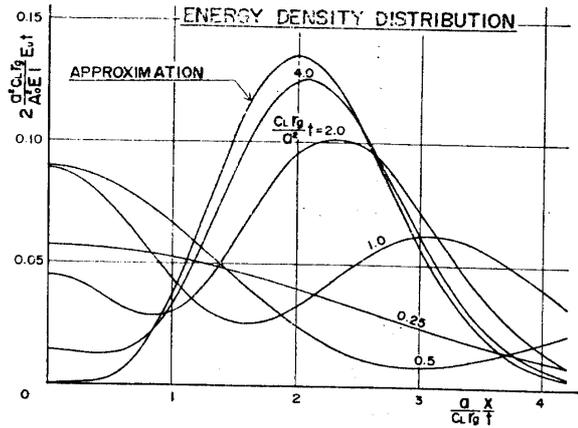


図 7 エネルギー密度分布

項を除いた包絡線振幅)を用いて, 図7は $2(a^2/A_0^2) \times (c_L r_g / EI) E_u \cdot t$ を(21)式を用いて, 図8は $c_L r_g / a^2 \times T$ (T は周期)を(19)式を用いて, いずれも $(r^2/a^2)t$ をパラメーターにして計算した結果をしめす。これらの図には, それぞれ(16), (15), (11)を用いて求められる近似計算の結果も記入しておいた。

(11), (15), (16)の誘導においては, $t=0$ においてエネルギーがすべて原点に集中していると仮定しているが, この仮定のため, t が小さい間は厳密解と近似解とは一致しない。しかし $(r^2/a^2)t$ が4以上になると両者は非常によく一致し, 厳密解は近似解に収束して来ることがわかる。

5.2 初速 $V_0 e^{-x^2/4a^2}$ が与えられたとき

5.2.1 近似解

初期変位なく, 初速 $g(x) = V_0 e^{-x^2/4a^2}$ だけが与えられたとする。このとき

$$G(K_B) = \sqrt{2} a V_0 e^{-K_B^2 a^2}$$

$$F(K_B) = 0$$

ゆえに, エネルギー密度は(9)から

$$E_u = \frac{m a^2}{2 \cdot c_L \cdot r_g} V_0^2 \frac{1}{t} e^{-\frac{a^2}{2 c_L^2 r_g^2} \left(\frac{x}{t}\right)^2} \tag{23}$$

歪の包絡線は(14)から

$$\begin{aligned} \epsilon_{eq} &= y_t \left\{ \frac{2 m a^2 V_0^2 e^{-2 K_B^2 a^2}}{2 E I \cdot c_L \cdot r_g \cdot t} \right\}^{1/2} = y_t \left\{ \frac{a^2 V_0^2 e^{-2 K_B^2 a^2}}{c_L^3 \cdot r_g^3 \cdot t} \right\}^{1/2} \\ &= y_t \frac{a V_0}{c_L^{3/2} \cdot r_g^{3/2} \cdot t^{1/2}} e^{-\frac{a^2}{4 c_L^2 r_g^2} \left(\frac{x}{t}\right)^2} \end{aligned} \tag{24}$$

これが歪の包絡線の近似式である。

5.2.2 厳密解

この場合の厳密解は, 歪について⁷⁾

$$\epsilon = -y_t \frac{V_0}{c_L r_g} \frac{1}{\left\{ 1 + \left(\frac{c_L r_g t}{a^2} \right)^2 \right\}^{1/4}} e^{-\frac{(x/a)^2}{4 \left\{ 1 + \left(\frac{c_L r_g t}{a^2} \right)^2 \right\}}} \sin \left[\frac{1}{4} \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^2 \frac{c_L r_g t}{a^2}}{1 + \left(\frac{c_L r_g t}{a^2} \right)^2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c_L \cdot r_g \cdot t}{a^2} \right] \tag{25}$$

なお, 同文献によると, 変位は普通の関数では表わせない。(25)において $t \gg a^2/r^2$ とすると, ϵ の包絡線は

$$\epsilon = y_t \cdot \frac{V_0}{c_L \cdot r_g} \frac{a}{(c_L \cdot r_g \cdot t)^{1/2}} e^{-\frac{a^2}{4 c_L^2 r_g^2} \left(\frac{x}{t}\right)^2} \tag{25'}$$

となつて (24) の近似計算と一致していることがわかる。振動数等もちろん一致している。

以上の2つの計算例で示したように、 $(r^2/a^2)t \gg 4$ のとき近似解は厳密解とよく一致することがわかつた。

上述の計算では、初期条件がいつでも正規分布であるため厳密解が求められていた。しかし、厳密解が求められない任意の変位、初速による衝撃の場合でも、そのフーリエ変換を数値計算で求めれば、(9), (13), (14), (10), (11), (12) 等から簡単に任意点の応答 (エネルギー分布, 変位或は歪の包絡線, 瞬時周波数, 波長等ただし位相を除く) を近似的に求めることができる。

6 2ヶ以上の部材が連結されている時の衝撃伝達

現実の構造物の中には図13に示すように、異つた部材の連結点、屈折点等が存在する。これらを不連続点と呼ぶことにする。本節では不連続点がある場合の衝撃伝達を考える。

6.1 エネルギー密度の周波数による表示

異つた部材が混在するときの便宜のため、エネルギー密度 E_u を周波数をベースにして求めておく。§3の場合と同様に $t=0$ において全エネルギーが原点に集中しているとする。運動エネルギーと歪エネルギーの和を ω の関数として表わしたものを $E(\omega)$ とおけば

$$E_u = \frac{E(\omega)d\omega}{\frac{\partial V_g}{\partial \omega} \cdot d\omega \cdot t} = \frac{E(\omega)}{\left(\frac{c_L r_g}{\omega}\right)^{1/2} \cdot t} = \frac{E(\omega)}{2} \omega^{-1} \cdot x \quad (26)$$

$E(\omega)$ は $\bar{E}(K_B)$ から次のようにして求められる。

$E(\omega)$ と $\bar{E}(K_B)$ (前節まで用いたもの) との関係は

$$E(\omega)d\omega = \bar{E}(K_B)dK_B$$

$$K_B = (\omega/c_L \cdot r_g)^{1/2} \quad \therefore dK_B = \frac{1}{2} d\omega (1/c_L r_g \omega)^{1/2} \quad \left. \vphantom{K_B} \right\} \text{であるから}$$

$$E(\omega) = \bar{E}(K_B) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_L r_g \omega} \right)^{1/2} \quad (27)$$

(26) 式に入れて

$$E_u = \frac{E(\omega)}{(c_L \cdot r_g \cdot \omega^{-1})^{1/2} \cdot t} = \frac{\bar{E}(K_B) (c_L \cdot r_g \cdot \omega)^{-1/2}}{2(c_L \cdot r_g \cdot \omega^{-1})^{1/2} \cdot t} = \frac{\bar{E}(K_B)}{2c_L \cdot r_g \cdot t}$$

即ち (9) と一致することがわかる。

6.2 エネルギー密度に関連するファクター

異つた部材が連結されているときを考える。両部材は屈折していてもよい。このときエネルギー密度に関するファクターは

- (i) §3 で述べた曲げ波の分散性に起因するエネルギー密度の減少
- (ii) 不連続点における反射による透過エネルギーの減少
- (iii) 部材が角度をもつて交つた交点における曲げ波 \leftrightarrow 縦波のエネルギーの変化
- (iv) 遠距離を伝達する際のエネルギー損失 (材料の内部粘性等による)

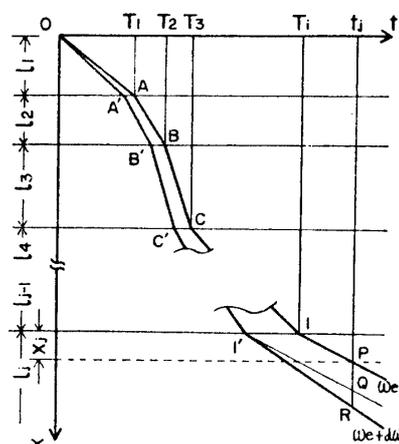


図9 $x-t$ 面の衝撃伝達

等が考えられる。これらの各ファクターについて以下に説明する。

6.3 分散に起因するエネルギー密度の変化

前項で述べた (i)~(iv) の4つのファクターのうち、分散に起因するものだけを考え、他は仮に無視して考える。図9に示すように1部材, 2部材, ... が連結されているものとし、各部材の長さを l_1, l_2, \dots 、各部材の環動半径を r_{g1}, r_{g2}, \dots とする。図9では屈折した部材等もすべて一直線上に伸ばして表示している。

$t=0$ においてエネルギーがすべて原点 $x=0$ に集中しているものとし、これらのエネルギーが時間とともにいかに伝達して行くかを考えよう。エネルギーのうち ω_e なる周波数成分のものに着目すると、この成分は環動半径 r_{g1} なる部材においては (4') より $V_{g1t} = 2(c_L \cdot r_{g1} \cdot \omega_e)^{1/2}$ なる群速度をもつ。

従つて $(\omega_e + d\omega)$ 成分の群速度は

$$V_{gi} + \frac{\partial V_{gi}}{\partial \omega} d\omega = 2(c_L \cdot r_{gi} \cdot \omega_e)^{1/2} + (c_L \cdot r_{gi})^{1/2} \cdot \omega_e^{-1/2} \cdot d\omega$$

ω_e 成分と $(\omega_e + d\omega)$ 成分の速度差は

$$\frac{\partial V_{gi}}{\partial \omega} d\omega = (c_L \cdot r_{gi})^{1/2} \cdot \omega_e^{-1/2} \cdot d\omega \quad (28)$$

となる。

いま ω_e 成分の伝達の軌跡が $x-t$ 平面において OABC...I... なる折線で、 $(\omega_e + d\omega)$ 成分が OA'B'C'...I'... で表わされるものとしよう。

さて、 i 部材を ω_e および $(\omega_e + d\omega)$ なる波が通過するのに要する時間はそれぞれ

$$l_i/2(c_L \cdot r_{gi} \cdot \omega_e)^{1/2}, \quad l_i/2\{c_L \cdot r_{gi} \cdot (\omega_e + d\omega)\}^{1/2}$$

従がつてその時間差は

$$\begin{aligned} \frac{l_i}{2(c_L r_{gi})^{1/2}} \{\omega_e^{-1/2} - (\omega_e + d\omega)^{-1/2}\} &= \frac{l_i}{2(c_L r_{gi})^{1/2}} \left\{ \omega_e^{-1/2} - \left(\omega_e^{-1/2} - \frac{1}{2} \omega_e^{-3/2} d\omega \right) \right\} \\ &= \frac{l_i}{4(c_L r_{gi})^{1/2}} \omega_e^{-3/2} d\omega \end{aligned} \quad (29)$$

ゆえに図9において

$$\overline{II} = \frac{\omega_e^{-3/2} \cdot d\omega}{4 c_L^{1/2}} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} \quad (30)$$

さて、 t_j (図9参照) において、 $\omega_e \sim (\omega_e + d\omega)$ のエネルギーは j 部材中でどれだけの長さに拡がっているかを求めよう。IP//I'Q とすれば

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{II} \times V_{gj} = \overline{II} \times 2(c_L \cdot r_{gj} \cdot \omega_e)^{1/2} \\ \overline{QR} &= (\overline{II} + t_j - T_i) \{(\omega_e + d\omega) \text{ の群速度} - \omega_e \text{ の群速度}\} \end{aligned}$$

ゆえに (28), (30) を使つて

$$\begin{aligned} \overline{PR} &= \overline{PQ} + \overline{QR} = \frac{\omega_e^{-3/2} d\omega}{4 c_L^{1/2}} \left(\sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} \right) \times 2(c_L \cdot r_{gj} \cdot \omega_e)^{1/2} \\ &\quad + (t_j - T_i) (c_L r_{gj})^{1/2} \cdot \omega_e^{-1/2} \cdot d\omega \quad \text{2次の微小量は省略} \\ (t_j - T_i) (c_L r_{gj})^{1/2} \omega_e^{-1/2} d\omega &= (t_j - T_i) 2(c_L r_{gj} \cdot \omega_e)^{1/2} \frac{1}{2} \omega_e^{-1} d\omega = x_j \cdot \frac{1}{2} \omega_e^{-1} d\omega \quad \text{を使つて} \\ \overline{PR} &= \frac{1}{2} \omega_e^{-1} d\omega \left(r_{gj}^{1/2} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} + x_j \right) \end{aligned} \quad (31)$$

ゆえに x_j 点におけるエネルギー密度は

$$E_u = \frac{E(\omega_e)}{\frac{1}{2} \omega_e^{-1} \left(r_{gj}^{1/2} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} + x_j \right)} = \frac{E(\omega_e)}{\frac{1}{2} \omega_e^{-1} \cdot X_j} \quad (32)$$

$$\text{ただし } X_j = r_{gj}^{1/2} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} + x_j \quad (33)$$

とおいた。 X_j を等価長さと呼ぶことにしよう。(32) は (26) と全く同じ形をしていることに注意されたい。ここで (33) の X_j の意味を考えて見よう。 X_j を変形すると

$$\begin{aligned} X_j &= r_{gj}^{1/2} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} + x_j = 2(c_L r_{gj} \omega_e)^{1/2} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{2(c_L \cdot r_{gi} \cdot \omega_e)^{1/2}} + x_j \\ &= (j \text{ 部材中の群速度}) \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{(i \text{ 部材中の群速度})} + x_j \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &= (j \text{ 部材中の群速度}) \sum (\text{各区間の伝達所要時間}) + x_j \\ &= V_{gj} T_i + (t_j - T_i) V_{gj} \\ &= V_{gj} t_j \end{aligned} \quad (35)$$

即ち X_j は j 部材の中を時間 t_j の間に ω_e なる周波数のエネルギーが伝達する距離に等しい。

6.4 不連続点におけるエネルギーの平衡

本項では 6.2 (ii), (iii) で述べた部材の交点におけるエネルギーの反射、透過、曲げ波 \leftrightarrow 縦波のエネルギーの変化についてのべる。周波数が連続的に変化している場合を一般的に解くのは難しいので、ここでは周波数一定の定常状態におけるエネルギーの平衡を求め、これを近似的に利用することにする。この定常問題は L. Cremer "The Propagation of Structure-Borne Sound" Dept. Sci. Ind. Res. (Brit. Govt.) No. 1, Series B (1948) において扱われているようであるが、この文献が入手できないので、詳細が不明なため計算を行なうものである。

I ~ N 部材は同一材料とし、又つぎの記号を使つた。

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= A_{ri}/A_{r1} & A_{ri} &: i \text{ 部材の断面積} \\ \zeta_i &= I_i/I_1 & I_i &: \text{ " の断面 2 次モーメント} \\ \mu_i &= r_{gi}/r_{g1} & r_{gi} &: \text{ " の環動半径} \\ \alpha &= \left(\frac{r_{g1}}{c_L} \omega \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

なお部材数が 2 ケ又は 3 ケの時は (38) から適宜に式を選ばよ。

(38) において $\xi_{11}=0$ として解けば I 部材を A_{11} なる曲げ波が 0 に向つて伝達して来る時の解 (各部材の進行波, 近在波の振幅) が求められ, $A_{11}=0$ として解けば I 部材を ξ_{11} なる縦波が伝達して来る時の解が得られる。

さて, $(\xi_1 e^{iK_L x} + \xi_2 e^{-iK_L x}) e^{i\omega t}$ なる縦波によつて x の正方向に伝達するエネルギーは, 時間的に平均すると⁸⁾

$$\frac{1}{2} \omega \cdot E \cdot A_7 K_L \{ |\xi_2|^2 - |\xi_1|^2 \} \quad (40)$$

同様に $(A_1 e^{iK_B x} + A_2 e^{-iK_B x} + A_3 e^{-iK_B x} + A_4 e^{iK_B x}) e^{i\omega t}$ なる曲げ波によつて x の正方向に伝達するエネルギーは, 時間平均で⁸⁾

$$EIK_B^3 \omega \{ |A_3|^2 - |A_1|^2 - 2|A_2||A_4| \sin(\alpha_2 - \alpha_4) \} \quad (41)$$

α_2, α_4 はそれぞれ A_2, A_4 の偏角

と与えられる。現在の問題では $A_4=0$ であるから曲げ伝達エネルギーは

$$EIK_B^3 \omega \{ |A_3|^2 - |A_1|^2 \} \quad (41')$$

である。

(38) を解いて求められる各部材の進行波振幅を使つて, (40), (41) から各部材を原点から遠ざかつて伝達する各々の進行波のエネルギーを計算することができる。ここでは後の実験との関連もあつて, 計算例として「型」のものを図 11, 図 12 にしめた。他の例については文献 9) を参照されたい。

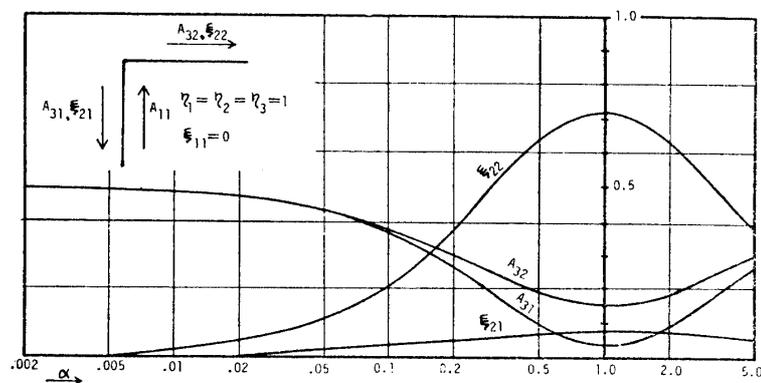


図 11 曲げ波が来た時のエネルギー平衡

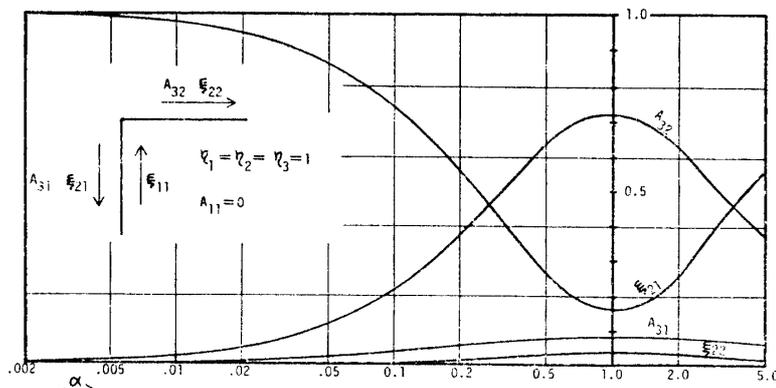


図 12 縦波が来た時のエネルギー平衡

図 11 は 0 点に入つて来る曲げ波のエネルギーを単位にしたときの、反射、透過する波のエネルギーを示したものである。当然のことであるが、反射、透過する波のエネルギーの総和は入つて来る波のエネルギーに等しい。図 12 は 0 点に縦波が入るときを図 11 と同様にして示したものである。

これまでの議論は Bernoulli-Euler の曲げ振動方程式 (1) を出発点としているが、振動数が高くなつて波長が短くなると剪断変形、回転慣性の影響等が無視できなくなり、Timoshenko の曲げ理論等を考える必要が生じる。この限界は板の場合 $\lambda_B \doteq 6h \doteq 20r_g$ (h : 板厚) であるといわれ、これより換算して $\alpha \doteq 0.31$ を得る。さらに振動数が高くなると、Rayleigh Wave 等の現象が生じる。これらの高い振動数での不連続部の振動伝達は今後の研究課題である。勿論その前に艦船衝撃においてその様な高い振動数成分が存在するか、また存在するとしても、装備品の破損に影響するかどうかの問題であるが。

さて、ここで透過係数 T 、反射係数 R を定義する。サフィックスとして曲げ波に f 、縦波に l を使う。一例として

$${}_{if}T_{jl} = \frac{\text{交点から出て行く } j \text{ 部材の縦波エネルギー}}{\text{交点に入つて来る } i \text{ 部材の曲げ波エネルギー}} \quad (42)$$

i : エネルギーが入つて来た部材の番号

f : 入つて来たエネルギーが曲げ波

j : エネルギーが出て行く部材の番号

l : 出て行くエネルギーが縦波

$${}_{ii}R_{jf} = \frac{i \text{ 部材を反射する曲げ波エネルギー}}{\text{交点に入つて来る } i \text{ 部材の縦波エネルギー}} \quad (43)$$

j : j 部材との交点であることをしめす

他はすべて T の場合と同じ

かくして、 T, R は不連続点に入つて来るエネルギーと出て行くエネルギーの比を定義する。

6.5 材料の内部粘性による減衰

振動の伝達途上における減衰 (粘性減衰等のエネルギー損失によるもの) は次のようにして近似的に考慮に入れることができる。

通常内部減衰を考えると、ヤング率 E を

$$E \rightarrow E^* = E(1 + i\eta) \quad (44)$$

なる複素弾性率に置き換えればよい。(44) の η を loss factor と称する。このとき (2) 式において

$$K_B^4 = \frac{\rho \cdot A_r \cdot \omega^2}{E^* \cdot I} = \frac{\rho \cdot A_r \cdot \omega^2}{EI(1 + i\eta)}$$

$\eta \ll 1$ であるから

$$K_B \doteq \left(\frac{\rho \cdot A_r \cdot \omega^2}{EI} \right)^{1/4} \left(1 - \frac{\eta}{4} i \right) = \frac{2\pi}{\lambda_B} \left(1 - \frac{\eta}{4} i \right)$$

従つて (2) 式の中の進行波は前進波を例にとれば

$$e^{-iK_B x} = e^{-\frac{2\pi}{\lambda_B} i x - \frac{2\pi}{\lambda_B} \frac{\eta}{4} x} = e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_B} x - \frac{\pi\eta}{2\lambda_B} x}$$

なる形をもつ。即ち x が 1 波長 λ_B 進むごとに振幅は

$$e^{-\frac{\pi\eta}{2}} \text{ 倍} \quad (45)$$

となる。

$$20 \log_{10} e^{-\frac{\pi\eta}{2}} = -13.6 \eta \text{ dB} \quad (45')$$

即ち、1 波長毎に 13.6 η dB ずつ減少する¹⁰⁾。

この定常振動における減衰を衝撃伝達問題に流用するため、問題としている点までに幾波長あるかを計算する。

$$\lambda_B = 2\pi / K_B = 2\pi / \left(\frac{\omega}{c_L r_{gj}} \right)^{1/2} \text{ であるから}$$

$$\text{波数} = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{\frac{\omega}{c_L r_{gi}}^{1/2}} + \frac{x_j}{\frac{\omega}{c_L r_{gj}}^{1/2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega}{c_L r_{gj}} \right)^{1/2} \left\{ r_{gj}^{1/2} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} + x_j \right\}$$

$$= X_j / \left(\frac{2\pi}{K_{Bj}} \right) = X_j / \lambda_{Bj} \quad (46)$$

故に振幅は $e^{-\frac{\pi\eta}{2} \frac{X_j}{\lambda_{Bj}}}$ 倍

従つて x_j におけるエネルギーは

$$e^{-\pi\eta \frac{X_j}{\lambda_{Bj}}} \quad (47)$$

となるのがわかる。

ここで内部減衰の程度を略算して見よう。

鋼の場合 $\eta = 10^{-4}$ 程度といわれているので¹⁰⁾波長の 1000倍伝達しても

$$13.6 \times 10^{-4} \times 10^3 = 1.36 \text{ dB}$$

しか減衰しないことになる。従つて内部減衰がきいてくるのは波長の短い、即ち高い周波数の場合である。

6.6 2ケ以上の部材が連結されている時のエネルギー密度

6.3, 6.4, 6.5 において、不連続点で構成された構造のエネルギー密度に関するファクターを逐一検討したので、これらを総合すれば、任意点のエネルギー密度が求められる。図 13 を例にとつて説明しよう。点 O に衝撃力が加えられた時の D 点の ω_e 成分のエネルギー密度を考える。最初に O 点からストレートに OABCD という経路で伝達する曲げ波を考えると、 $t=0$ における O 点のエネルギー密度を $E(\omega_e)$ として

$$E_u = (T_{2f} \cdot T_{3f} \cdot T_{4f}) \left(\frac{E(\omega_e)}{\frac{1}{2} \omega_e^{-1} X_d} \right) \cdot e^{-\pi\eta \frac{X_d}{\lambda_{B4}}} \quad (48)$$

$$\text{ただし } X_d = r_{g4}^{1/2} \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} + l_4$$

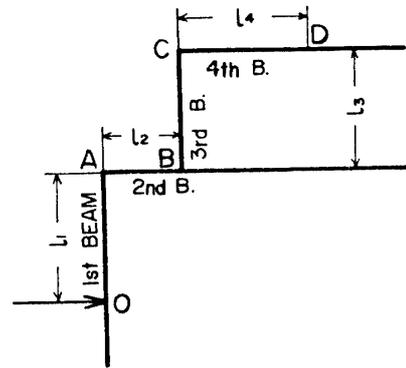


図 13 梁組立構造

(48)の第1項は不連続点における透過による減少，第2項は曲げ波の分散性によるもの，第3項は内部粘性による減衰をしめす。

同様に OABABCD (B, A で1回ずつ反射) なる伝達をする波については

$$E_u = T_{2f} \cdot R_{3f} \cdot R_{1f} \cdot T_{3f} \cdot T_{4f} \frac{E(\omega_e)}{\frac{1}{2} \omega_e^{-1} X_d'} e^{-\pi\eta \frac{X_d'}{\lambda_{B4}}} \quad (49)$$

$$\text{ただし } X_d' = r_{g4}^{1/2} \sum_{i=1}^3 \frac{l_i}{r_{gi}^{1/2}} + 2 r_{g4} \frac{l_2}{r_{g2}^{1/2}} + l_4 \quad (50)$$

となる。

以上の例では曲げ波→曲げ波の変化についてだけしか考えなかつたが、必要に応じ曲げ波↔縦波の変化を考えればよい。以上の方法で任意の点で反射，透過を行なう波を考慮することができる。

7 実 験

これまでの理論をたしかめるため実験を行なつた。

7.1 実験方法

試験要領の概要を図 14 にしめす。衝撃力の加え方、計測方法等は §4 で説明したのと同様である。図 15 に試験片をしめす。×印は打撃点、一印は歪ゲージの位置をしめす。

7.2 実験結果

図 16 は試験片 B (20 m 長さの直線梁, 10 m は板厚 3 mm, 他の 10 m は板厚 6 mm) の中央から 1 m の 3 mm 板厚の部分に空気銃で打つたときの各点の歪の時間的变化を示す。表示方法は図 5 と同じである。図 16 で注意すべき点は板厚が 3 mm から 6 mm に

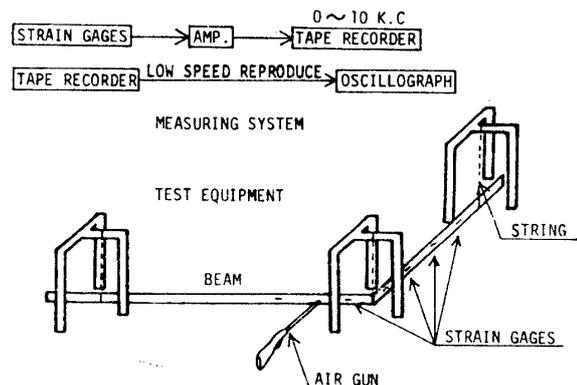


図 14 実験要領

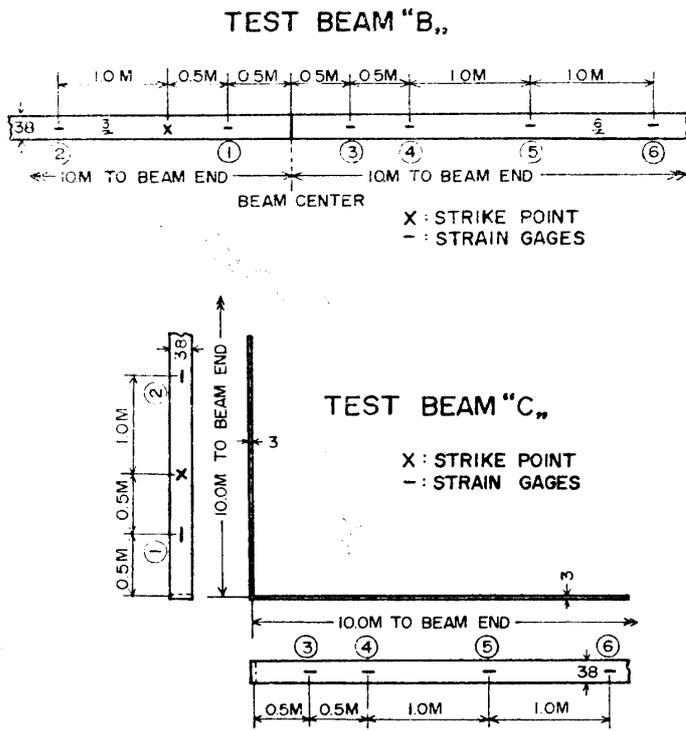


図15 試験片 B 及 C

図11から1K.C. ($\alpha=0.032$) では

$${}_1fT_{2f} \doteq {}_1fR_{2f} = 0.45$$

この値を使い計測点①の実測値を基準として求めたストレートに伝達する曲げ波の計算値が表1に示してある。表1の実験値と計算値とは試験片 A, B, C いずれの場合にも極めてよく一致し、本論文の近似計算法が妥当であ

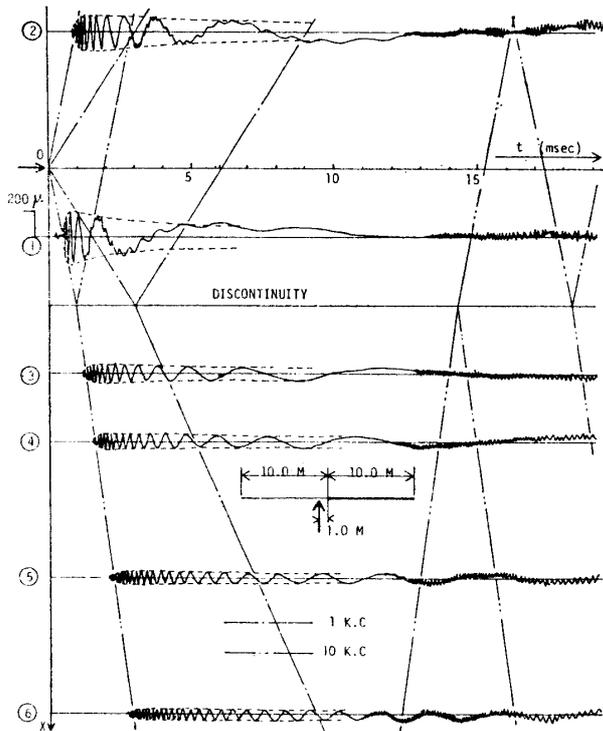


図16 真直棒の衝撃歪

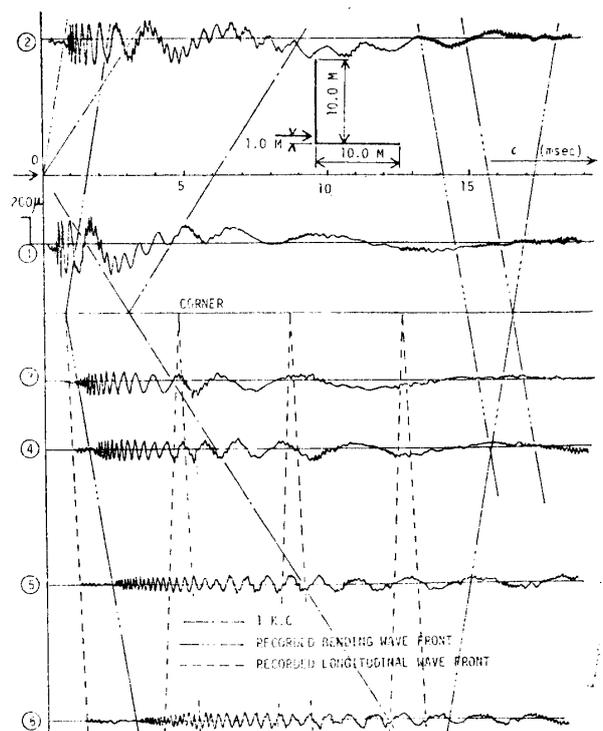


図17 ㄱ型梁の衝撃歪

変る点で反射がおこること、および板厚が厚くなると伝達速度が速くなるため、一定周波数の波の $x-t$ 面における軌跡が屈折することである。

板厚が1:2の場合について6.4の要領により計算を行なうと

$${}_1fT_{2f} = 0.935 \quad (51)$$

を得る。この値は周波数に関係せず一定値である。

又、梁が屈折していないので縦波は生じない。表1に各計測点の実測された歪の包絡線振幅を1K.C.の場合を例にとつて、試験片 A, C の場合とともにしめた。この表には計測点①の実測値を基準とし、(51)等の透過係数を使つて計算した①以外の各点の歪の計算値を併記しておいた。

図17は試験片C(2本の10mの梁を直角に連結したもの、板厚3mm)の連結点から1mの位置を空気銃で打撃したときの歪をしめす。図17の特徴は連結点での反射および縦波の発生である。

表 1 実験値及計測値比較

| 試験片 | 図番号 | r_{01} mm | r_{02} mm | ${}_1fT_{2f}$ | 歪 (10^{-6}) | | | | | | 計測点 |
|-----|------|-------------|-------------|---------------|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| A | 図 5 | 0.87 | | | 327 | 230 | 188 | 165 | 130 | 112 | 実測 計算 |
| | | | | | | 232 | 189 | 164 | 136 | 116 | |
| B | 図 16 | 0.87 | 1.73 | 0.935 | 312 | 225 | 110 | 102 | 83 | 70 | 実測 計算 |
| | | | | | | 221 | 109 | 99 | 82 | 72 | |
| C | 図 17 | 0.87 | 0.87 | 0.45 | 345 | 225 | 140 | 120 | 98 | 78 | 実測 計算 |
| | | | | | | 244 | 134 | 116 | 95 | 82 | |

ることを示している。

図 17 には、縦波（速度は $c_L=5120$ m/sec）の軌跡を点線でしめしておいた。打点から曲げ波の先端波（約 14.5 K. C. に相当）が角（不連続点）に達したときに縦波が生じ、これは $c_L=5120$ m/sec で II 部材中を伝達して行くこと、縦波は分散性がないのでその形を変えないで伝達すること、一度 II 部材に生じた縦波は II 部材の中を何回も往復し、歪波形を複雑にさせること等を図 17 から知ることができる。これらのことは図 11 において ${}_1fT_{2f}$ は周波数が高いとき大きくなること、図 12 から縦波が入る時は縦波のまま反射するエネルギーが大きいこと等から理論的に説明することができる。図 17 の右の方に曲げ波の反射先端波の計算軌跡を入れておいたがこの点より後の方に曲げ反射波が小さい振幅となつて表われている。

不連続点における反射波は、図 16, 17 いずれの場合も、計測点①で $t=1.5$ mm sec, ②で $t=2.3$ mm sec 位で生じること、その大きさは §6 の方法から予想されるものと一致していること等を知ることができる。

8 結 論

梁構造における衝撃伝達を、エネルギー伝達という立場から解析し、近似解を得たので、実験による確認および厳密解が得られている無限長梁について、厳密解との比較を行ない、大要つぎのごとき結論を得た。

1. 無限長梁について、近似解を厳密解と比較した結果、 $(r^2/a^2)t > 4$ のとき梁の中のエネルギー密度、振幅の包絡線、瞬時周期等の厳密解が近似解に収束することがわかつた。この近似解を使えば、任意の衝撃（任意の変位、初速）の場合でも、梁の応答が容易に求められる。

2. 異部材、角等の不連続点がある梁構造の場合でも、近似計算法で実験値をよく説明できることがわかつた。

以上から、本論文の近似計算が妥当なことを知ることができた。この近似計算法を、コンピューター用にプログラム化し、より複雑な構造に適用する事を計画中である。

終りに本研究の実施にあたりご協力頂いた防衛庁技術研究本部の関係各位および諸計算を行なつた山口彰君に厚く謝意を表します。特にご討論および適切なお助言を頂いた東大山本善之教授、ご討論頂いた日大鬼頭史城教授には衷心よりお礼申し上げます。

文 献

- 1) 野崎政治：無限長の梁を伝わる振動の遮断について、造船協会論文集，第 119 号，1966
- 2) Lord Rayleigh：The Theory of Sound, Dover Pub., 1945
- 3) P. M. Morse：Vibration and Sound, McGRAW-HILL Book Company, Inc., 1948
- 4) 高橋秀俊：線型分布定数系論，岩波講座 基礎工学，岩波書店，1968
- 5) M. A. Medick：On Classical Plate Theory and Wave Propagation, Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, June 1961
- 6) 青柳史郎：はりの横衝撃，三井造船技報，第 56 号，1966
- 7) C. O. Dohrenwend, D. C. Drucker and Paul Moore：Transverse Impact Transient, Experimental Stress Analysis, Vol. 1, No. 2, 1943
- 8) 野崎政治：多くの附加物を有する梁の中の振動伝達について，造船協会論文集，第 121 号，1967
- 9) 野崎政治，その他：船体構造の振動衝撃に関する研究（その 1）防衛庁技報，第 7 巻第 59 号，1968
- 10) L. L. Beranek：The Transmission and Radiation of Acoustic Waves by Solid Structures, in Noise Reduction, edited by L. L. Beranek, McGRAW-HILL Book Company, Inc.

付録 群速度について

群速度の説明は上述の文献も含めて、唸りのような僅かに振動数の異つた2つの進行波を重畳させた場合の wave packet の進行速度として説明するのが通常であるが、単一周波数の進行波についてもエネルギーの伝達速度を求めることができる。先ず曲げ進行波が進行しているとき、梁のある仮想面 P を通るエネルギー量を求める。

振動を $y = A \cos(\omega t - K_B x)$ とあらわすと

$$P \text{ を単位時間に通過するエネルギー} = EI(y'' \cdot \dot{y} - y' \cdot \dot{y}') = EIK_B^3 \omega A^2 \quad (\text{A1})$$

一方梁の単位長さに存在するエネルギー (エネルギー密度) は

$$\begin{aligned} \text{歪エネルギー} &= M^2/2 EI = (EIy'')^2/2 EI = \frac{EI}{2} A^2 K_B^4 \cos^2(\omega t - K_B x) \\ &= \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - K_B x) \end{aligned}$$

$$\text{運動エネルギー} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - K_B x)$$

$$\therefore \text{エネルギー密度} = (\text{歪エネルギー}) + (\text{運動エネルギー}) = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \quad (\text{A2})$$

(A1), (A2) より

$$\begin{aligned} \text{エネルギーの伝達速度} &= \frac{P \text{ を単位時間に通過するエネルギー}}{\text{エネルギー密度}} \\ &= \frac{EIK_B^3 \omega A^2}{\frac{1}{2} m A^2 \omega^2} = 2 \frac{\omega}{K_B} \\ &= 2 \times (\text{位相速度}) \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

\therefore エネルギーの伝達速度が位相速度の2倍であることがわかる。