(昭和47年10月日本造船学会秋季講演会において講演)

流体圧縮による衝撃圧に及ぼす周辺構造物の弾性変形の影響

正員 高 木 又 男* 栂 野 佳 子*

On the Impulsive Pressure Acting on Elastic Structures Induced by Compression of Fluid

by Matao Takagi, *Member* Yoshiko Togano

Summary

The authors carried out theoretical investigations into the impulsive pressure acting on elastic structures.

In the paper, the following two items are mainly discussed ;

(1) On the distribution of impulsive pressure acting on elastic structures induced by compression of fluid.

(2) On the possibility of calculation of the deformation of elastic structures using simple dynamic model without considering the strict dynamic behavior of the impulsive pressure.

The following conclusions were obtained :

(1) When the impulse on the fluid is cushioned by the likes of a spring, the impulsive pressure is distributed uniformly except some special cases. On the other hand, when the impulse is not cushioned, the pressure is not distributed uniformly by the occurence of pressure of sound wave.

(2) When the natural period of the structure is less than the duration of the impulsive pressure, the reasonable elastic deformation can be estimated by an proper approximate method.

1 緒 言

最近発生した大型船の海難事故を契機として，衝撃圧に関する研究が，各所の研究機関で行なわれていることは周知のとおりである。本研究は，これらに関連した基礎的事項についての理論的研究で，さしあたり意図するところは，次の2点である。

A) 構造物の衝撃圧に対する強度の実験では，Fig.1.1 に模型的に示すような装置が使用されるが，圧力計の値が場所的に異なることが報告されている[1]。そこで，簡単な理論モデルによって，実際の流体圧，圧力計による計測圧力，弾性構造物の弾性応答などの関係を明らかにする。

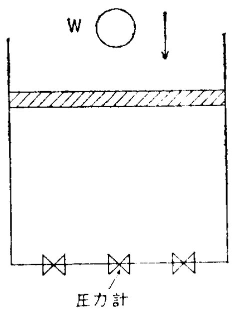

Fig.1.1 重量物落下衝撃試験装置

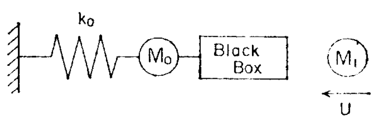

Fig.1.2 衝撃機構

B) 一般に，構造物と剛体，または流体が他の流体を介して正面衝撃的に衝突する場合は，その力学的構造が極めて複雑であるが，その応答系を図で示すと Fig.1.2 に示すようなものが一般に考えられる。即ち，質量 M_1 なる物体（流体も含めて）が U なる速度で，質量 M_0，バネ常数 k_0 なる構造物に衝突したとするとき，衝撃的機構によって定ま

* 日立造船 K.K. 技術研究所

る black box の応答系が介在するものと考える。ここで意図するところは，この black box を簡単な力学系で置換し，衝突に関与する量として，M_1 と U を把握すれば，構造物の変形などが概略的に推定できるかどうかということである。本論文では，black box として，2つの例について検討する。

2 強制変位による流体圧縮の衝撃圧（1次元振動）

緒言 A）に関連して，Fig.2.1 に示すように，長さ l の水柱を端点Aで周期的に強制変位させる。その運動をA点で $u_A \sin \omega t$，O点で $u_O \sin \omega t$ とする。ただし，u_A, u_O は速度の振幅を，ω は強制運動の円周波数を示す。

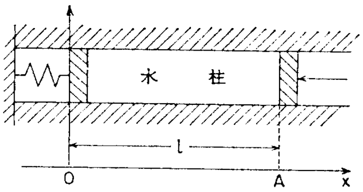

Fig.2.1 1次元強制振動

ここで $u_A > u_O$ とすれば，流体圧縮による衝撃圧を発生する。このモデルは，Fig.2.2 に示すような実験装置の場合に近似的に適用できるものと思われる。

流体運動は無限小変位をすると考えると，音波の理論と同様にしてその速度ポテンシャル Φ は，

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

を満足する。ただし，a は水中での音速を示す。

初期圧力を p_0 とすれば，任意の時間および位置の圧力は

$$p - p_0 = \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{2.2}$$

によって求められる。ただし，

p：圧力，ρ_0：p_0 のときの流体密度

である。

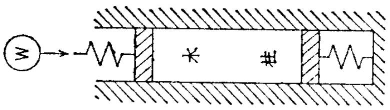

Fig.2.2 クッション付衝撃試験装置

Φ に対する境界条件は，

$$x=0 \text{ で } \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_O \sin \omega t \tag{2.3}$$

$$x=l \text{ で } \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_A \sin \omega t \tag{2.4}$$

初期条件は

$$t=0 \text{ で } \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \tag{2.5}$$

(2.1) で非斉次境界条件を満足する解を

$$\Phi_e = \phi_e \sin \omega t \tag{2.6}$$

とおけば，(2.3), (2.4) を用いて

$$\phi_e = -\frac{a}{\omega}\left\{\frac{u_0}{\cos\frac{l\omega}{2a}} \times \sin\left(\frac{l-2x}{2}\cdot\frac{\omega}{a}\right) + \frac{u_A - u_O}{\sin\frac{\omega l}{a}} \cos\frac{\omega}{a}x\right\} \tag{2.7}$$

を得る。

次に，初期条件を満足するように，斉次境界条件を満足する解を

$$\Phi_f = \sum_{m=1}^{\infty} \cos p_m x \{A_m \cos \nu_m t + B_m \sin \nu_m t\} + Ct \tag{2.8}$$

とおけば，(2.5) を用いれば Fourier の定理から A_m, B_m, C を定めることができる。ただし，

$$p_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \nu_m = \frac{a\cdot m\cdot \pi}{l} \tag{2.9}$$

であるから，A_m, B_m の振動は非常に早く，また，簡単な計算（C を求める計算を参照のこと）によって明らかなように，

$$\frac{A_m}{\phi_e}\cdot\frac{B_m}{\phi_e} = O\left(\frac{l\omega}{am}\right)$$

であるから，$l\omega/a \ll 1$ とすれば，この場合には音波圧を考える必要はない。そこで，ここでは C のみを求める。

(2.6), (2.7) および (2.8) より

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_f = \phi_e \sin \omega t + \sum_{m=1}^{\infty} \cos p_m x \{A_m \cos \nu_m t + B_m \sin \nu_m t\} + Ct \tag{2.10}$$

従って，(2.5) より

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]_{t=0}=\omega\phi_e+\sum_{m=1}^{\infty}\cos p_m x\{B_m\nu_m\}+C=0 \tag{2.11}$$

(2.11) を 0 から l まで積分することによって

$$C=\frac{-1}{l}\int_0^l \omega\phi_e dx=\frac{u_O}{\cos\dfrac{l\omega}{2a}}\cdot\frac{a^2}{l\omega}\left[\cos\frac{l\omega}{2a}-1\right]+\frac{a^2}{l\omega}(u_A-u_O) \tag{2.12}$$

ここで，音波にもとづく振動を無視すると

$$p-p_0=-\rho_0 a\left\{\frac{u_O}{\cos\dfrac{l\omega}{2a}}\times\sin\left(\frac{l-2x}{2}\,\frac{\omega}{a}\right)+\frac{1}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}(u_A-u_O)\cos\frac{\omega}{a}x\right\}\cos\omega t$$
$$+\frac{u_O}{\cos\dfrac{l\omega}{2a}}\times\frac{\rho_0 a^2}{l\omega}\left[\cos\frac{l}{2}\frac{\omega}{a}-1\right]+\frac{\rho_0 a^2}{l\omega}(u_A-u_O) \tag{2.13}$$

(2.13) において $l\omega/a\to 0$ と考え，$\sin(l\omega/a)$，$\cos(l\omega/a)$ の最低次のみをとると

$$p-p_0=-\rho_0\left(\frac{l}{2}-x\right)u_O\omega\cos\omega t+\frac{\rho_0 a^2}{l\omega}(u_A-u_O)(1-\cos\omega t) \tag{2.14}$$

それぞれの端点における変位を ξ_A, ξ_O とすれば，

$$-u_O\omega\cos\omega t=-\ddot{\xi}_O,\quad \frac{(u_A-u_O)}{\omega}(1-\cos\omega t)=\xi_A-\xi_O$$

であるから，(2.14) は

$$p-p_0=-\rho_0\left(\frac{l}{2}-x\right)\ddot{\xi}_O+\rho_0 a^2\frac{(\xi_A-\xi_O)}{l} \tag{2.15}$$

となる。第1項は，加速度に比例する附加質量の抵抗であり，第2項は流体圧縮による圧力である。明らかに，圧縮による圧力は場所的に一様であり，パスカルの原理を満たしている。附加質量の抵抗は，中央点を境にして符号が逆になる。水を押す側は正の抵抗を，はなれる側が負の抵抗を受けるのは当然である。

(2.15) の $x=0$ における第1項と第2項の比を λ_p とすれば，

$$\lambda_p=\frac{\alpha^2|\xi_O|}{2|\xi_A-\xi_O|}\qquad ただし\quad \alpha=\frac{\omega l}{a} \tag{2.16}$$

ξ_O を ξ_A の関数として求めるため，O点の構造物の質量を M，その固有振動数を ω_0 とすれば，M の運動方程式は

$$\ddot{\xi}_O+\omega_0^2\xi_O=-\frac{\rho_0 lS}{2M}\ddot{\xi}_O+\frac{\rho_0 lSa^2}{M\cdot l^2}(\xi_A-\xi_O) \tag{2.17}$$

ただし，S：水柱の断面積である。

$$\frac{\rho_0 lS}{M}=\beta,\quad \frac{\omega l}{a}=\alpha,\quad \frac{\omega_0}{\omega}=r_\omega \tag{2.18}$$

として，(2.17) を解けば，

$$\xi_O\fallingdotseq\xi_A\left\{1-\alpha^2\left(1+\frac{\beta}{2}+r_\omega^2\right)\frac{1}{\beta}\right\} \tag{2.19}$$

これから，

$$\lambda_p=\frac{\beta}{2\left(1+\dfrac{\beta}{2}+r_\omega^2\right)} \tag{2.20}$$

を得る。

(2.20) 式から，水の重量が構造板の重量より大きく，かつ，強制振動の振動数が構造板の固有振動数と同じ，あるいはそれ以上のオーダーのときは，附加質量による抵抗圧力もかなりの大きさを占めるようになる。

3 強制変位による流体圧縮の衝撃圧（2次元振動）

前章の解析により，附加質量による抵抗圧力がかなりの大きさを占めることがあることが示されたが，これは振動の形態によって場所的に変化することが考えられる。

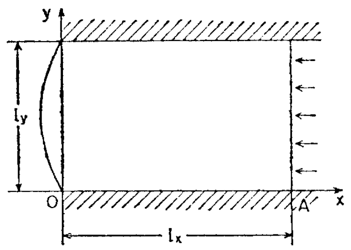

Fig. 3.1 2次元強制振動

これを調べるために，Fig. 3.1 に示すような強制振動を考える。

長さ l_x，幅 l_y の水柱をA端で $u_A/\omega(1-\cos\omega t)$，O端で，$u_O/\omega\cdot(1-\cos\omega t)\cdot\sin(\pi\cdot y/l_y)$ なる強制変位をさせたとする。

速度ポテンシャルの満足すべき方程式は

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) \tag{3.1}$$

境界条件は

$$x=0 \text{ で } \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=u_O\sin\omega t\cdot\sin\frac{\pi}{l_y}y \tag{3.2}$$

$$x=l_x \text{ で } \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=u_A\sin\omega t \tag{3.3}$$

$$y=0 \text{ または } l_y \text{ で } \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \tag{3.4}$$

初期条件は

$$t=0 \text{ で } \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \tag{3.5}$$

である。

(3.4) を満足し，(3.2), (3.3) の非斉次境界条件を満足する解を得るために

$$\Phi_e=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\sin p_m x+B_m\cos p_m x)\cos q_m y\sin\omega t \tag{3.6}$$

とおく。ただし，

$$q_m=\frac{m\pi}{l_y}, \quad p_m=\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2} \tag{3.7}$$

である。(3.2), (3.3) を満足するように係数 A_m, B_m を決定すれば，

$$A_0=\frac{2u_1}{p_0\pi}, \quad B_0=\frac{1}{p_0\sin p_0 l_x}\left(\frac{2}{\pi}u_O\cos p_0 l_x-u_A\right)$$

$$A_m=0 \quad \text{for} \quad m:\text{odd}$$

$$=\frac{u_1}{p_m\pi}\left[\frac{4}{1-m^2}\right] \quad \text{for} \quad m:\text{even} \tag{3.8}$$

$$B_m=\frac{\cos p_m l_x}{\sin p_m l_x}A_m \tag{3.9}$$

従って

$$\Phi_e=\left[\sum_{m=2}^{\infty}A_m\cos p_m(x-l_x)\cos q_m y\cdot\frac{1}{\sin p_m l_x}\right.$$

$$\left.+\frac{u_O}{p_0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sin p_0 l_x}\cos p_0(x-l_x)-\frac{u_A}{p_0\sin p_0 l_x}\cos p_0 x\right]\sin\omega t \tag{3.10}$$

初期条件を満足させるために，自由振動解を附加し

$$\Phi=\Phi_e+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_{mn}\cos q_n y\right)\cos\nu_m x\cdot\sin\omega_{mn}t$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}C'_{mn}\cos q_n y\right)\cos\nu_m x\cdot\cos\omega_{mn}t+Ct \tag{3.11}$$

とおく。ただし

$$\nu_m=\frac{m\pi}{l_x}, \quad q_n=\frac{n\pi}{l_y}, \quad \omega_{mn}=a\sqrt{\nu_m^2+q_n^2}$$

である。前述したように，ω_{mn} は大きな値になるので，いまはこれらについて考えない。

$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{t=0}=0$ から，Cを決定すると

$$C=-\frac{\omega}{l_x}\left[\frac{2}{\pi}\frac{u_O}{p_0^2}-\frac{u_A}{p_0^2}\right] \tag{3.12}$$

(3.11), (3.12) から

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\omega\left[\sum_{m=1}^{\infty}A_m\frac{\cos p_m(x-l_x)}{\sin p_m l_x}\cos q_m y\cdot\cos\omega t+\frac{u_O}{p_0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sin p_0 l_x}\cos p_0(l_x-x)\cos\omega t\right.$$
$$\left.-\frac{2u_O}{l_x\pi p_0{}^2}-\frac{u_A\cos p_0 x}{p_0\sin p_0 l_x}\cos\omega t+\frac{u_A}{p_0{}^2 l_x}\right] \tag{3.13}$$

$\omega l/a\rightarrow 0$ のときは，$x=0$ において

$$p-p_0=\sum_{m=2,4\cdots}^{\infty}\rho_0 l_x\frac{l_y}{l_x}\frac{\cos q_m y}{\pi^2\sin\frac{\pi}{l_y}y}\frac{4}{m(m^2-1)}\coth\left(\frac{l_x}{l_y}\cdot m\pi\right)\cdot\ddot{\xi}_0+\rho a^2\frac{\xi}{l} \tag{3.14}$$

ただし，

$$\dot{\xi}_0=u_O\sin\omega t\cdot\sin\frac{\pi}{l_y}y \tag{3.15}$$

$$\xi=\frac{1}{\omega}\left(u_A-\frac{2}{\pi}u_O\right)(1-\cos\omega t) \tag{3.16}$$

で，ξ は幅方向に変化する圧縮量の平均値を示す。したがって，(3.14) は平均圧縮にもとづく圧力と，幅方向に変化する附加質量による抵抗よりなりたっていることがわかる。

附加質量に比例する抵抗の幅方向の分布 μ は次式によって計算することができる。

$$\left.\begin{aligned}\mu&=\frac{E(y)}{E(0)}\\ E(y)&=\sum_{m=2,4\cdots}^{\infty}\frac{4}{m(m^2-1)}\coth\left(\frac{l_x}{l_y}m\pi\right)\cos q_m y\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

また，附加質量としての分布を一次元値 $(\rho/2)l_x$ に対する比で求めると，幅方向の加速度の分布を考慮して

$$H(y)=\frac{l_y}{l_x}\cdot\frac{2}{\pi^2}E(y) \tag{3.18}$$

から計算できる。

μ および $H(y)$ の計算結果の1例を Fig.3.2 に示す。(3.14) および Fig.3.2 の計算結果から，端部では，圧力は平均値より大きく，中央部では低くなる。その程度は，前章の結果をも勘案して推定することができる。

以上の計算から，振動系の構成によってかなり数値的な差はあるが，一般に音波圧のようなはげしい衝撃圧を伴わない場合でも，附加質量の場所的不斉によって，計測圧力はかなりの場所的不斉を生ずることもあることが結論される。

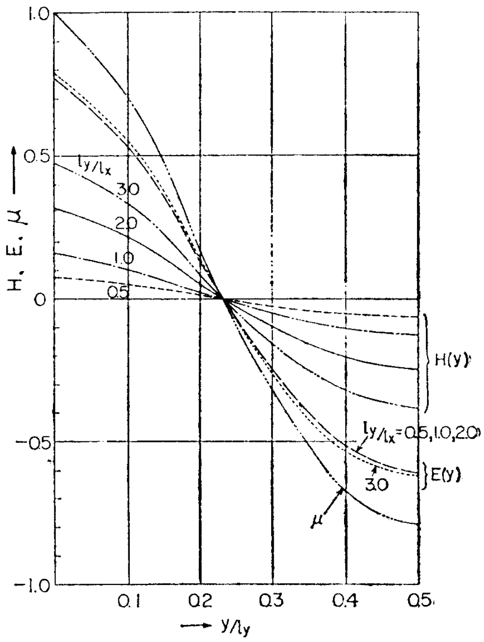

Fig.3.2 付加質量の分布

4 直接衝撃による流体圧縮の衝撃

2および3章では，圧縮板が速度が0から正弦状に変化する場合をとり扱ったので，音波圧のようなはげしい衝撃圧は圧力計にはほとんど出ないことが明らかになった。

本章では，緒言A）に関連して，圧縮板がある速度をもって突然動き出した場合の流体圧の模様を明らかにするとともに，緒言B）に関連して，衝突物体に対する衝撃圧を受ける構造要素の応答が，流体圧縮を介してどのようになるかを検討してみる。

4.1 厳　密　解

Fig.4.1 に示す振動系を考える。ここに，

M_1：圧縮板の質量

M_0：構造板の質量

k_0　：構造板のバネ常数

ξ_1, ξ_0：M_1, M_0 の初期位置よりの変位

である。

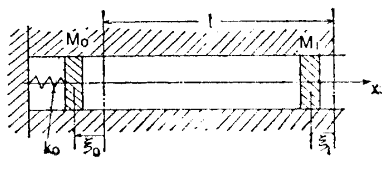

Fig.4.1 衝　撃　振　動

運動方程式は，流体内部では速度ポテンシャルΦが

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

を満足することは前章までと同様である。また，圧縮板については，

$$M_1\ddot{\xi}_1=\rho S\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{x=l} \tag{4.2}$$

ただし，S：水柱の断面積

構造板については

$$M_0\ddot{\xi}_0=-k_0\xi_0-\rho S\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{x=0} \tag{4.3}$$

速度ポテンシャルの境界条件は，

$$x=l \text{ で } \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\dot{\xi}_1 \tag{4.4}$$

$$x=0 \text{ で } \quad -\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\dot{\xi}_0 \tag{4.5}$$

初期条件は，$t=0_+$ で

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-U \qquad (x=l) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0 \qquad (l>x\geqq 0) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \qquad (l>x\geqq 0) \tag{4.8}$$

また，$t=0_+$ で

$$\xi_0=\dot{\xi}_0=\xi_1=0 \tag{4.9}$$

$$\dot{\xi}_1=U \tag{4.10}$$

とする。

以下，St.-Venant[2] らに従ってこの問題の解を考える。

(4.1) の一般解は，f, f_1 を任意の関数として

$$\Phi=f(at-x)+f_1(at+x) \tag{4.11}$$

と書くことができる。(4.7), (4.8) より

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{t=0_+}=-f'(0_+-x)+f_1'(0_++x)=0 \tag{4.12}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{t=0_+}=a\{f'(0_+-x)+f_1'(0_++x)\}=0 \tag{4.13}$$

(4.12), (4.13) の2式より

$$f'(-x)=0 \qquad (l>x\geqq 0)$$

$$f_1'(x)=0 \qquad (l>x\geqq 0)$$

あるいは，共通変数zを用いて書きかえると

$$f'(z)=0 \qquad (0\geqq z>-l) \tag{4.12$'$}$$

$$f_1'(z)=0 \qquad (l>z\geqq 0) \tag{4.13$'$}$$

(4.6) より

$$-\{-f'(0_+-l)+f_1'(0_++l)\}=U$$

(4.12)′ を考慮して，結局

$$f_1'(l+0_+)=-U \tag{4.14}$$

を得る。また，(4.9) を (4.3) に代入して明らかなように

$$[\ddot{\xi}_0]_{t=0_+}=0$$

であるから

$$[\ddot{\xi}_0]_{t=0_+}=\left[-\frac{\partial\Phi}{\partial t\partial x}\right]_{\substack{x=0\\t=0_+}}=a\{f''(0_+)-f_1''(0_+)\}=0$$

従って，(4.13′) を考慮して

$$f''(0_+)=0 \tag{4.15}$$

次に，(4.2) と (4.4) から

$$f''(at-l)-f_1''(at+l)=\frac{\rho S}{M_1}\{f'(at-l)+f_1'(at+l)\} \tag{4.16}$$

また，(4.3) と (4.4) から

$$f'''(at)+\frac{\rho S}{M_0}f''(at)+\frac{\omega_0^2}{a^2}f'(z)=f_1'''(at)-\frac{\rho S}{M_1}f_1''(at)+\frac{\omega_0^2}{a^2}f_1'(at) \tag{4.17}$$

ここに

$$\omega_0^2=\frac{k_0}{M_0}$$

である。(4.16), (4.17) を無次元化するために

$$f=lUF(z_0),\quad f_1=lUF_1(z_0),\quad at=lz_0$$

とおき，さらに

$$F(z_0)=\int_0^{z_0}G(z_0')dz_0',\quad F_1(z_0)=\int_0^{z_0}G_1(z_0')dz_0' \tag{4.18}$$

とおけば，f, f_1 を決める方程式は，

$$\frac{\omega_0 l}{a}=\alpha,\quad \frac{\rho Sl}{M_0}=\beta,\quad \frac{\rho Sl}{M_1}=\gamma$$

とおいて

$$G''(z_0)+\beta G'(z_0)+\alpha^2G(z_0)=G_1''(z_0)-\beta G_1(z_0)+\alpha^2G_1(z_0) \tag{4.19}$$

$$G_1'(z_0)+\gamma G_1(z_0)=G'(z_0-2)-\gamma G(z_0-2) \tag{4.20}$$

となる。(4.19) は同じ z_0 の値に対し，G_1 が分かっておれば G を求めることができ，(4.20) は，z_0-2 の G の値が分かっていれば G_1 の値を求めることができることを示している。

(4.13) より

$$G_1(z_0)=0 \qquad (1>z_0\geqq 0)$$

であるから，(4.19) に代入し，(4.12), (4.15) から $G(0)=G'(0)=0$ を考慮して積分すれば

$$G(z_0)=0 \qquad (1>z_0\geqq -1) \tag{4.21}$$

を得る。この値を初期値として，順次 (4.18), (4.19) を用いれば任意の z_0 に対する G, G_1 の値を求めることができる。G, G_1 の数値積分の詳細については附録に詳述する。

G, G_1 の解が定まると，圧力，速度などが次のように求められる。すなわち圧縮板に対し

$$\text{圧力}:\ \frac{p-p_0}{\rho U^2}=-\frac{\delta}{\alpha}\{G(z_0-1)+G_1(z_0+1)\} \tag{4.22}$$

$$\text{速度}:\ \frac{\dot{\xi}_1}{U}=G(z_0-1)-G_1(z_0+1) \tag{4.23}$$

$$\text{変位}:\ \frac{\xi_1}{l}=\frac{\alpha}{\delta}\{F(z_0-1)-F_1(z_0+1)\} \tag{4.24}$$

また，構造板に対し

$$\text{圧力}:\ \frac{p-p_0}{\rho U^2}=-\frac{\delta}{\alpha}\{G(z_0)+G_1(z_0)\} \tag{4.25}$$

$$\text{速度}:\ \frac{\dot{\xi}_0}{U}=G(z_0)-G_1(z_0) \tag{4.26}$$

$$\text{変位}:\ \frac{\xi_0}{l}=\frac{\alpha}{\delta}\{F(z_0)-F_1(z_0)\} \tag{4.27}$$

ただし，$\delta=\omega_0 l/U$ である。

両端の変位差による流体圧縮による平均圧力は，

$$\frac{\overline{p-p_0}}{\rho U^2}=-\frac{\delta}{\alpha}\{F(z_0)-F(z_0-1)-F_1(z_0)+F_1(z_0+1)\} \tag{4.28}$$

この値は，圧力の場所的平均値と一致する。

構造板の位置で圧力計をとりつけ，これが流体圧に何等影響しないとして，(4.25) の圧力を受けたとき，その指示値を求めると，

$$\left[\frac{p-p_0}{\rho U^2}\right]_{\text{guage}}=\frac{\omega_G}{\omega_0}\alpha\int_0^{z_0}\frac{\delta}{\alpha}\{G(z_0')+G_1(z_0')\}\sin\left\{\alpha\frac{\omega_G}{\omega}(z_0-z_0')\right\}dz_0' \tag{4.29}$$

となる。ただし，圧力計を単振子系でおきかえ，その固有振動数を ω_G としている。$\omega_G/\omega_0=1$ の場合は，(4.27) で求めた構造板の変形応力と一致する。また，$\omega_G/\omega_0\to\infty$ のときは流体圧を忠実に記録する。

4.2 近似計算

4.1 の水柱の振動の固有振動数 a/l は ω_0 に比して一般に充分大きいとみられるから，水柱を剛体としたときの構造板の応答を求めてみる。4.1 の解析では，圧縮板は内部流体圧の如何にかかわらず，流体に接しているとしたから，この場合も衝突物体（圧縮板）は運動の間流体と，流体は構造板と常に接しているものとする。このような仮定は，落下物体による衝撃の際はよくなりたつものと思われる[3]。

運動方程式は，

$$(M_1+\rho Sl+M_0)\ddot{\xi}_0=-k_0\xi_0$$

あるいは，

$$\hat{\omega}_0^2=\frac{k_0}{M_1+\rho Sl+M_0}=\omega_0^2\left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma\beta+\alpha}\right) \tag{4.30}$$

とすれば

$$\ddot{\xi}_0+\hat{\omega}_0^2\xi_0=0 \tag{4.31}$$

初速度は，運動量理論により，

$$U_0=\frac{M_1}{M_1+\rho Sl+M_0}U=\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma\beta+\gamma}\right)U \tag{4.32}$$

$t=0$ で $\xi_0=0$，$\dot{\xi}_0=U_0$ として積分すれば

$$\frac{\xi_0}{l}=\frac{1}{\delta}\frac{\beta}{\sqrt{\gamma(\beta+\gamma\beta+\gamma)}}\sin\hat{\omega}_0t \tag{4.33}$$

$$\frac{\dot{\xi}_0}{U}=\frac{\beta}{\beta+\beta\gamma+\gamma}\cos\hat{\omega}_0t \tag{4.34}$$

を得る。また M_0 の受ける圧力は，

$$\frac{p-p_0}{\rho U^2}=-\frac{1}{S}(M_1+\rho Sl)\ddot{\xi}_0=\frac{(1+\gamma)\delta}{\beta+\beta\gamma+\gamma}\frac{\beta}{\sqrt{\gamma(\beta+\gamma\beta+\gamma)}}\sin\hat{\omega}_0t \tag{4.35}$$

4.3 計算結果とその検討

数多くのケースについて，前項の理論式より求めた圧力，変位などの time history を計算したが，そのうちの数種類を選んで，Fig.4.2〜Fig.4.5 に示す。

計算プログラムの check は，附録に示す方法と直接数値積分 (Runge-Kutta-Gill) によるものが一致することを確かめることによって行なわれた。数値計算の方法は，計算精度の関係で z_0 が少し大きくなると大きな誤差を伴うので，附録のような解析的方法をとったのであるが，4 倍精度の計算を行なったにも拘らず，この場合でも z_0 が約 30 程度で誤差が拡大し始めた。これは，z_0 の各段階で初期条件を合わせる数値計算を行なう必要があるが，z_0 が増すとともに項数が急激に増大しその誤差が累積するためと思われる。このために，Fig.4.5 の

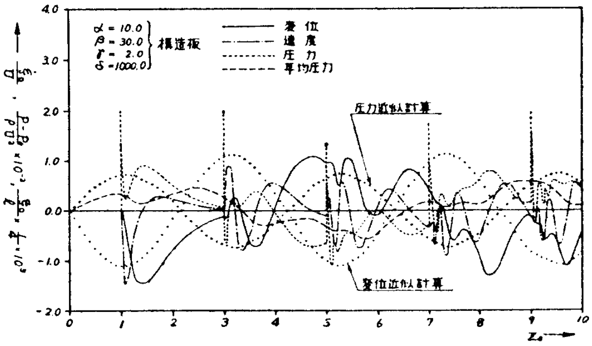

Fig.4.2-A 圧力，変位の変化状況 ($\alpha=10.0$，構造板)

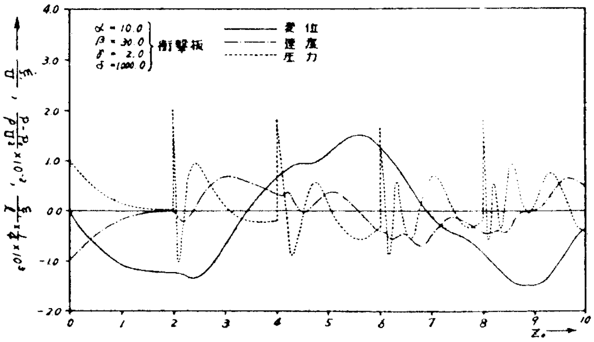

Fig.4.2-B 圧力，変位の変化状況 ($\alpha=10.0$，衝撃板)

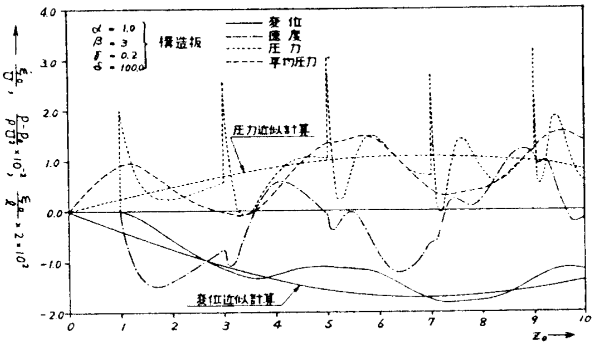

Fig. 4.3-A　圧力，変位の変化状況（$\alpha=1.0$，構造板）

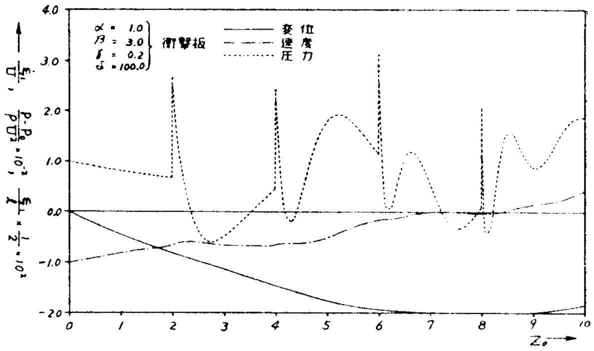

Fig. 4.3-B　圧力，変位の変化状況（$\alpha=1.0$，衝撃板）

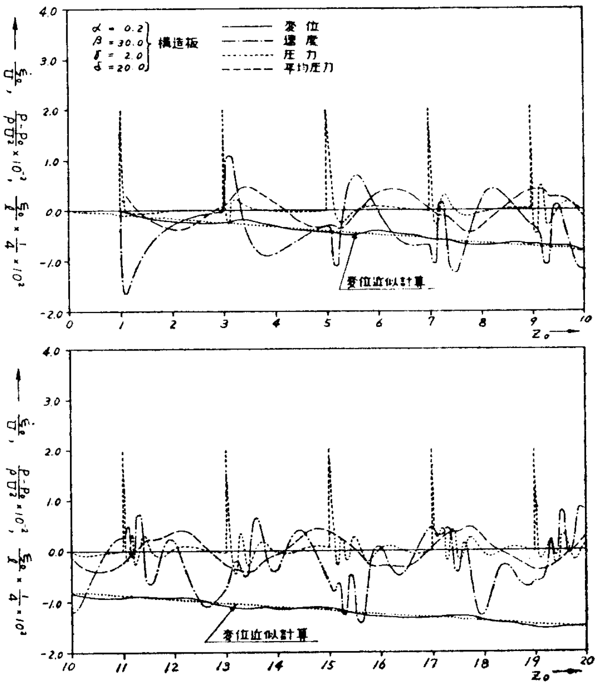

Fig. 4.4-A　圧力，変位の変化状況（$\alpha=0.2$，構造板）

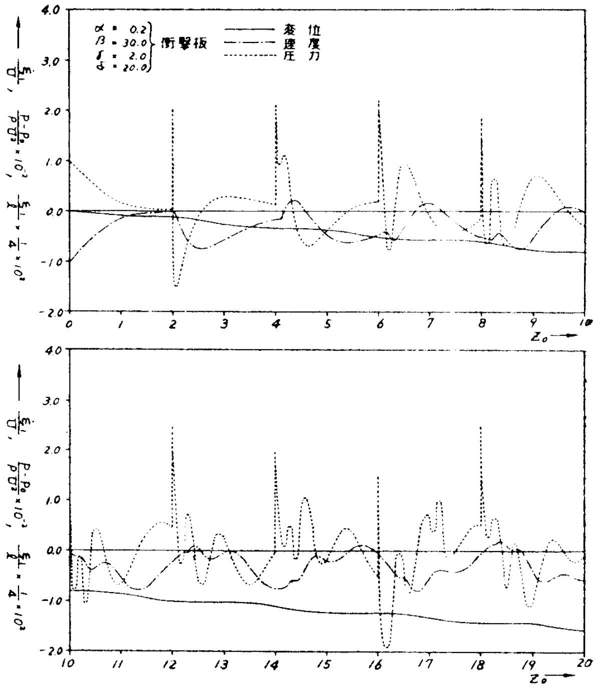

Fig. 4.4-B　圧力，変位の変化状況（$\alpha=0.2$，衝撃板）

$\alpha=0.05$ の場合は，残念ながら構造板の最大変位を求める z_0 まで積分することができなかった。

これらの図表およびその他の計算結果を通覧すると，いずれの場合も，音波衝撃圧を発生しており，平均圧力と非常に異なる圧力の変化状況を示す。従って，本方式のような衝撃機構を複雑な形状の構造物（例えば2次元運動）に対して適用すれば，音波衝撃圧は場所的に非常に変動するはずであるから，計測圧は場所的に非常に異なる値を示すものと思われる。また，その大略の予測を行なうことも極めて困難である。

本論文の意図と直接関係はないが，圧力の変動模様について検討してみる。衝撃板で発生した音波圧は $z_0=1$，すなわち $t=l/a$ の後に構造板に達し，以後反射をくり返し，衝撃板では $z_0=2n$ $(n=0, 1, 2, \cdots, n)$ で，構造板では $z_0=2n+1$ で，衝撃圧を発生する。その継続時間は，α が大なるほど，また β, γ が小なるほど長く，またそのとき，構造板による衝撃の吸収も小さい。特に γ が非常に大きくなると，圧力は殆んど衝撃圧だけの格好になっている。衝撃後，負圧を発生するが，その大きさは，α が小なるほど，また，β, γ が大きいほど大きい。本計算では，$U/a=1/100$ として計算しているが，負圧が大きいと cavitation の発生を伴うため，その後の計算は実状と合わないが，これは無視して，一般に構造板の最大変位まで積分を行なっている。衝撃圧の最大値は ρaU に対してほぼ3に達している場合もあることを付記しておく。

次に，圧力計の $\omega_G l/a$ が1および0.1のときに，記録圧力を(4.29)から計算したものを Fig. 4.6～Fig. 4.9 に示す。$\alpha=10$，1，0.2，0.05 のいずれにおいても，圧力計の記録値は，物理的な意味のある量と何等関係なく，

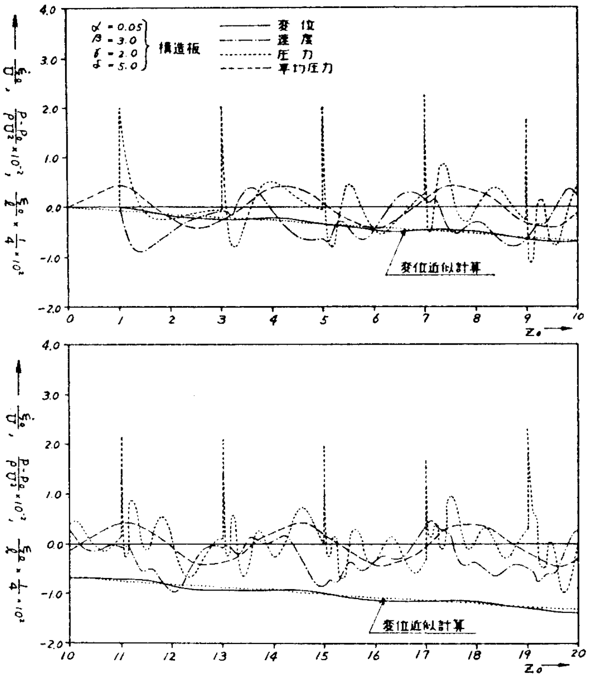

Fig. 4. 5 圧力，変位の変化状況（$\alpha=0.05$，構造板）

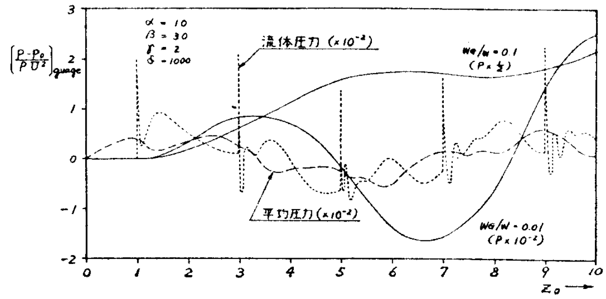

Fig. 4. 6 圧力計の応答（$\alpha=10$）

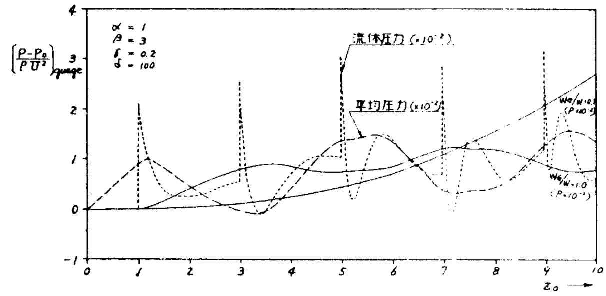

Fig. 4. 7 圧力計の応答（$\alpha=1$）

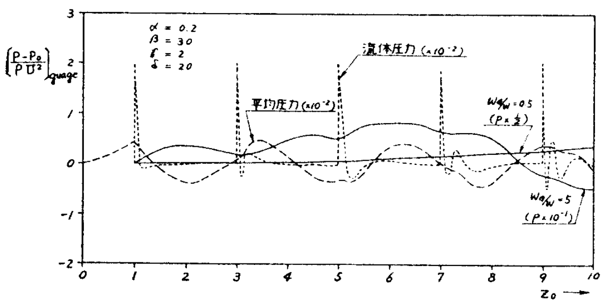

Fig. 4. 8 圧力計の応答（$\alpha=0.2$）

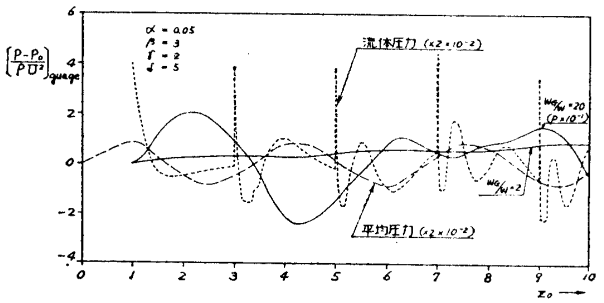

Fig. 4. 9 圧力計の応答（$\alpha=0.05$）

この様な場合には圧力計の計測値は無意味なことを示している。

最後に，近似計算との比較を行なってみる。$\alpha=10$ および $\alpha=1$ の1部を除いては，構造板の変位の計算値はよく合っており，特にαが小さい場合は殆んど一致している。従って，緒言B）に関し，αが1程度以下であれば，複雑な衝撃機構を考慮せずとも，衝突物体の速度と質量から，構造板の受ける力の最大値を近似計算によって容易に推定できることが分かる。一方，圧力は平均圧力のほぼ中間を通る傾向をみせており，$\alpha=1$ および 10 以外のときは近似圧力は小さいので図面から省略してある。圧力の大きさそのものを論ずるには近似計算は無意味である。

5 Bagnold Model[4] による衝撃

5.1 Bagnold Model

4章までは，船体構造物が就航中に受ける衝撃機構とはかなり異なるモデルであったが，緒言B）について，より直接的な検討を行なうために，波浪衝撃のときに用いられる Bagnold Model をとりあげる。これは，構造物と流体とが正面衝撃する場合にしばしば用いられる“構造物と流体との間に空気がとじこめられる”という仮定を用いた説の一つである。

Fig. 5. 1 に Bagnold Model の力学的機構を示す。断面積 S，長さKの水塊が初速度Uをもって空気柱を介して構造板（質量 M_0：バネ常数 k_0）に衝突するとする。M_0 の原位置からの変位を x_0，空気柱の長さを x とする。

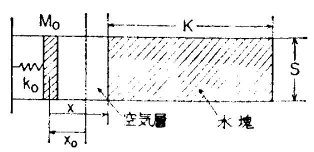

Fig. 5. 1 Bagnold Model

空気柱の圧力を p（初期圧力を p_0）とすれば，構造板の運動方程式は，

$$M_0\ddot{x}_0=-k_0x_0+S(p-p_0) \tag{5.1}$$

また，初期条件は $t=0$ で

$$x_0=\dot{x}_0=0 \tag{5.2}$$

一方，水塊の運動方程式は水塊を剛体とみなし，ρ を流体の密度とすれば，

$$\rho K\frac{d^2}{dt^2}(x-x_0)=p-p_0 \tag{5.3}$$

また，その初期条件は $t=0$ で

$$x=D,\qquad \dot{x}=-U \tag{5.4}$$

空気柱は断熱圧縮するとすれば

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{x}{D}\right)^{-\gamma} \tag{5.5}$$

ただし，γ は空気の比熱比で 1.4 とする。

(5.1)～(5.5) を次の変数を用いて無次元表示する。すなわち，

$$t_0=\frac{tU}{D},\qquad X=\frac{x}{D},\qquad X_0=\frac{x_0}{D},\qquad \frac{k_0}{M_0}=\omega_0^2$$

$$A=\frac{\omega_0D}{U},\qquad B=\frac{\rho KS}{M_0},\qquad P_0=\frac{p_0}{\rho U^2}\frac{D}{K}$$

とすれば，(5.1)～(5.5) は順次，

$$\ddot{X}_0=-A^2X_0+BP_0\left(\frac{p}{p_0}-1\right) \tag{5.6}$$

$$X_0=\dot{X}_0=0\qquad (t_0=0) \tag{5.7}$$

$$\ddot{X}-\ddot{X}_0=P_0\left(\frac{p}{p_0}-1\right) \tag{5.8}$$

$$X=1,\quad \dot{X}=-1\qquad (t_0=0) \tag{5.9}$$

$$\frac{p}{p_0}=X^{-\gamma} \tag{5.10}$$

となる。これらは，Lunge-Kutta 法により数値積分によって解を求めることができる。

5.2 近　似　解

この場合，空気柱を線形バネでおきかえた振動系と考える。Fig.5.2 に示すような 2 振子モデルを考える。その各物理量を図に示す如くとれば，$t=0$ で

$$x_0=\dot{x}_0=x=0,\quad \dot{x}=U \tag{5.11}$$

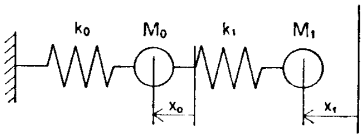

Fig.5.2　2 振子モデル

として

$$x_0=\frac{U}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\frac{1}{p_1}\sin p_1t-\frac{1}{p_2}\sin p_2t\right\} \tag{5.12}$$

$$x=\frac{U}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\frac{\lambda_1}{p_1}\sin p_1t-\frac{\lambda_2}{p_2}\sin p_2t\right\} \tag{5.13}$$

を得る。ただし，

$$\frac{k_1+k_0}{M_0}=a,\qquad \frac{k_1}{M_0}=b,\qquad \frac{k_1}{M_1}=c$$

とすれば，

$$p^2{}_{1,2}=\frac{a+c}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+bc} \tag{5.14}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{c}{c-p^2{}_{1,2}} \tag{5.15}$$

である。

M_0 の受ける力は，S なる断面に p なる圧力が作用するとして

$$pS=-M_1\ddot{x}=-\frac{M_1U}{\lambda_1-\lambda_2}\{\lambda_1p_1\sin p_1t-\lambda_2p_2\sin p_2t\} \tag{5.16}$$

となる。

前項の計算と比較するために，同様の無次元化を行なうと，

$$\omega_0{}^2=\frac{k_0}{M_0},\quad \omega_1{}^2=\frac{k_1}{M_1},\quad \frac{M_1}{M_0}=B,\quad A=\frac{D\omega_0}{U},\quad A_1=\frac{D\omega_1}{U}$$

などとおいて

$$X_0=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot\frac{1}{A}\left\{\frac{\omega_0}{p_1}\sin\left(\frac{p_1}{\omega_0}At_0\right)-\frac{\omega_0}{p_2}\sin\left(\frac{p_2}{\omega_0}At_0\right)\right\} \tag{5.17}$$

$$\frac{p}{p_0}=-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}A\cdot\frac{1}{P_0}\cdot\left\{\lambda_1\frac{p_1}{\omega_0}\sin\left(\frac{p_1}{\omega_0}At_0\right)-\lambda_2\frac{p_2}{\omega_0}\sin\frac{p_2}{\omega_0}At_0\right)\right\} \tag{5.18}$$

$$\left(\frac{p_{1,2}}{\omega}\right)^2=\frac{1+B(A_1/A)^2+(A_1/A)^2}{2}\mp\sqrt{\frac{1+B(A_1/A)^2-(\omega_1/A)^2}{2}+B(A_1/A)^4} \tag{5.19}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{(A_1/A)^2}{(A_1/A)^2-(p_{1,2}/\omega)^2} \tag{5.20}$$

5.3 計算結果と検討

Fig.5.3, 5.4 および 5.5 に，Bagnold 理論および近似理論を用いて計算した，構造板の変位および構造板の受ける圧力の time history の数例を示す。ただし，近似計算の場合 U/D と ω_1 の対応は必ずしも明確でないので，ω_1/ω_0 を3通りにかえて計算している。Aが小さいときは，変位については Bagnold 理論による値と近似計算値とは，実用的にみてかなりよく合っていると言える。一方，圧力については，いずれの場合も両者の間にかなりの差があることが，これらの計算結果から明らかである。

これらのことをより明瞭に示すために，種々のケースについて上述の time history の計算結果をまとめたものが Fig.5.6 である。Fig.5.6 の縦軸①は，

$$①=\frac{k[x_0]_{\max}\frac{1}{2}T}{\rho KSU} \tag{5.21}$$

によって求められ，与えられた流体の運動量に対して，構造板の受ける最大力と流体圧が最大になるまでの時間 T の積の値がどのようになるかを示す量である。ただし，近似理論の場合は，ρKS の代りに M_1 を，また，T の代りに $2\pi/\omega_1$ を用いて計算する。

また，この計算の場合構造板の受ける力が最大値になるまえに，流体圧が負になる場合があるが，このときは，構造板は $p-p_0=0$ 以後は何等流体力を受けずに単振子としての運動を続けるとして $[x_0]_{\max}$ を計算している。近似理論モデルに対しても同様の考慮がはらわれて

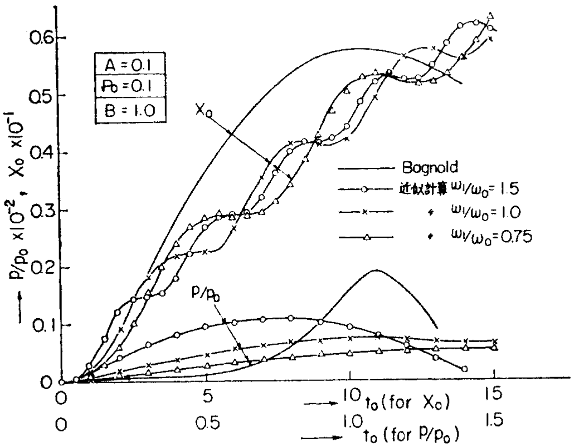

Fig.5.3 Bagnold Model による変位，圧力の計算 (1)

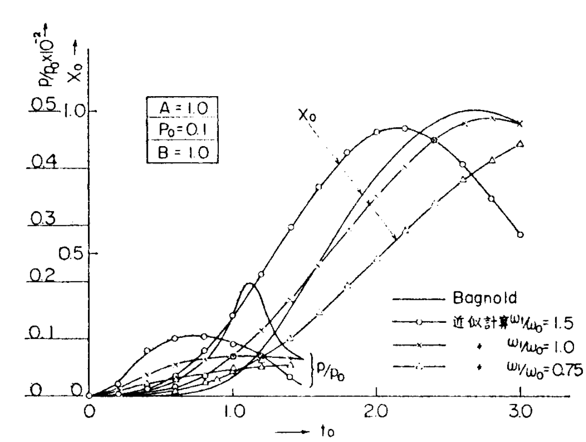

Fig.5.4 Bagnold Model による変位，圧力の計算 (2)

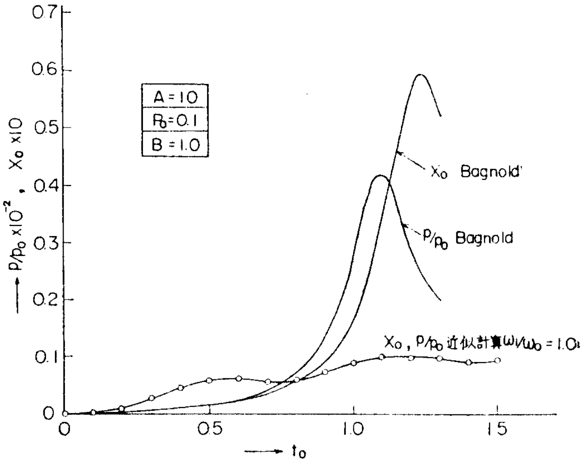

Fig.5.5 Bagnold Model による変位，圧力の計算 (3)

おり，Fig.5.6 において，“M と M_1 がはなれる”とあるのがそれである。

Fig.5.6 から明らかなように，いずれの場合も T_{ω_0} の値が低い場合には，Bagnold 理論の計算値と近似理論のそれとはよく一致している。従って，構造物の固有振動数と外力の作用時間の積がある値以下であれば，構造物の受ける力は，複雑な衝撃理論によらなくても，近似理論によって実用的な精度の範囲で推定することが可能であるといえる。この際必要な量は，衝突する流体の運動量，質量およびその作用時間Tである。しかし，Tが充分小さいとき，$T\omega_0 \to 0$ とすれば

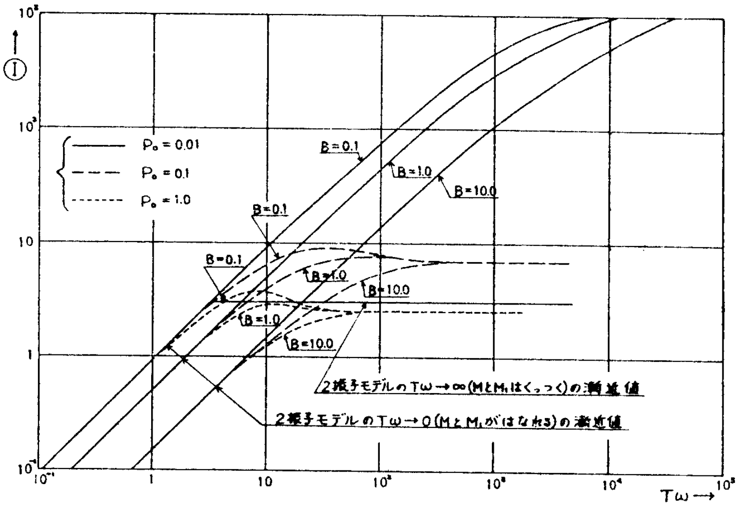

Fig.5.6　運動量と力積の関係

$$\lim_{T\omega\to 0} \text{①} = \frac{T\omega}{B+1} \tag{5.22}$$

となり（Fig.5.6 の左下方の直線），構造板の受ける力，$k[x_0]_{\max}$ はTを知らなくても求めることができる。

前章および本章で行なった計算結果から，通常行なわれる流体圧の測定について一言する。前章の例にみられるように，流体圧の基本周波数が極めて高い場合，または，衝撃作用時間が極めて短い場合は，通常の圧力計を用いて，その圧力を忠実に記録することは殆んど不可能であり，計測された圧力の記録は殆んど何等の意味も持たない。一方，Bagnold Model のような場合には作用時間がかなり長くなる場合があり，流体圧の変化を忠実に求めることが可能である。従って，流体圧の作用時間と計器の固有周期を比較し，後者が充分短い場合のみその記録に意味を持たせるべきであろう。

6 結　　　言

緒言 A）の問題に関し，物体を落下させ流体圧縮によって衝撃圧を発生させるとき

1）流体と物体との間にバネを介在させるときは，流体圧は，附加質量に関するものと，平均圧縮によるものとからなり，前者は場所的に異なる値を持つ。そして，附加質量に関する圧力は，水の重量が構造板の重量より大きく，かつ，クッションバネ系の固有振動数が構造板の固有振動数と同じ，あるいはそれ以上のオーダーのとき平均圧縮圧力と同じオーダーとなる。

2）物体を直接衝撃するときは，強い音波圧を発生する。これは場所的に変動するはずであるから，流体圧は場所的に大きな変化を持つものと考えられる。また，その固有周波数は極めて高いので，圧力計によってその忠実な記録をとることは不可能であろう。

緒言 B）の問題に関し，2つの例について計算を行なった結果によれば，

1）構造板の固有周期が衝撃の作用時間に比して同程度か，あるいは長いときは構造板の受ける力は，複雑な衝撃モデルを用いるまでもなく，簡単な力学モデルによって推定することが可能である。

2）圧力計による流体圧の測定は，衝撃圧の作用時間に比して，計器の固有周期が充分短くなければ，忠実な記録を得ることはできない。逆の場合には，圧力の記録は最大値を求めるのには余り意味を持たない。従って，運動量などを求めるのに使用すべきである。

緒言 B）の問題に関しては，今後構造板の塑性応答をも考慮して検討を行なう必要がある。

本研究の数値計算には，HITAC 8500，HITAC 5020 E，CDC 6600 などの電算機を使用した。その際ご協力頂いた東京大学，および日本コンピューター・システムの関係各位に厚くお礼申しあげる。

参　考　文　献

1）三井造船千葉研究所：船側構造の疲労衝撃最終強度，SR 133 資料（1971. 12. 4）.
2）S. チモシェンコ：工業振動学，谷下市松訳，p. 381～387.

3) S.チモシェンコ：工業振動学，谷下市松訳，p.377.
4) Bagnold, R. A.: Interim Report on Wave-Pressure Research, J. Inst. Civil Eng., Vol.12, (1939), p.201～226.

附　　録

衝撃方程式［(4.19), (4.20)］の解法

本文 (4.19), (4.20) より

$$G''(z_0)+\beta G'(z_0)+\alpha^2 G(z_0)=G_1''(z_0)-\beta G_1(z_0)+\alpha^2 G_1(z_0) \tag{A.1}$$

$$G_1'(z_0)+\gamma G_1(z_0)=G'(z_0-2)-\gamma G(z_0-2) \tag{A.2}$$

$z_0=2n+1+x$ $(2\geqq x\geqq 0,\ n=0,1,2,\cdots)$ とおき

$$G(z_0)=G(2n+1+x)=G_n(x)$$

$$G_1(z_0)=G_1(2n+1+x)=G_{1n}(x)$$

とおけば，(A.1) および (A.2) は

$$G_n''(x)+\beta G_n'(x)+\alpha^2 G_n(x)=G_{1n}''(x)-\beta G_{1n}'(x)+\alpha^2 G_{1n}(x) \tag{A.3}$$

$$G_{1n+1}'(x)+\gamma G_{1n+1}(x)=G_n'(x)-\gamma G_n(x) \tag{A.4}$$

上式は G_{1n} が求まっておれば G_n および G_{1n+1} を求め得ることを示している。

いま，

$$G_{1n}(x)=\sum_{i=0}^{n} C_{1n}^{(i)} x^i e^{-\gamma x}+\sum_{i=0}^{n-1} D_{1n}^{(i)} x^i e^{r_1 x}+\sum_{i=0}^{n-1} E_{1n}^{(i)} x^i e^{r_2 x} \tag{A.5}$$

とすると

$$G_n(x)=\sum_{i=0}^{n} C_n^{(i)} x^i e^{-\gamma x}+\sum_{i=0}^{n} D_n^{(i)} x^i e^{r_1 x}+\sum_{i=0}^{n} E_n^{(i)} x^i e^{r_2 x} \tag{A.6}$$

となり，G_n の各係数は，G_{1n} の各係数を用いて次式の如く表わされる。

$$C_n^{(i)}=\sum_{m=i}^{n}\bar{C}_{1n}^{(m)} P_i^{(m)}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\bar{C}_{1n}^{(n)}&=(\gamma^2+\beta\gamma+\alpha^2)C_{1n}^{(n)}\\
\bar{C}_{1n}^{(n-1)}&=(\gamma^2+\beta\gamma+\alpha^2)C_{1n}^{(n-1)}-(2\gamma+\beta)nC_{1n}^{(n)}\\
\bar{C}_{1n}^{(i)}&=(\gamma^2+\beta\gamma+\alpha^2)C_{1n}^{(i)}-(2\gamma+\beta)(i+1)C_{1n}^{(i+1)}+(i+2)(i+1)C_{1n}^{(i+2)}
\end{aligned}\right.$$

$$(i=0,1,\cdots,n-2)$$

$$D_n^{(0)}=A_n$$

$$D_n^{(i)}=\sum_{m=i-1}^{n-1}\bar{D}_{1n}^{(m)} Q_i^{(m)}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\bar{D}_{1n}^{(n-1)}&=(r_1^2-\beta r_1+\alpha^2)D_{1n}^{(n-1)}\\
\bar{D}_{1n}^{(n-2)}&=(r_1^2-\beta r_1+\alpha^2)D_{1n}^{(n-2)}+(2r_1-\beta)(n-1)D_{1n}^{(n-1)}\\
\bar{D}_{1n}^{(i)}&=(r_1^2-\beta r_1+\alpha^2)D_{1n}^{(i)}+(2r_1-\beta)(i+1)D_{1n}^{(i+1)}+(i+2)(i+1)D_{1n}^{(i+2)}
\end{aligned}\right.$$

$$(i=0,1,\cdots,n-3)$$

$$E_n^{(0)}=B_n$$

$$E_n^{(i)}=\sum_{m=i-1}^{n-1}\bar{E}_{1n}^{(m)} R_i^{(m)}$$

$\bar{E}_{1n}^{(i)}$ は $\bar{D}_{1n}^{(i)}$ において D を E に，r_1 を r_2 に変えたもの

$$P_i^{(m)}=\frac{1}{\gamma^2-\beta\gamma+\alpha^2}\qquad (i=m)$$

$$P_i^{(m)}=\frac{(2\gamma-\beta)mP_{i+1}^{(m)}}{\gamma^2-\beta\gamma+\alpha^2}\qquad (i=m-1)$$

$$P_i^{(m)}=\frac{1}{\gamma^2-\beta\gamma+\alpha^2}\{(2\gamma-\beta)(i+1)P_{i+1}^{(m)}-(i+1)(i+2)P_{i+2}^{(m)}\}$$

$$(i=0,\cdots,m-2)$$

A_n, B_n は各段階の初期値から定まり，各段階の速度，変位が連続になるように次式から定められる。

$$\begin{cases} C_n^{(0)}+A_n+B_n=G_{n-1}(2)+1 \\ C_n^{(1)}-\gamma C_n^{(0)}+D_n^{(1)}+r_1A_n+E_n^{(1)}+r_2B_n=G'_{n-1}(2)+G'_{1n}(0)-G'_{1n-1}(2)-2\beta \end{cases}$$

なお，r_1, r_2 は（A.3）の特性方程式の根である。同様にして

$$G_{1n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n+1}C_{1n+1}^{(i)}x^ie^{-\gamma x}+\sum_{i=0}^{n}D_{1n+1}^{(i)}x^ie^{r_1x}+\sum_{i=0}^{n}E_{1n+1}^{(i)}x^ie^{r_2x} \tag{A.7}$$

とおけば，

$$C_{1n+1}^{(0)}=A_{1n+1}$$

$$C_{1n+1}^{(i)}=\bar{C}_n^{(i-1)}P_{1i}^{(i-1)} \qquad (i=1, 2, \cdots, n+1)$$

$$D_{1n+1}^{(i)}=\sum_{m=i}^{n}\bar{D}_n^{(m)}Q_{1i}^{(m)}$$

$$E_{1n+1}^{(i)}=\sum_{m=i}^{n}\bar{E}_n^{(m)}R_{1i}^{(m)}$$

$$A_{1n+1}=D_{1n+1}^{(0)}+E_{1n+1}^{(0)}-G_{1n}(2)-1$$

$$\bar{C}_n^{(n)}=-2\gamma C_n^{(n)}$$

$$\bar{C}_n^{(i)}=(i+1)C_n^{(i+1)}-2\gamma C_n^{(i)} \qquad (i\neq n)$$

$$\bar{D}_n^{(n)}=(r_1-\gamma)D_n^{(n)}$$

$$\bar{D}_n^{(i)}=(i+1)D_n^{(i+1)}+(r_1-\gamma)D_n^{(i)} \qquad (i\neq n)$$

$\bar{E}_n^{(i)}$ は $\bar{D}_n^{(i)}$ の D を E に，r_1 を r_2 にかえたもの

$$P_{1i}^{(i-1)}=\frac{1}{i}$$

$$Q_{1i}^{(m)}=\frac{1}{r_1+\gamma} \qquad (i=m)$$

$$Q_{1i}^{(m)}=-\frac{1}{r_1+\gamma}(i+1)Q_{1i+1}^{(i)} \qquad (i=0, \cdots, m-1)$$

$R_{1i}^{(m)}$ は $Q_{1i}^{(m)}$ の式で Q を R に，r_1 を r_2 にかえたもの

$G_{11}(x)$は初期条件から容易に求まるから，これを出発値として（A.5),（A.6),（A.7）を繰返し用いれば，任意の n に対する G_n, G_{1n} を求めることができる。