(昭和47年10月日本造船学会秋季講演会において講演)

座屈に対する補強材の効果に関する研究

正員 松 石 正 克*

On the Effect of Stiffeners upon the Buckling Strength of Ship Structures

by Masakatsu Matsuishi, Member

Summary

The most ship structures are composed of plate elements. When appropriate stiffeners are furnished on plates, the buckling strength of the plates increase effectively, as well as their bending rigidities.

The finite element method has been expanded to analyse the buckling strength of ship structures. While the finite element method is very useful, the size of equations obtained by the method is extremely large.

In the paper, a powerful eigenvalue economizer technique was introduced, which reduces the degrees of stability problems. As a basic example of the application, the accuracy of the solution by the technique using the finite element method was examined for several kinds of stiffened plates in relation to the number of degrees of freedom. The authors discussed mathematical meaning of the eigenvalue economizer technique. Variable informations are obtained on variables which are eliminated from the characteristic equation.

Finally, the buckling strength of transverse ring of large tanker was analysed, varying the location of stiffeners. It was found that the ship structure without any stiffener buckles under applied load. While, the structure with horizontal and diagonal stiffeners was found not to buckle under the load.

1 緒 言

船体構造は大部分板要素から構成されていると考えることができる。このような板要素に補強材を付けた場合には、面内荷重に対する座屈強度を増加させることができる。この他、板に垂直な荷重が作用する場合には、板厚を増加せずに、補強材によって板の曲げ剛性を効果的に上昇させることができる。従って、船体構造に補強材を用いることにより、少ない重量の増加で、より効果的な補強方法を決定することは設計上の重要な問題の1つである。

一方,最近の目覚しい電子計算機の発達と共に、有限要素法が船体構造の座屈強度の解析に適用され^{1,2)}、その有用性が注目されている。有限要素法を用いて構造物の強度、特に座屈強度の解析を行う場合、大次元の固有値方程式をいかに精度良くかつ効率的に解くかが重要な問題の1つになる。

本論文では、振動解析のために開発された大次元固有値方程式の解法^{3,4)} を座屈強度解析に適用する。 まず、 圧縮荷重を受ける基本的な補強板の座屈強度を解析し、固有値方程式の元数の縮小による解析結果の精度を調べる。次に固有値方程式の元数の縮小法について検討を加え、固有値方程式から消去すべき固有ベクトルと未知数 として残すべき固有ベクトルの関係についての考察を行う。これらの結果を基にして、補強板の配置が種々考えられるタンカーの横桁のコーナー部の座屈に及ばす補強材の効果を検討する。

^{*} 日立造船(株)技術研究所

282

2 大次元固有値方程式の解法

船体構造部材の座屈強度の解析に有限要素法を適用する場合には、解くべき固有値方程式のサイズが大きくなり、これをいかに精度良く、効率的に処理するかが、重要な問題の1つになる。

本章では、振動解析のために開発された大次元固有値方程式の解法^{8,4)} を座屈強度解析に適用し、 固有値方程 式の元数の減小法についての検討を行う。

2.1 大次元固有値方程式の一解法

今、構造物の座屈強度の解析に有限要素法を適用すると、次のn元の固有値方程式を得るり。

$$[K-\lambda K'] \{r\} = 0 \tag{1}$$

ここで、[K]: 剛性行列、[K']: 安定係数行列、 λ : 固有値、 $\{r\}$: 固有ベクトル

上式の[K]は座屈、すなわち面外変形に対する剛性行列であり、面外力 $\{F\}$ と面外変位 $\{r\}$ の関係を規定するものである。すなわち

$${F} = [K] {r}$$

または、部分行列に分けると

$$\begin{Bmatrix} F_{\mathbf{I}} \\ F_{\mathbf{I}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\mathbf{I}\mathbf{I}} & K_{\mathbf{I}\mathbf{I}} \\ K_{\mathbf{I}\mathbf{I}} & K_{\mathbf{I}\mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{\mathbf{I}} \\ r_{\mathbf{I}} \end{Bmatrix}$$
(2)

ここで、 $\{r_I\}$ は l 次の列行列、 $\{r_I\}$ は m 次の列行列であり、

$$l+m=n$$

である。

今,座屈を考えているので構造物に面内力は作用するが,面外力は零である。 そこで $\{F_{\pi}\}=0$ を 考慮 して $\{P_{\pi}\}$ を消去すると

$$\{r_{\Pi}\} = [-K_{\Pi \Pi}^{-1} \cdot K_{\Pi I}] \{r_{I}\}$$
(3)

$$\{F_{\mathbf{I}}\} = [K_{\mathbf{I}\mathbf{I}} - K_{\mathbf{I}\mathbf{I}} \cdot K_{\mathbf{I}\mathbf{I}}^{-1} \cdot K_{\mathbf{I}\mathbf{I}}] \{r_{\mathbf{I}}\} = [\bar{K}] \{r_{\mathbf{I}}\}$$
(4)

ここで、剛性行列 $[ar{K}]$ はn次の正方行列からl次に縮小されたものであり、次式で与えられる。

$$[\bar{K}] = [K_{II} - K_{I\Pi} \cdot K_{\Pi\Pi}^{-1} \cdot K_{\Pi I}]$$
 (5)

一方、(1)式の固有値方程式はポテンシャルエネルギー Π の停留原理から得る事ができる。

$$\Pi = U - V \tag{6}$$

ここで、Uは歪エネルギー、Vは外力のポテンシャルであり、それぞれ剛性行列 [K]、安定係数行列 [K'] および節点変位 $\{r\}$ を用いて次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\} \tag{7}$$

$$V = \frac{\lambda}{2} \{r\}^T [K'] \{r\} \tag{8}$$

ここで、Tは転置行列を意味する。

(4), (7)式より歪エネルギーUは

$$U = \frac{1}{2} \{r_{\rm I}\}^T [\bar{K}] \{r_{\rm I}\} \tag{9}$$

また、(3)式から節点変位 $\{r\}$ は次式で表わせる。

$$\{r\} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{\Pi \Pi}^{-1} \cdot K_{\Pi I} \end{bmatrix} \{r_{I}\} = [T]\{r_{I}\}$$

$$(10)$$

ここで

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{\Pi \Pi}^{-1} \cdot K_{\Pi I} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} : 単位行列$$

(8), (10)式より外力のポテンシャルVは

$$V = \frac{\lambda}{2} \{r_1\}^T [T]^T [K'] [T]^T \{r_1\} = \frac{\lambda}{2} \{r_1\}^T [\bar{K}'] \{r_1\}$$
 (11)

ここで、安定係数行列 $[ar{K}']$ はn次の正方行列からl次に縮小されたものであり、次式で与えられる。

$$[\bar{K}'] = [T]^T [K'] [T] \tag{12}$$

全ポテンシャルエネルギー Π は(9), (11)式より

$$\Pi = \frac{1}{2} \{ r_{\rm I} \}^T [\bar{K} - \lambda \bar{K}'] \{ r_{\rm I} \} \tag{13}$$

ポテンシャルエネルギーの停留原理から $\delta II=0$ を考慮すると、次の固有値方程式を得る。

$$[\bar{K} - \lambda \bar{K}']\{r_I\} = 0 \tag{14}$$

かくして、n元の固有値方程式がl元に縮小される。従って、ユニット分割法等 5 と組合わせて上述の操作を 繰り返し行うと、固有値方程式のサイズが小さくなり、精度良く、効果的に大次元固有値方程式を解くことがで

座屈強度は固有値方程式の解として求められるものであり、座屈変形は構造物の面外変形の剛性(K) および座

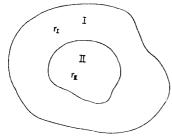


Fig.1 Partitioning of structures into two regions

屈直前に構造物に作用している面内応力に関係する剛性 (K') に 支配さ れるものである。しかし、消去する節点変位 {rп} と未知数として残さ れた変位 {r_i} の関係を規定する(3)式は面内応力の影響を無視し、静 的な面外変形のみを考慮して求められたものである。

今,Fig.1 に示すように領域 I の節点変位を $\{r_I\}$ とし,領域 II の変 位を $\{r_{\Pi}\}$ とすると、(3)式は、領域 Π に面外荷重が作用せずに、その 周辺の領域 I で強制変位 $\{r_I\}$ が規定された時に、領域 I に生じる変形 {r_I} を与えるものである。従って、与えられた境界条件 を 満足 する (14)式の解を求めると、その解は(1)式の近似解となる。

2.2 数值計算例

前節で述べた固有値方程式の解法の適用性を検討するために、基本的な補強板に対して有限要素法による解析 を行い、方程式から消去する節点変位とその計算結果の精 度との関係を調べる。

なお、本解析では節点における変位の自由度として、た わみ (w) および傾斜角 ($\theta_x = -\partial w/\partial y$, $\theta_y = \partial w/\partial x$) を考 慮する。

2.2.1 正方形板の圧縮座屈

周辺単純支持正方形板 (Fig. 2) の圧縮座屈強度を解析 する。解析では正方形板を 4×4 のメッシュに分割し、消 去する節点と、固有値方程式の未知数として残す節点を Table 1 に示すように選択して計算を行った。平板の座屈 強度を次式で表わし、その結果を Table 1 に示す。

$$k = \sigma_{cr}/\sigma_e \tag{15}$$

ここで

$$\sigma_e = \frac{E\pi^2}{12\left(1-\nu^2\right)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \tag{16}$$

Table 1 の結果から明らかなように、正方形板の周辺の節 点変位を消去すると座屈値および座屈モードの精度が非常 に悪くなる。一方、周辺の節点変位を未知数と して 残す

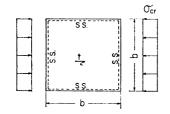


Fig. 2 Square plate under compression

と, 計算結果の精度は 良好なものになる。

2.2.2 補強板の圧 縮座屈(その 1)

周辺単純支持正方形 補強板 (Fig.3) の圧縮 座屈強度を解析した結

Table 1 Compressive buckling strength of square plate $(k_{exact}=4)$

	DUCK INC	T
SKETCH*	BUCKLING STRENGTH (k)	NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM
	50.723	9
	28.383	12
	13.344	15
	4.200	27
	4.239	21
	4.212	24
	4.207	27
	4.199	39

* NODES NOT RINGED ARE ELIMINATED

284

果を Table 2 に示す。補強材の曲げ剛性および断面積は次の値を採用した。

Table 2 Compressive buckling strength of stiffened plate $(k_{exact}=12)$

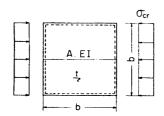


Fig. 3 Stiffened plate under compression

ここで

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

 $\gamma_{\min} = 7.86$

Table 2 より明らかなように、補強板の周辺の節点変位 を消去すると、座屈値および座屈モードの精度 は 悪 く な る。一方, 周辺の節点変位を未知数として残すと, 計算結 果の精度は良好になる。

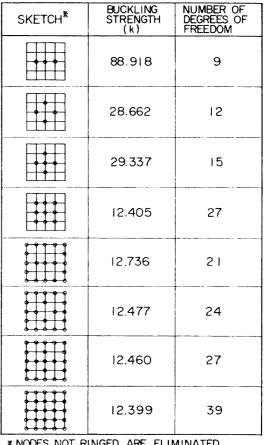
2.2.3 補強板の圧縮座屈(その2)

周辺単純支持補強板 (Fig. 4) の圧縮座屈強度を解析す る。補強板を 8×4 のメッシュに分割し、消去する節点と 未知数として残す節点を Table 3 に示すように選択して計 算を行った。補強材の曲げ剛性および断面積は次の値を用 いた。

$$\begin{aligned}
& r = EI/bD = 3. \ 0 > r_{\min} \\
& \delta = A/bt = 0. \ 05
\end{aligned}$$
(18)

ここで $\gamma_{\min}=2.136$

計算結果を Table 3 に示すが、固有値方程式のサイズを 減小しても計算結果の精度は良好である。なお、補強材の



* NODES NOT RINGED ARE ELIMINATED

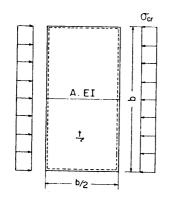


Fig. 4 Stiffened plate under compression

曲げ剛性 Υ は Υ_{\min} を満足しているので、補強材取り付け位置の座屈たわ みの計算値はほとんど零に等しい。

2.3 固有値方程式の元数縮小に対する検討

前節の数値計算結果から、消去する節点変位と未知数として残す節点変 位の選び方によって固有値方程式の解の精度が相当異なる事が明らかにな った。そこで、本節では固有値方程式のサイズの縮小法について検討を加 え、消去すべき固有ベクトルと未知数として残すべき固有ベクトルの関係 について考察する。

固有値方程式として再び(1)式を考える。すなわち $[K-\lambda K'] \{r\}=0$

部分行列に分けると

$$\begin{bmatrix}
K_{II} & K_{II} \\
K_{II} & K_{II}
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{I} \\ r_{II} \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix}
K'_{II} & K'_{II} \\
K'_{II} & K'_{II}
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{I} \\ r_{II} \end{Bmatrix} = 0$$
(19)

上式より

 $\{r_{\Pi}\} = [K_{\Pi\Pi} - \lambda K'_{\Pi\Pi}]^{-1} [\lambda K'_{\Pi\Pi} - K_{\Pi\Pi}] \{r_{I}\} = [I - \lambda K_{\Pi\Pi}^{-1} \cdot K'_{\Pi\Pi}]^{-1} [K_{\Pi\Pi}]^{-1} [\lambda K'_{\Pi\Pi} - K_{\Pi\Pi}] \{r_{I}\}$ (20)上式の右辺第一項を展開すると

$$\{r_{\Pi}\} = [I - \lambda K_{\Pi \Pi}^{-1} \cdot K'_{\Pi \Pi} - (\lambda K_{\Pi \Pi}^{-1} \cdot K'_{\Pi \Pi})^{2} - \cdots] [K_{\Pi \Pi}]^{-1} [\lambda K'_{\Pi \Pi} - K_{\Pi \Pi}] \{r_{\Pi}\}$$
(21)

座屈に対する補強材の効果に関する研究

Table 3 Compressive buckling strength of stiffened plate $(k_{exact}=16)$

SKETCH*	BUCKLING STRENGTH (k)	NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM
	18.16	35
	17.10	55
	17.07	61
	17.07	67
*	17.04	83

* NODES NOT RINGED ARE ELIMINATED

(21)式を(19)式に代入すると $[ar{K}]\{r_1\}=\lambda[ar{K_1}']\{r_1\}+\lambda^2[ar{K_2}']\{r_1\}+\cdots$

(22)

 $\begin{bmatrix}
K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
K_{II} - K_{I\Pi} \cdot K_{\Pi\Pi}^{-1} \cdot K_{\PiI}
\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}
\bar{K}_{1}' \end{bmatrix} = K'_{II} - K_{I\Pi} \cdot K_{\Pi\Pi}^{-1} K'_{\PiI}
\\
- K'_{I\Pi} \cdot K_{\Pi\Pi}^{-1} \cdot K_{\PiI}
\\
+ K_{I\Pi} \cdot K_{\Pi\Pi}^{-1} \cdot K'_{\Pi\Pi} \cdot K_{\Pi\Pi}^{-1} K_{\PiI}
\end{bmatrix}$ (23)

(22)式で 1³ 以上の項を無視すると, 前述の(14)式 が得られる。

今、n元の固有値方程式 $[K]\{r\}=\lambda[K']\{r\}$ の固有値 λ_i に

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \tag{24}$$

の関係が成立し、し元の固有値方程式

$$[K_{\Pi\Pi}]\{r\} = \mu[K'_{\Pi\Pi}]\{r\}$$
 (25)

の固有値 μιに

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_l \tag{26}$$

の関係があるとすると.

$$\lambda_1 < \mu_1 \le \dots \le \mu_l < \lambda_n \tag{27}$$

が成立する。

(21)式の級数展開は $\lambda K_{\Pi\Pi}^{-1}K'_{\Pi\Pi}$ の固有値が全て1より小さい場合は収束する。

一方、 $\lambda K_{\Pi\Pi}^{-1}K'_{\Pi\Pi}$ の固有値には

$$\frac{\lambda}{\mu_1} \le \dots \le \frac{\lambda}{\mu_2} \le \frac{\lambda}{\mu_1} \tag{28}$$

の関係が成立する。従って、(21)式の展開には

$$\lambda/\mu_1 < 1$$
 (29)

が必要になる。

 $\lambda=\lambda_1$ の場合、条件(29)式は満足される。一般には μ_1 より小さい固有値がいくつか存在する。

(21)式で級数を途中で打切ると、すなわち(22)式で λ^2 以上の項を無視して固有値方程式を解くと、その精度 は λ_1/μ_1 の大きさに支配される。

従って、 $\mu_{\rm I}$ ができるだけ大きくなる様に、すなわち (25) 式の最小固有値が最大になるように、固有ベクトル $\{r_{\rm I}\}$ を選択すれば良い。結局、剛な部分(座屈変形の小さな部分)の変位を消去し、柔い部分(座屈変形の大なる部分)の変位を未知数として残せばよい。

3 補強材の座屈に対する効果の検討

船体構造は板要素から構成されており、このような板要素には補強材を取り付けて必要な曲げ剛性および座屈 強度を満足させており、合理的な補強材の寸法および取り付け位置の選択は重要な問題である。

3.1 船底横桁コーナー部の座風強度計算ならびに考察

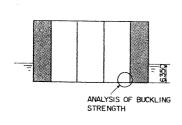


Fig. 5 Ballast condition

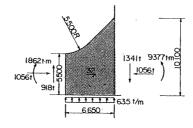


Fig. 6 Forces acting on bottom transverse

船体構造のなかで船底横桁のコーナー部は応力レベルが高く、座屈事故が発生しやすい。また、コーナー部に対する補強材の配置に対する検討は、あまり実施されていない。ここでは、大形タンカー(主要目をTable 4 に示す)の船底横桁のコーナー部を選び、補強材の取り付け位

Table 4 Principal dimensions

D. W.	1, 000, 000 ton
L_{BP}	482. 0 m
B_{mld}	87. 0 m
D_{mld}	42. 0 m
d	32. 0 m

置が座屈強度に及ぼす影響を検討する。

座屈計算に対する荷重条件として、船底横桁のコーナー部に圧縮力が作用し、座屈が生じやすいバラスト状態を選んだ。まず、横桁に作用する部材力を立体横強度計算によって求め、その結果を Fig.6 に示す。

横桁コーナー部に対する補強は、コーナー部の幾何学的形状および桁に 高圧縮力が作用する事を考慮して、面材・水平補強材・垂直補強材・斜補 強材を Fig.7 に示すように組合わせて配置した。補強材の曲げ剛性として 次式を用いた。

$$I = I_0 + e^2 A \tag{30}$$

ここで、 I_0 :補強材の図心まわりの断面 2 次モーメント、A: 断面積、e: 補強材の図心とウェブの板厚の中央面との距離

座屈に対する境界条件として、 横桁は船底板との接合部で固定支 持、縦通隔壁との接合部およびト リッピングブラケット取付位置で 単純支持されていると見做した。 有限要素の分割図を Fig. 8 に示す。

有限要素法を用いてこの部材力

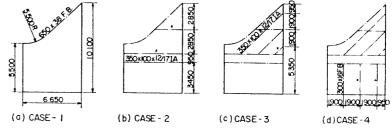


Fig. 7 Various types of stiffener arrangement

(Fig. 6) が作用した場合の船底横桁の座屈強度,すなわち座屈直前の応力分布ならびに座屈の固有値を計算し,座屈強度を次式の安全率Sで表わしFig. 9に,また座屈モードをFig. 10に示す。

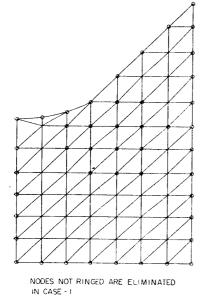


Fig. 8 Finite element idealization

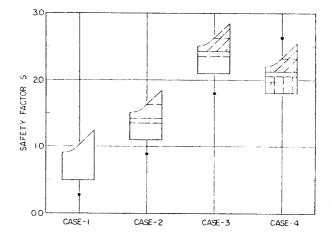


Fig. 9 Buckling strength of transverse web with stiffeners

 $S = P_{cr}/P_{act} \tag{31}$

ここで、 P_{cr} : 座屈荷重、 P_{act} : バラスト状態の作用荷重

Fig. 9 および Fig. 10 より明らかなように、横桁コーナー部に対する補強として面材のみを取り付けた場合、面材もウェブと共に座屈し、座屈に対する安全率は 0.278 であり、座屈強度は非常に低い、面材の他に水平補強材を取り付けると座屈強度は約 3.2 倍増加するが、安全率は 0.893 であり、座屈強度は充分ではない。次に、面材と水平補強材の他に斜補強材を取り付けると座屈強度は大幅に増加し、安全率は 1.786 になる。最後に、面材・水平補強材・斜補強材の他に垂直補強材を取り付けると安全率が 2.643 になり、充分な座屈強度を有していることがわかる。以上の計算結果から明らかなように、補強材を取り付ける事によって座屈強度は増加する。特に斜補強材を取り付けることによって座屈に対する安全率が 1 を越えるので、適切な補強材の選択が重要になる。

引続いて、Fig.8 に示すように節点変位の一部を消去して固有値方程式のサイズを縮小して、船底横桁のコーナー部の座屈強度を解析した。解析結果と固有値方程式の元数を Table 5 に示す。同表から明らかなように、節

座屈に対する補強材の効果に関する研究

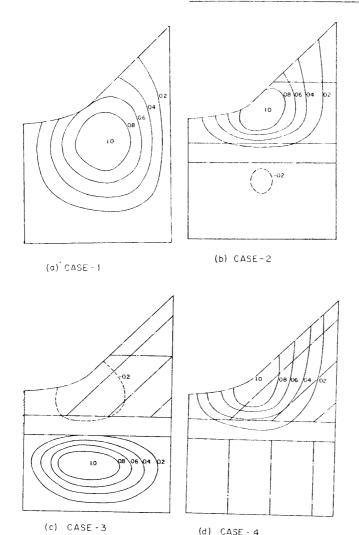


Fig. 10 Buckling deformation

Table 5 Buckling strength of bottom transverse

Buckling coefficient (S)	Number of degrees of freedom
0. 278	161
0. 303	77

点変位を消去し自由度が大幅に減小しても解 の精度は良く、前章で述べた固有値方程式の サイズの減小法が座屈強度の解析に有用であ る事がわかる。

4. 結 言

有限要素法を用いて船体構造部材の座屈強 度を解析する場合,問題になる固有値方程式 のサイズの縮小法に対する検討および船底横 桁のコーナー部の座屈に関する検討を行った 結果,次の事が明らかになった。

- (1) 有限要素法による座屈解析のための 固有値方程式は、振動解析に対して開発され た手法を用いると精度をあまり落さずに効率 良く処理できる。
- (2) 上記の手法を用いる場合, 剛な領域 (座屈変形の小なる領域)の変位を消去し, 柔い領域(座屈変形の大なる領域)の変位を 方程式の未知数として残せば良い。
- (3) 船底横桁コーナーに補強材を取り付けると座屈強度は大幅に増加する。特に斜補

強材を取り付けることによって座屈に対する安全率が1を越えるので、適切な補強材の選択が重要になる。

最後に、本研究を行うに当り種々貴重なご討論をたまわった東京大学山本善之教授ならびに大阪大学上田幸雄 助教授に深甚の謝意を表します。

参考文献

- 1) 寺沢,上田,松石: 有限要素法による平板の弾塑性座屈 (第1報,第2報),造船協会論文集第122号 (昭和42年12月),日本造船学会論文集第127号,(昭和45年6月).
- 2) 西牧,上田,松石:大形タンカーの局部強度に関する研究(第1報,第2報),日本造船学会論文集第125号(昭和44年6月),第126号(昭和44年12月).
- .3) R. J. Guyan: Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA, Vol. 3, No. 2 (1965).
- 4) B. Irons: Structural Eigen Value Problems; Elimination of Unwanted Variables, AIAA, Vol. 3 No. 5 (1965)
- 5) 戸川隼人:マトリックスの数値計算,オーム社 (1971).
- 6) Timoshenko & Gere: Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill (1961).