

(昭和 48 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

帯板要素による平板構造解析

正員 吉 田 宏一郎* 岡 徳 昭*

Analysis of Plate Structures by Strip Elements

by Koichiro Yoshida, *Member* Noriaki Oka

Summary

In this paper, a general method for efficient analysis of spacial plate structures with uniform cross sections is proposed, where strip elements are used as principal structural elements.

Two kinds of methods to evaluate stiffness matrixes of elements other than strip elements, which are necessary to make it possible to analyze spacial plate structures simulated to actual ones as closely as possible, are discussed and a computer program with several kinds of elements stiffness matrixes guided by these ideas was made. By using this program, some models of tank structures were analyzed theoretically and comparing with experiments, the coincidence was good.

Moreover, an alternatively loaded tank structure model with bulk carrier type double hull cross section at the floating condition in the still water was analyzed theoretically.

1 概 要

本論文では、帯板要素を基本要素として一様断面の立体平板構造を精度を保持しつつ効率的に解析する一般的方法が取扱われている。実構造に近い平板構造を取扱う際に帯板要素以外に必要な要素剛性行列を求める 2 種類の考え方を述べ、これに基づいて導かれた数種の要素剛性行列を有する計算プログラムを作成した。数種類の平板構造の解析を行い、実験と比較して良い相関を得、更にバルクキャリア型 2 重殻タンク構造模型が交番載荷されて静水中に浮いている場合の理論解析を行った。

2 ま え が き

平板要素を用いる有限要素法は、組織的な解析プロセスと汎用性を有し、平板構造解析の一般的な方法として、最も有効な武器である。しかしながら有限要素法は、本質的に多数の微少な要素に分割することを要するため、解析対象構造が大型、複雑になると、解くべき方程式の元数及び入力データが膨大となるので、それらの処理のためプログラムが複雑になるとともに、計算時間が長大になる。

このため、船体のタンク構造解析を行う際に、構造全体に単純に有限要素法を応用することは必ずしも一般的ではなく、構造の特徴に応じて数種の解析法を組合せて用いるのが普通であり、先ず立体骨組構造として解析し、この出力結果を用いて有限要素法により部分構造を詳細解析する方法がよく行われる。この様にマクロ解析の結果を用いて次第にミクロな解析を行う場合、第一段階としての立体骨組構造モデルへの置換の方法が最終結果の精度に関して重要な要因となる。特に縦強度としての 2 軸曲げ剪断、振りを取扱う場合や、2 重殻構造を対象とする場合にはモデル化にあたって十分な注意が必要である。

著者等は、前々回¹⁾、前回²⁾の報告において帯板要素を用いて平板構造を座屈解析あるいは曲げ解析する方法を取扱い、その基本的な有効性を確認した。本論文では、これらの延長として解析対象を実際構造に近づけるために必要な要素の導入法、適用法について研究した。本研究が対象とする構造は、一様断面の立体平板構造であり、以後、断面を構成する平板、梁を断面部材、区画、補強のためのその他の平板、梁等を非断面部材と称することとする。

* 東京大学船舶工学科

3 解析 法

3.1 帯板要素

本論文で取扱う帯板要素は、矩形要素の1つと考えられるものであり、対象とする一様断面の立体平板構造の断面部材となっている矩形平板に適用される。この矩形要素の変位関数として、長辺方向（局部座標系での x 方向）と短辺方向（局部座標系での y 方向）（Fig. 1 参照）に対し

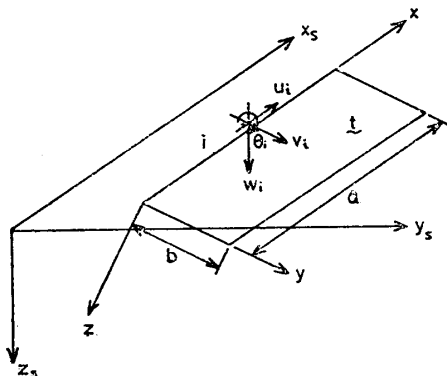


Fig. 1 Strip Elements and Coordinates

て異った種類の関数を仮定する。短辺方向では、その要素内に関する低次の冪級数を仮定し、その係数である節線変位を長辺方向の両端部における境界条件を満足する様な級数に展開し、この級数の係数を未知数とする。この様な意味でリッツ法と有限要素法との混合法であり、又問題が2次元から1次元に還元されたことになる。本論文では、取扱いを容易にするため、長辺方向の両端部で、板の面外変形（曲げ）に対して単純支持、面内変形に対しては、長辺方向に自由、短辺方向に拘束の場合の変位関数を取扱うが、後述する様に、問題の物理的性質を吟味したり、非断面部材と適宜組合わせて用いることにより、各種の実用的な境界条件が実現出来る。この場合の変位関数は前報²⁾に従って次の様にかける。

$$u = \sum_{m=1}^M [f_5 u_{im} + f_6 u_{jm}] \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$v = \sum_{m=1}^M [f_5 v_{im} + f_6 v_{jm}] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$w = \sum_{m=1}^M [f_1 \theta_{im} + f_2 w_{im} + f_3 \theta_{jm} + f_4 w_{jm}] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

ここで、 $f_1 = y - 2y^2/b + y^3/b^2$, $f_2 = 1 - 3y^2/b^2 + 2y^3/b^3$, $f_3 = -y^2/b + y^3/b^2$, $f_4 = 3y^2/b^2 - 2y^3/b^3$, $f_5 = 1 - y/b$, $f_6 = y/b$

a は長辺の長さ、 b は短辺の長さ、 θ_{im} , w_{im} , v_{im} , u_{im} は、それぞれ節線 i における m 項目の仮定級数に対する回転角、 z 方向変位、 y 方向変位、 x 方向変位である（Fig. 1 参照）。

3.2 有限要素法との結合

非断面部材に関しては、2種類の考え方が可能である。第1は、非断面部材の要素は、その主要寸法にわたって帯板要素と結合しているものとして、結合線において、その変位が帯板要素の変位と完全に適合する条件で要素剛性行列を導くものであり、第2は、非断面部材の要素自身に独立な変位関数を仮定するもので、実際的な方法として通常の有限要素法における要素を導入することを考えるものである。以後後者の考え方による要素を有限要素と称することとする。前者については、梁要素として取扱う防撓材が最も典型的な例であり、前報²⁾においてその要素剛性行列を導いた。

この考え方で導かれた要素剛性行列は、帯板要素のそれと基本的に一致しているためプログラム上便利ではあるが、平板要素等に対して適用するには種々の困難がともなう。そこで、第2の方法を考え、有限要素が帯板要素と結合する場合には、要素の節点を帯板要素の節線に結合させるものとする。この場合、その節点変位を節線変位に展開する必要があるので、この展開を統一的に取扱い得る様に展開行列を定義する。考える要素の節点の全部あるいは一部が節線に結合するものとして全体座標による節点変位の内、節線に結合する節点変位を節線変位に適合させるため次に示す展開行列 E_e を定義する。

$$\delta = E_e \delta_s$$

ここで、 δ_s は結合点については節線変位、結合しない節点については節点変位そのものを要素とするベクトルであり、 δ は節点変位である。 E_e の内容、大きさは、使用する要素の種類、結合点の座標（全体座標系）、仮定する級数の関数形及びその項数によってきまる。帯板要素の剛性行列に足し込むべき有限要素の要素剛性行列 K_s は、要素自身の剛性行列 K と次式で関係づけられる。

$$K_s = E_e^T K E_e$$

E_e の具体的内容の一例を、平面応力6自由度3角形要素の場合について示す。3節点を i, j, k 、各節点のバ

ラメタを u, v, w とし、節点 i, j, k が節線 i, j, k と $x = x_I, x_J, x_K$ の位置で結合していて、項数を M ($1, 2 \sim M$) とする。

要素に外力が作用している場合の等価節点外力も E_e を用いて得られる。1 つの有限要素の 2 つの節点が節線に結合している場合、節点間の要素境界における変位の適合性は、第 1 の考え方の場合と異り、両者の変位関数によってきまる。

以後の計算例に用いたプログラムでは、有限要素として上述の平面応力6自由度3角形要素を組み込まれているが、上式で判る様に E_e には多数の0ブロック行列が含まれているので、 K_e を求める掛算を行う際、 E_e のままで行うのはメモリー使用上効率が悪いので、考える有限要素の節点毎に、結合の有無の判断を行い、結合している場合に非0ブロック行列のみを用いて掛算を行っている。

以上、一様断面の立体平板構造を構成する各種部材の取扱いを述べて来たが、これらをまとめて Table 1 に示す。これらの要素を組立てることに
より、各種の構造解析が可能となるが、断面部材
については、長辺方向には分割を行わないため、
この方向の変位は完全に連続しており、精度が保
持されるとともに、入力データは僅かで済む。こ
の特徴は、断面部材が複雑に組合わされた断面形
状を有する構造において顕著となるが、一方非断
面部材として多数の有限要素を用いるようになる
につれて、希薄になる。この様な場合、出来る限
り非断面部材の要素として梁要素を利用すれば、
直接的には未知数の増大をともしないから有効
である。

3.3 境界条件に関する考察

帯板要素の変位関数には、長辺方向の端部において変位に関する境界条件を満たすものとする。そのため各種の境界条件に対応する変位関数をプログラムに内蔵し、問題に応じて使い分けることも考えられるが、別の方法として、簡単な変位関数による剛性行列のみを内蔵しておいて、部材の適切な配置等により種々の境界条件を精度の良い近似で実現することも考えられる。ここでは、後者によるものとして、3.1 で述べた変位関数の場合について 2, 3 の考察を行う。

例えば、Fig.2 に示す様に、チャンネル型断面の平板構造の端部に断面を横切る梁、平板あるいは平板構造を設けると、主にこれらの部材配置による断面のゆがみに対する効果が得られることに

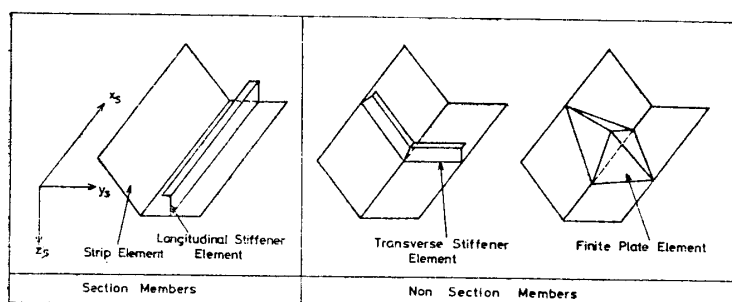


Table 1 Structural Elements

曲げモーメント、剪断力、振りモーメントが0の自由境界である。3.1に述べた変位関数は、端部で、梁的な意味では、曲げ、振りに関して単純支持条件に相当し、振り外力がワーピング・モーメントも含めて自己平衡状態にあれば、変位及び振り角を0に規定することは、弾性変形に影響を与えないから、この状態にあてはまる。船体に応用する場合には、船首尾部は本質的に変断面であるから、平行部の端部における部材間の相対変位や、船首尾部の存在による曲げモーメント、剪断力を考慮するためには、解析対象とする平行部の前後に適当な長さで内部構造を有する一様断面の仮想構造を仮定する必要がある (Fig. 4 参照)。

ここで、船首尾部を無視し、甲板、底板及び船側外板の4枚の縦部材のみから出来ている正方形断面の箱船を考え、これに斜波中における静水圧を自己平衡状態になる様にモデル化して加え (Fig. 5 (a)), その縦強度応力を適当な要素分割と項数によって計算し (Fig. 5 (b)), その断面積分値を梁理論による値と比較してみた (Fig. 6)。これによれば、積分を図式に行ったため少々誤差もあるが、端部自由の境界条件に対する縦強度応力となっていることが判る。

横強度に注目して、数タンク構造部分の解析を行う場合は、両端の境界は、梁的な意味では単純支持条件となり、隣接構造に起因する縦強度影響は、適切な梁理論による結果と重ね合わせれば良いであろう。

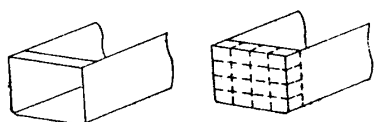


Fig. 2 Additional End Restraints

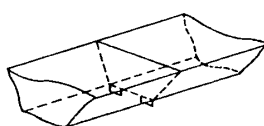


Fig. 3 Intermediate Supports

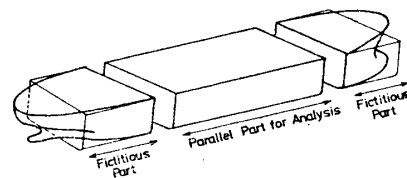
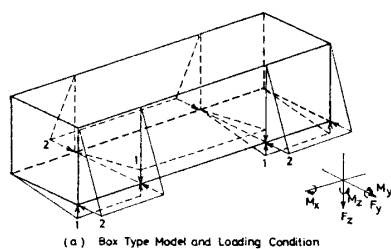
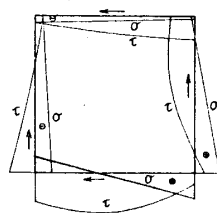


Fig. 4 Fictitious Parts for Parallel Parts Analysis



(a) Box Type Model and Loading Condition



(b) Longitudinal Stress at 1/4 Section

Fig. 5 Box Type Model

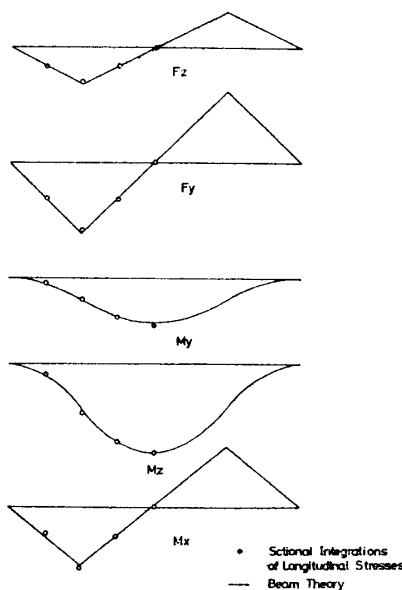


Fig. 6 Comparison of Sectional Integrations with Beam Theory

4 チャンネル型模型の解析

4.1 実験との比較

作成した計算プログラムの精度チェックのため、Fig. 7 (a) に示すチャンネル型断面のタンク構造模型（模型 I）の実験を行い、変形、応力を計測し計算値と比較した。断面部材は両側板、底板及び底板中心線上の縦防撓材である。非断面部材としては、2 枚の単板を横隔壁として長さの 3 等分点（図中の断面 B）に、又、横防撓材を長さの中央（断面 D）に設けている。平板部材はすべて板厚 3.2 mm で、防撓材は、いずれも平板型で 50×6 mm である。この模型の両端で、各板の両面をナイフエッジではさみこみ、図中に斜線部で示す領域（ 75×75 mm）に部分等分布荷重を下方から加える実験を行った。一方計算は、両側板をそれぞれ 4 等分割、底板を 5 分割して帯板要素を用い、横隔壁については、帯板要素の節線によって分割される 20 個の長方形のそれぞれに 2 個の 3 角形要素を用い、両防撓材には、それぞれ縦防撓材要素、横防撓材要素を用い、級数は、長さ中央に関する対称性を考慮して奇数項のみの 8 項（15 半波迄）を仮定した。計測値と計算値との比較を Fig. 8～Fig. 11 に示す。図はいずれも、部分等分布荷重の総和が 1 ton の場合として表示してある。

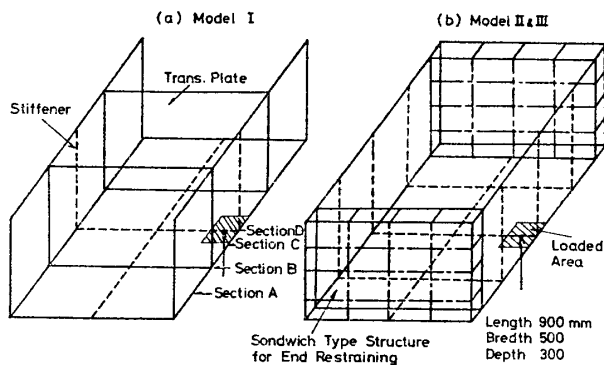


Fig. 7 Channel Type Models

Fig. 8 には、断面 A 及び D における断面変形を示すが、荷重の作用する中央断面 D では断面変形が大きい。右側板の上端部の変位の計測値が計算値に比較してかなり大きいのは、拘束不十分のためと考えられる。Fig. 9 には、断面 A 及び C における軸方向の面内直応力分布を、引張を正として基準枠の外側に表示している。分布形状は、梁の場合と著しく異り、荷重が作用する右側板に集中して応力が出ている。断面 A 及び C における面内剪断力分布を Fig. 10 に示す。荷重が集中荷重に近いので両断面の分布形状、大きさともほぼ等しくなっている。底板中央での不連続は、縦防撓材の存在による。これも右側板に集中して生じている。Fig. 11 には、横隔壁としての矩形板の幅方向中心線上の上下方向、左右方向の面内直応力が示されている。

これらの結果より、模型 I では右側板及び底板の一部（有効幅分）からなる逆 T 型断面梁がほぼ全荷重を受け持つような応力分布となり、左側板にはほとんど応力が出ない。これは、模型が長さと比較して深さが深く、板厚も薄く又防撓材が少ない上に、荷重が集中荷重に近いためと考えられる。なお、荷重位置を中心線上に移動させ

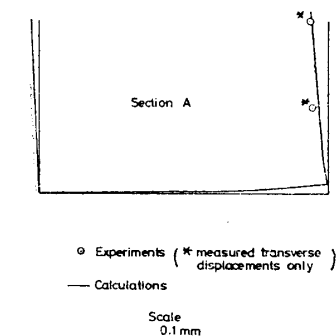


Fig. 8 Sectional Deformations of Model I

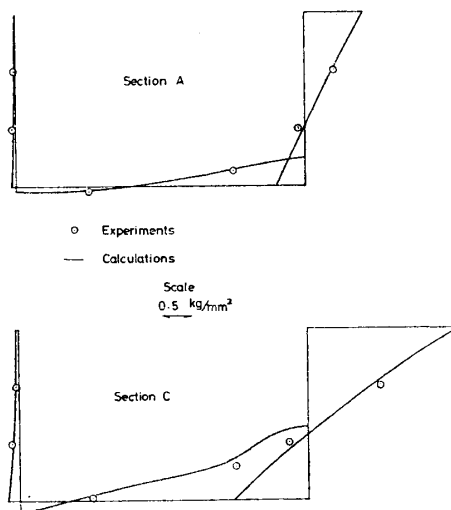


Fig. 9 Axial In-Plane Normal Stress Distributions of Model I

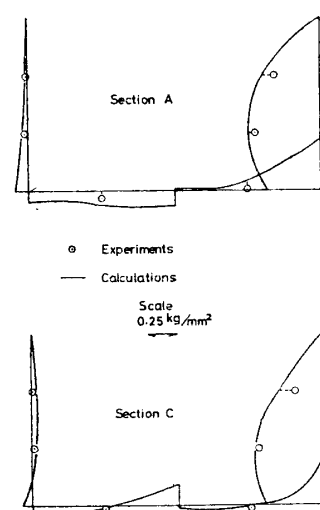


Fig. 10 In-Plane Shearing Stress Distributions of Model I

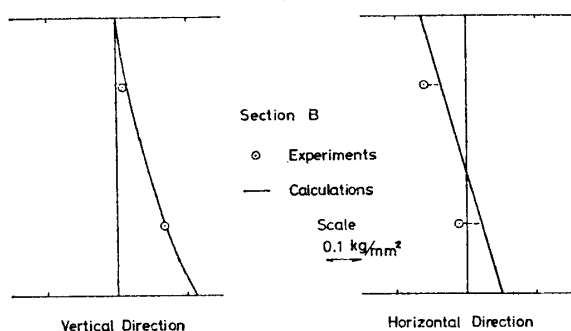


Fig. 11 In-Plane Normal Stress Distributions
in the Transverse Plate of Model I

と比較するため、模型Ⅱから端部サンドウィッチ構造を取除いた模型Ⅲを考える。模型Ⅱ、Ⅲの荷重条件及び断面部材の分割は模型Ⅰと同一であり、サンドウィッチ構造のフェイス材の分割も模型Ⅰの横隔壁の分割と同一であるが、ウェブ材はフェイス材と節点を共有する様な3角形要素に分割した。又項数は奇数項のみの8項とした。これらの比較を、荷重1tonの場合に対して、Fig. 12に断面Aにおける軸方向変位、Fig. 13に断面Cにおける軸方向面内直応力分布、Fig. 14に断面Aにおける面内剪断応力分布を示す。軸方向変位、面内直応力分布には、端部に設けたサンドウィッチ構造の効果が大きく現われている。

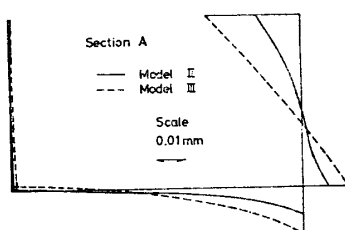


Fig. 12 Axial Displacement
Distributions of
Model II & III

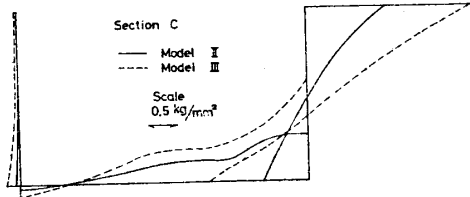


Fig. 13 Axial In-plane Normal Stress Distributions of Model II & III

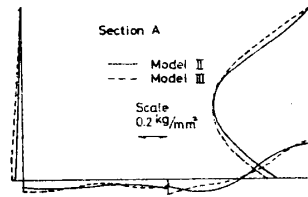


Fig. 14 In-plane Shearing
Stress Distributions
of Model II & III

5 2重殻タンク構造モデルの解析

3 で述べた様に、帯板要素を用いる解析は、断面部材が複雑に組合わされた断面形状を有する一様断面の平板構造の解析に対して特にその特徴を発揮することになる。又境界条件に関して、断面寸法に比較して長さの長い構造に対しては、外力が自己平衡状態にあれば、梁的な意味での自由-自由境界条件に対しても、前述した変位

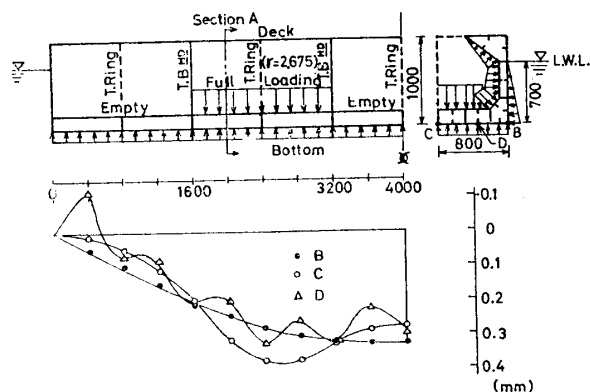


Fig. 15 Structural Arrangement, Loading Condition and Longitudinal Deflection Distribution of Double Hull Tank Model

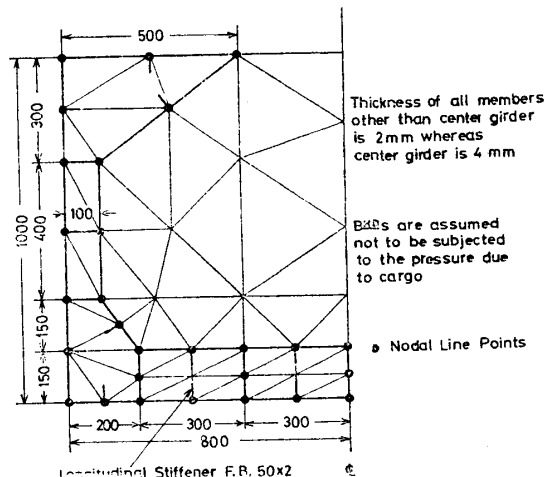


Fig. 16 Midship Section and Elements Subdivision

関数が良い近似で使用出来ることを考察した。これらを組合わせた場合の1例として、バルクキャリア型2重殻構造の5連続タンクの模型が交番载荷されて静水中に浮いている場合の解析を行った。ただし、ここでは、簡単のため、船首尾部の影響を無視したので、平行タンク部の両端が、そのまま船としての端部となり、そこでは、断面力及び断面変形が無いことになる。具体的な構造形状、寸法を Fig. 15 に示す。主要寸法は長さ 8,000mm, 幅 1,600mm, 深さ 1,000mm で、長さ 1,600mm の等しい長さの5個のタンクに横隔壁で区分され、中央及び両端部のタンクが空艙で、残りの2個のタンクに比重 $\gamma=2.654$ の液状貨物が甲板高さまで満載されているものとする。この場合、吃水 $d=700\text{mm}$ となる。ただし、自重は無視するものとする。断面の詳細及び要素分割を Fig. 16 に示す。断面は、センター・ガーダー、サイド・ガーダー各1本を有する2重底、ホッパー、船側部の2重殻及びトップ・サイド・タンクにより完全2重殻構造となっており、各板の中央に平板型の縦通材1本を有する。横隔壁位置では、断面全体にわたって1枚平板が、又各タンクの長さの中央位置では、トランス・リングとして、2重殻構造の内部に1枚平板が存在するものとする。

断面部材は2重殻を構成する平板部材と縦通材であり、前者には帯板要素、後者には縦防撓材要素を用い、非断面部材は、横隔壁とトランス・リングを構成する平板であり、3角形要素を用いた。級数は奇数項のみの11項とした。出力結果の1例として、船尾から $l/4$ ($x=2,000\text{mm}$) の満載タンク中の断面 (Fig. 15 の断面A) における断面部材の変形、応力を Fig. 17~Fig. 20 に示す。

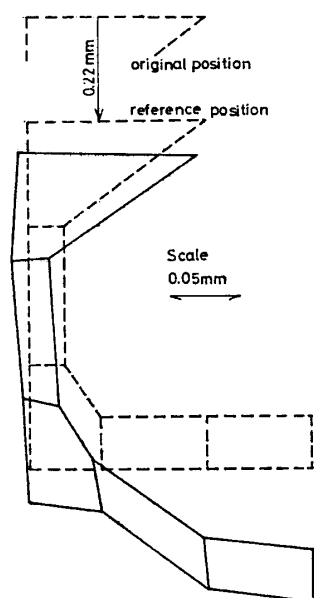


Fig. 17 Deformation at Section A

Fig. 15 の下半部の曲線は、船側外板の下端部 (B 点) とセンター・ガーダーの下端部 (C 点) 及び縦通材 (D 点) の垂直方向変位 (撓み) の長さにわたる分布であり、船側外板がハルガーダー部材として、ほぼ梁としての撓み形と大きさを示すのに対し、センター・ガーダー及び縦通材は2重底に作用する荷重によって、局部的な持ち上り、垂下がりを起こしている。

断面の変位、変形については、断面の変形に比較して、梁としての変位が大きいため、Fig. 17 では、一定量の垂直方向変位を差引いて変形状況が明瞭になる様に、大きな尺度で示している。外部からの水圧に比べ、タンク内部の圧力が大きいため、ホッパーを中心として、船側、2重底が開く形に変形しているが特に2重底の撓みが大きい。

Fig. 18 に示した軸方向の面内直応力分布では、梁としての縦曲げ応力とタンクの局部的な縦曲げによる曲げ応力との重ね合わせに似た分布となっている。Fig. 19 には、Fig. 18 の応力の方向と直交する方向の面内直応力分布が示されている。これは、2重殻構造の場合、断面変形と関係する応力なので、Fig. 17 の断面変形と比較してみると興味深い。Fig. 20 には、帯板要素の面内剪断応力分布を示す。トップ・サイド・タンク、船側部分、ホッパーと比較して、2重底では、サイド・ガーダー、縦防撓材の存在による剪断応力の分岐が大きく複雑な

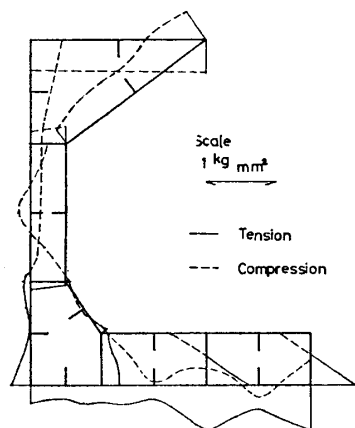


Fig. 18 Axial In-plane Normal Stress Distribution at Section A

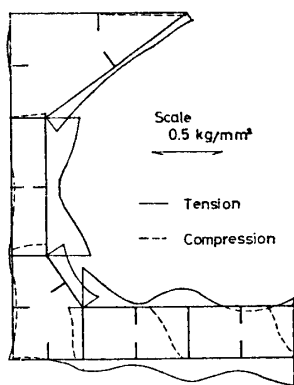


Fig. 19 Transverse In-plane Normal Stress Distribution at Section A

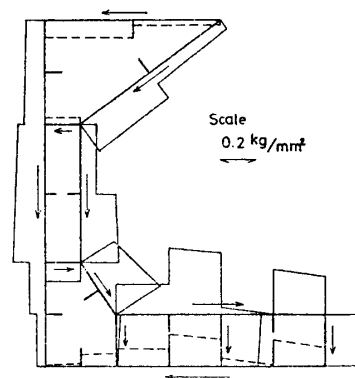


Fig. 20 In-plane Shearing Stress Distribution at Section A

分布となっている。

本問題では、タンク構造の全体挙動を求めることを主たる目的として、Fig. 16 に示した要素分割を行い、級数の項数を奇数項のみの 11 項 (21 半波) として解析した。自由度は 1202 であり、計算時間は HITAC 8700/8800 で約 13 分である。この自由度の数は、詳細部の応力、例えばトランス・リング内部の応力、平板の局所的な曲げ応力等を直接求めることを目的とする場合には、少々不足していると考えられ、精度を高めるためには、要素分割を更に細かくし、級数の項数も増す必要があるが、それらを別解析で求めるための入力データとしては、この程度でよいと思われる。

6 ま と め

帯板要素を基本要素として、一様断面の立体平板構造を解析する方法を検討したが、その結論は以下の様になる。

(1) 帯板要素、縦横防撓材要素及び有限要素を用いる方法により、広範な一様断面平板構造の効率的な解析が可能であると思われる。

(2) 上記の方法に基づく計算プログラムを作成し、チャンネル型断面を有するタンク構造模型の実験を行って計測値と計算値とを比較した結果、両者の相関は、おおよそ良好であった。

(3) バルクキャリア型 2 重殻断面を有する 5 連続タンクが交番載荷されて静水中に浮いている場合を解析し、全体挙動として、ほぼ妥当と思われる結果を得た。

謝 辞

本論文の終りにあたり、東京大学船舶工学科在学中に本研究の 1 部を卒業論文⁹⁾ として行くとともに、その後も計算等に関して絶大なご協力を戴いた石川邦照氏、また図面作成等についてご助力戴いた金子幸平氏をはじめとする東京大学船舶工学科強弱実験室の方々に心より感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 吉田宏一郎：帯板要素による平板構造の座屈解析，日本造船学会論文集第 130 号 (1971)。
- 2) 吉田宏一郎，岡 徳昭：帯板要素による平板構造の曲げ解析，日本造船学会論文集第 132 号 (1972)。
- 3) 石川邦照：帯板要素法による平板構造解析，東京大学船舶工学科卒業論文 (1973)。