(昭和 49 年 5 月日本造船学会春季講演会において講演)

特異性を含むサブストラクチャーによる応力拡大係数の解析

正員 樋口 道之助* 正員 川原 正言*
正員 近藤 潔*

Calculation of Stress Intensity Factors by a Finite Element Substructure Model

by Michinosuke Higuchi, *Member* Masanori Kawahara, *Member*
Kiyoshi Kondo, *Member*

Summary

Many authors, Yamamoto et al.[1], Byskov[2], Rao et al.[3], Walsh[4], Tong et al.[5], etc. have discussed the availability of finite element methods to the calculation of stress intensity factors of cracked plates. Some of them successfully tried the use of special finite elements at the crack-tip-region in order to obtain a higher accuracy. But these are not always very easy to apply to the practical problems because of the complexity of calculation models. The present paper surveys some general relations among variables in finite elements, and proposes a substructure model, as a general extention of Walsh's method, which has a large liberty of choosing crack-tip-element characteristics and reduces the dimension of stiffness matrix. Some simple numerical examples are given to verify the utilities of this model and to examine the influence factors to the accuracy of solutions.

1 緒言

構造物の破壊に対する安全性評価の手段として，線型破壊力学の手法が今日広く適用されているが，特に破壊の進行を支配するパラメータとして，き裂先端の特異な応力歪分布を特徴づける「応力拡大係数」が，数多くの解析の対象とされ，複雑な構造物の疲労，脆性破壊などへの応用も広く試みられている。

応力拡大係数を求める計算は普通の一般的な応力計算と本質的に異なるものではない。しかしき裂の先端という特異な幾何学的条件とこれに伴う応力分布の特異性のために，具体的な数値計算，特に今日広く用いられている有限要素法計算にあたっていろいろな工夫が必要となって来る。

有限要素法による応力拡大係数の計算は，既に山本ら[1]，Byskov[2]，Rao ら[3]，Walsh[4]，Tong ら[5]などによって数多く試みられているが，ここでは特に複雑な構造物への適用における汎用性，計算モデルの任意性の両面で有利であると考えられる，Walsh の方法を一般化した，特異要素を含んだサブストラクチャーを用いる方法について論じ，いくつかの例題の計算例により，解の計算精度へ影響する諸要因について検討した。

Walsh の方法は，特異要素から成る inner region およびそのまわりの outer region の二重構造を持つサブストラクチャーを用いる点に特徴があるが，このようなサブストラクチャーは要素表現の変数間の関係式についての考察から，より一般的に広く多くの問題への適用の可能性を持っており，ここでは特にその応力拡大係数の解析への応用について論ずる。

2 サブストラクチャーを用いる有限要素法解析

構造物がその中にある特異な力学的特性を持つ部分を含んでいる場合，通常の有限要素法をそのまま適用する

* 日本鋼管(株)技術研究所

のは精度向上と計算時間短縮の両面で必ずしも有利ではない。特異な部分を含む領域を1つのサブストラクチャーとして解析し，後で他の通常的な部分との接合体として解析するという手法が，特に複雑な構造物の場合，汎用性の面で有利となる。

サブストラクチャーの設定そのものは，大型構造物の応力解析に用いられるブロック分けの手法と特にかわるものではない。しかしサブストラクチャーが周囲の他の領域と異なる特性を持つ要素を含む場合は，その解析法について特別な考察検討が必要になる。単なるブロック分けと異なるこのようなサブストラクチャーを，ここでは「特異性を含むサブストラクチャー」とよび，区別することとする。

このようなサブストラクチャーは，単に1個の特異要素から成る場合もあり，Walsh が用いたように特異要素とこれをとり巻く通常要素との二重構造のモデル，更に安藤[13]が用いた通常要素の集合体で解析解の重ね合せをある領域に限ったもの，など多くの種類があるが，ここではまず，サブストラクチャーの解析の基礎となる，ある1つの境界の内外における変数間の一般的諸関係式について考察する。

Fig. 1 に示すように解くべき構造物の系を境界Γにより V_0 と V_1 とに分ける。V_0 は構造物の大部分を占めるベースとなる通常的な要素の集合体であり，その境界に変位規定の S_U，表面力規定の S_T を持つものとする。V_1 は構造物のある部分に存在する特異な力学的特性を持った領域である。このような2つの部分の接合全体の系を解くには，次のような解析の手続きが必要である。

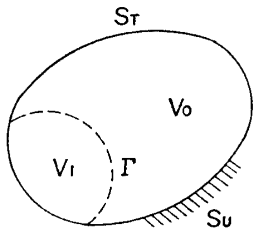

Fig. 1 Domain with a Sub-Structure

（1） 通常的な領域 V_0 での変形状態を表現する独立変数を定め，V_0 のみにおける(Γを含めて)，最小化又はより一般的に停留化すべき汎関数の表現式を求める。

（2） 特異な領域 V_1 での変形状態を表現する独立変数を定め，V_1 のみにおける(Γを含めて)，最小化又は停留化すべき汎関数の表現式を求める。

（3） V_0 と V_1 との接続における適合条件を求める。一般に両者における独立変数間の拘束条件として表現されるが，その特別な場合として，あるいくつかの独立変数が両者で共有される場合がある。

（4） V_0, V_1 おのおので規定される汎関数の総和を，全体の系での汎関数として最小化又は停留化させる条件が解を与える基礎方程式となる。

これらの解析の手続きの中で，サブストラクチャーを用いる解析に特有なのは(2)，(3)，(4)であるが，特に(3)は，サブストラクチャーの性格を特徴づけるのみならず，(2)における特異要素を含む領域の汎関数の設定にも考慮すべき条件であり，これを中心として議論を進めることにする。

いま V_0, V_1 に共通な独立変数が存在する場合を考える。この共通な変数を列ベクトル $\{q_\Gamma\}$ であらわし，V_0, V_1 におけるそれ以外の独立変数をそれぞれ $\{q_0\}$, $\{q_1\}$ とする。V_0, V_1 それぞれで最小化又は停留化すべき汎関数をそれぞれ Π_0, Π_1 とすると，Π_0 は $\{q_0\}$ $\{q_\Gamma\}$ により，Π_1 は $\{q_\Gamma\}$ $\{q_1\}$ により表現されることとなる。変位法ではこれら独立変数として節点変位をとるが，一般的には必ずしもそうでない。δ で微小変動，右上添字Tでベクトル又は行列の転置をあらわすこととすれば，

$$\delta\Pi_0=\{\delta q_0\}^T\left\{\frac{\partial\Pi_0}{\partial q_0}\right\}+\{\delta q_\Gamma\}^T\left\{\frac{\partial\Pi_0}{\partial q_\Gamma}\right\} \tag{1}$$

$$\delta\Pi_1=\{\delta q_\Gamma\}^T\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_\Gamma}\right\}+\{\delta q_1\}^T\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_1}\right\} \tag{2}$$

が成立つ。ここで $\{\partial\Pi_0/\partial q_0\}$ などは，例えば Π_0 を $\{q_0\}$ の各成分で偏微分したものを並べた列ベクトルである。全体の系で最小化又は停留化すべき汎関数 $\Pi=\Pi_0+\Pi_1$ は結局 $\{q_0\}$, $\{q_\Gamma\}$, $\{q_1\}$ で表現され，

$$\delta\Pi=\{\delta q_0\}^T\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial q_0}\right\}+\{\delta q_\Gamma\}^T\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial q_\Gamma}\right\}+\{\delta q_1\}^T\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial q_1}\right\} \tag{3}$$

変分原理により[6]任意の $\{\delta q_0\}$, $\{\delta q_\Gamma\}$, $\{\delta q_1\}$ に対し $\delta\Pi=\delta\Pi_0+\delta\Pi_1=0$ となるためには，式(1)，(2)，(3)を考慮すると，

$$\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial q_0}\right\}=\left\{\frac{\partial\Pi_0}{\partial q_0}\right\}=0 \tag{4}$$

$$\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial q_\Gamma}\right\}=\left\{\frac{\partial\Pi_0}{\partial q_\Gamma}\right\}+\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_\Gamma}\right\}=0 \tag{4a}$$

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right\}=\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}\right\}=0 \tag{4 b}$$

なる関係式が与えられ，これが V_0，V_1 の両者を接合した全体の系での解を求める基礎方程式となる。

次に V_0 おける独立変数の一部 $\{q_r\}$ と，V_1 における独立変数 $\{q_1\}$ との間に，あるマトリックス $[H]$ による次のような拘束条件がある場合について考える [Appendix 1]。

$$\{q_r\}=[H]\{q_1\} \quad \text{従って} \quad \{\delta q_r\}=[H]\{\delta q_1\} \tag{5}$$

この場合，式(1)，(2)は(5)により次式のように変形される。

$$\delta \Pi_0=\{\delta q_0\}^T\left\{\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_0}\right\}+\{\delta q_1\}^T[H]^T\left\{\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_r}\right\} \tag{6}$$

$$\delta \Pi_1=\{\delta q_1\}^T[H]^T\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_r}\right\}+\{\delta q_1\}^T\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}\right\} \tag{7}$$

従って，$\Pi=\Pi_0+\Pi_1$ は $\{q_0\}$，$\{q_1\}$ のみによる表現が可能となり，$\delta\Pi=0$ の条件は，

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial q_0}\right\}=\left\{\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_0}\right\}=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=[H]^T\left(\left\{\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_r}\right\}+\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_r}\right\}\right)+\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}\right\}=0 \tag{8 a}$$

となり，これが(4)，(4 a)，(4 b) にかわって解を求めるための基礎方程式となる。

$[H]$ の逆行列$[H^{-1}]$ が存在する場合は，$\{q_1\}$ が $\{q_r\}$ により次のように表現される (Tong ら[5]は $[H^{-1}]$ に相当する行列のみが存在する場合の解析を行っている [Appendix 1])。

$$\{q_1\}=[H^{-1}]\{q_r\} \tag{9}$$

このとき，$\Pi=\Pi_0+\Pi_1$ は $\{q_0\}$，$\{q_r\}$ のみにより表現出来て，同様の式変形により $\delta\Pi=0$ の条件は，

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial q_0}\right\}=\left\{\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_0}\right\}=0 \tag{10}$$

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial q_r}\right\}=\left\{\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_r}\right\}+\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_r}\right\}+[H^{-1}]^T\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}\right\}=0 \tag{10 a}$$

となって，事実上，V_0 における独立変数のみによって，基礎方程式が表現出来ることとなる。

拘束条件としては，更に一般的ないろいろな与え方が可能であるが，いずれも独立変数と最小化又は停留化すべき汎関数を適当に選択することにより，上記と同様な定式化を行い，基礎方程式が得られることとなる。

3 応力拡大係数の計算への応用

応力拡大係数の計算は，き裂先端近傍の特異な力学的応答特性を解析の対象としており，複雑な大型構造物中のき裂の場合に，前章に述べたサブストラクチャーを用いる手法が有効となる。

き裂先端領域に特異な要素を設定して応力拡大係数の解析を試みた例は，Byskov[2]，Rao ら[3]，Tong ら[5]などがあり，二重構造の要素集合体でここに取扱うサブストラクチャーによる解析を試みた例として Walsh[4] が数えられる。Fig. 2 に，使用された特異要素の形状を示す。Byskov らのモデルでは，節点変位の自由度が8であり，これと同数の独立変数（剛体変位3＋平均定応力3＋応力拡大係数2で合計8）を用いた解析がなされている。Rao らおよび Tong らはそれぞれ変位法および Pian の方法をベースとして，き裂先端応力の高次の解析解を用いて独立変数の数をふやし，これに対応して節点変位の自由度のより大きいモデルを使用している。これに対し，Walsh は節点変位の自由度の大きいモデルを使用しているにも拘らず，変形条件を表現する独立変数の数を5個（剛体変位3＋応力拡大係数2）しかとっていないのが特徴的である。

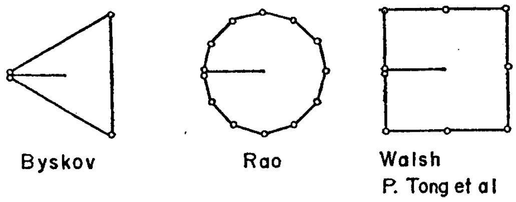

Fig. 2 Some Examples of Special Elements

前三者と Walsh との差異は，前章で述べた拘束を表現するマトリックス$[H]$が逆行列を持つか否かのちがいに対応する。前三者は$[H]$の逆行列又はこれに対応するマトリックスにより特異要素のパラメータを全て節点変位で表現し通常的な部分における解析をそのまま延長した手法を用いている。これに対し，Walsh は特異要

素のパラメータそのものによる解析を行ったため，特異要素の外側に更に一層の通常要素を設定した要素集合体の剛性マトリックスを議論することとなっている。Walsh の計算法そのものでは，独立変数の数が少なすぎるきらいがあり，精度の面で不満足な結果となる場合もあるが，Rao らや Tong らが結果的に用いている解析解の極めて高次な項をとる手法も必ずしも使いやすいとはいえない。それ故，前章で述べたような，要素の独立変数の数および変数間の拘束条件を自由にえらべるサブストラクチャー法による解析を試み，その有用性を確めることとした。

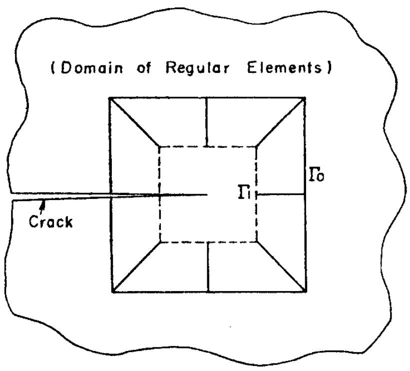

Fig. 3 A Sub-Structure Model

Fig. 3 に，本報告での計算に用いたサブストラクチャーのモデルを示す。境界 Γ_0 の外側は構造物の大部分を占めるベースとなる通常要素の集合体，Γ_0 の内側は通常要素と特異要素の混合したサブストラクチャーである。サブストラクチャーの内部を更に2つに分け，き裂先端を含む境界 Γ_1（点線）の内側が特異要素，Γ_1 の外側は Γ_0 の外側と同様の通常要素である。Γ_0 と Γ_1 の形状および Γ_0, Γ_1 間の要素分割は全く任意であるが，ただ1つ Γ_0 と Γ_1 が共有点を持たないようにする方が汎用性の点で有利である。Γ_1 内にどのような要素を用いても一旦これを通常要素で包んだ形で解析しておけば，他の部分との接合が問題なく出来る。

特異要素での変形状態の表現にはき裂に関する弾性論の解析解のある適当な項数までの式を用い，各項の係数を独立変数としてとり，ここで $\{\alpha\}$ とあらわすこととする。Γ_1, Γ_0 間の領域での変形状態を表現する独立変数を3つのグループ $\{\beta\}$, $\{q_1\}$, $\{q_\Gamma\}$ とに分け，$\{\beta\}$ は，$\{\alpha\}$ との間に次のような拘束条件下にあるとする。

$$\{\beta\}=[H]\{\alpha\} \tag{11}$$

また $\{q_\Gamma\}$ は Γ_0 の外側の領域と共通の独立変数であり，$\{q_1\}$ は何らの拘束を受けないものとする。Γ_0 の外側の領域での独立変数で $\{q_\Gamma\}$ 以外のものを $\{q_0\}$ とあらわす。今，Γ_1 の内部領域で最小化又は停留化すべき汎関数 Π_α を $\{\alpha\}$ のみで表現し，Γ_1, Γ_0 間の領域での汎関数 Π_1 を $\{\beta\}$, $\{q_1\}$, $\{q_\Gamma\}$ で表現し，Γ_0 の外側の領域での汎関数 Π_0 を $\{q_\Gamma\}$, $\{q_0\}$ で表現することが出来るとすれば，前章での議論，および式 (11) より，全体の系で最小化又は停留化すべき汎関数 $\Pi=\Pi_0+\Pi_1+\Pi_\alpha$ は結局 $\{q_0\}$, $\{q_\Gamma\}$, $\{q_1\}$, $\{\alpha\}$ を独立変数として，次のような式が成立つこととなる。

$$\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial q_0}\right\}=\left\{\frac{\partial\Pi_0}{\partial q_0}\right\}=0 \tag{12}$$

$$\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial q_\Gamma}\right\}=\left\{\frac{\partial\Pi_0}{\partial q_\Gamma}\right\}+\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_\Gamma}\right\}=0 \tag{12 a}$$

$$\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial q_1}\right\}=\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_1}\right\}=0 \tag{12 b}$$

$$\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\right\}=[H]^T\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial\beta}\right\}+\left\{\frac{\partial\Pi\alpha}{\partial\alpha}\right\}=0 \tag{12 c}$$

一般に Π_0, Π_1, Π_α はそれぞれの独立変数の2次式として対称行列 $[K]$, $[L]$, $[M]$ により次のように表現される[7]。

$$\Pi_0=\{q_0^T,\ q_\Gamma^T\}\left(\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}K_{00} & K_{0\Gamma}\\ K_{\Gamma 0} & K_{\Gamma\Gamma}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_0\\ q_\Gamma\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}P_0\\ P_\Gamma\end{Bmatrix}\right) \tag{13}$$

$$\Pi_1=\{q_\Gamma^T,\ q_1^T,\ \beta^T\}\left(\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}L_{\Gamma\Gamma} & L_{\Gamma 1} & L_{\Gamma\beta}\\ L_{1\Gamma} & L_{11} & L_{1\beta}\\ L_{\beta\Gamma} & L_{\beta 1} & L_{\beta\beta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_\Gamma\\ q_1\\ \beta\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}Q_\Gamma\\ Q_1\\ Q_\beta\end{Bmatrix}\right) \tag{13 a}$$

$$\Pi_\alpha=\{\alpha\}^T\left(\frac{1}{2}[M]\{\alpha\}-\{R_\alpha\}\right) \tag{13 b}$$

ここで $K_{00}, \cdots, L_{\Gamma\Gamma}, \cdots$ はそれぞれ $[K]$, $[L]$ の部分行列であり，右上添字 T は行列又はベクトルの転置をあらわし，P_0, P_Γ, Q_Γ, Q_1, Q_β, R_α は独立変数と関係のないベクトルをあらわす。又，行列の対称性により，$K_{0\Gamma}=K_{\Gamma 0}^T$ などが成立つ。

それ故，(12), (12 a), (12 b), (12 c) および (13), (13 a), (13 b) を総合すると，次のような解を求めるための基礎方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{0\Gamma} & 0 & 0 \\ K_{\Gamma 0} & K_{\Gamma\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_\Gamma \\ q_1 \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_\Gamma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{\Gamma\Gamma} & L_{\Gamma 1} & L_{\Gamma\beta}H \\ 0 & L_{1\Gamma} & L_{11} & L_{1\beta}H \\ 0 & H^T L_{\beta\Gamma} & H^T L_{\beta 1} & H^T L_{\beta\beta} H + M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_\Gamma \\ q_1 \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_\Gamma \\ Q_1 \\ H^T Q_\beta + R_\alpha \end{Bmatrix} = 0 \tag{14}$$

この式 (14) の第1項と第2項はサブストラクチャー以外の部分の解析から求められ，第3項と第4項とがここで問題とするサブストラクチャーの解析で得られる部分であり，その総和が0となる条件より全ての変数を決定する方程式が得られることとなる。

4 数値計算例および考察

前章までの理論に基づき計算を行った例を示す。Fig. 3 に示したサブストラクチャーのモデルを使用して，Γ_1 の外側（Γ_0 の外側も含む）の通常要素の特性を，次の2通りにかえた場合について，それぞれ計算を試みた。

（1） Pian の1次の混合要素[8),9)] (Fig. 4, 5, 7 での記号：P)

（2） 等歪要素，但し四角形要素は三角形要素を4個集めたもの（Figs. 4, 5, 7 での記号：Q）

特異要素の特性として，解析解を出来るだけ高次の項までとれば精度向上出来ることが，Rao らや Tong らの計算結果からも十分推定出来るが，ここではサブストラクチャーを用いる手法自体のチェックを目的として，Walsh が用いた5つのパラメータに1つ加えた次の6個の独立変数をとることとした。

$$\{\alpha\}^T = \{D_1,\ D_2,\ \omega,\ K_{\mathrm{I}},\ K_{\mathrm{II}},\ \sigma_1{}^{\circ}\} \tag{15}$$

D_1, D_2, ω は剛体変位の平行移動および回転の3成分，K_{I}, K_{II} は応力拡大係数，σ_1 はき裂と平行方向の応力である。これによって特異要素内の点における応力，歪変位が全て表現出来る。特異要素において最小化又は停留化すべき汎関数を求めるためのエネルギー積分は，仮想仕事の原理を用いて線積分でも面積分でも可能であり，どちらも同じ答を与える。

特異要素境界における変数変換マトリックス $[H]$ は $\{\alpha\}$ による変位および応力の表現式を用いて容易に求めることが出来る。

Table 1 A Plate with Double-Edge Cracks $\left(\dfrac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_0\sqrt{\pi a}}\ \text{Values}\right)$

a/W	0.1	0.3	0.5	0.7
YAMAMOTO		1.221	1.327	1.454
Q	1.077	1.195	1.313	1.448
P	1.119	1.231	1.350	1.490

Table 2 A Plate with Center Crack $\left(\dfrac{K_{\mathrm{I}}}{\frac{2F}{W}\sqrt{\pi a}}\ \text{Values}\right)$

a/W	0.1	0.3	0.5	0.7
ISIDA	−0.119	0.027	0.371	0.998
Q	−0.101	0.014	0.332	0.927
P	−0.112	0.014	0.352	0.979

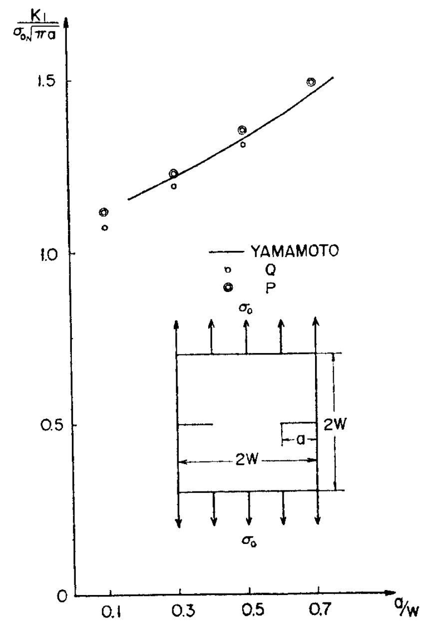

Fig. 4 A Plate with Double-Edge Cracks

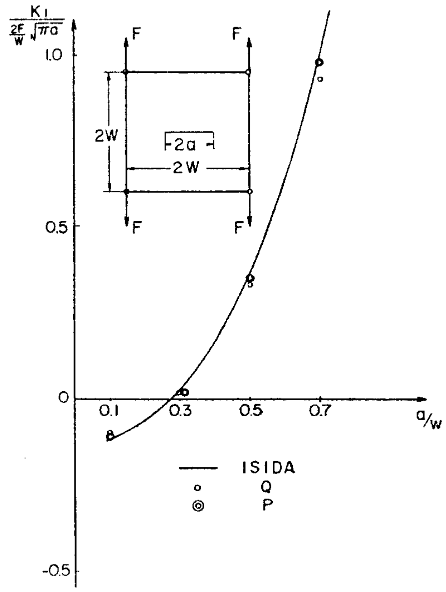

Fig. 5 A Plate with Center Crack

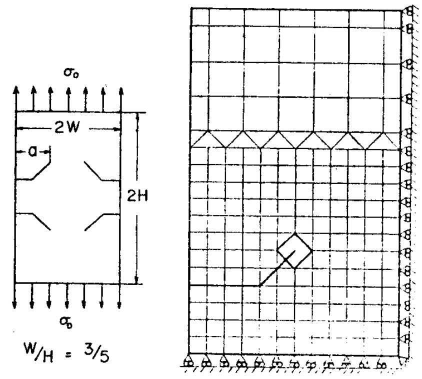

Fig. 6 Finite Element Model of a Plate with Curved Cracks

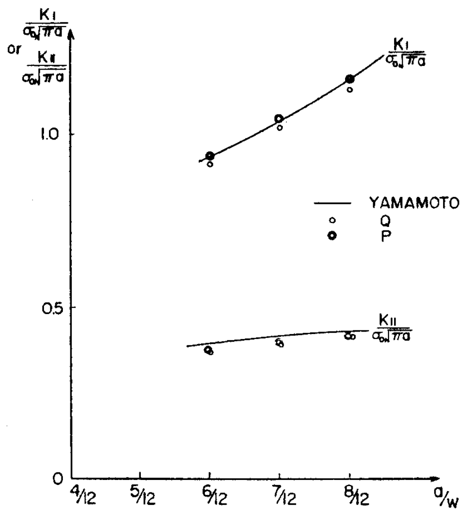

Fig. 7 A Plate with Curved Cracks (K Values)

Table 3 A Plate with Curved Cracks $\left(\frac{K_I}{\sigma_0\sqrt{\pi a}}\text{Values}\right)$

a/W	6/12	7/12	8/12
YAMAMOTO	0.937	1.039	1.163
Q	0.914	1.020	1.131
P	0.940	1.049	1.164

Table 4 A Plate with Curved Cracks $\left(\frac{K_{II}}{\sigma_0\sqrt{\pi a}}\text{Values}\right)$

a/W	6/12	7/12	8/12
YAMAMOTO	0.394	0.413	0.429
Q	0.374	0.396	0.415
P	0.377	0.400	0.419

Example 1 (A Plate with Double-Edge Cracks)

両側に切欠きのある板を一様に引張った場合についての計算を行い，その結果を Table 1 および Fig. 4 に示し，合せて山本ら[10]の計算結果と比較した。

Example 2 (A Plate with Center Crack)

中央に切欠きのある板の四隅を集中力で引張った場合で，その結果を Table 2 および Fig. 5 に示す。石田[11]の計算結果と同様に切欠き長さの短い範囲で負の K_I 値があらわれる。

Example 3 (A Plate with Curved Cracks)

折れ曲った切欠きを持つ板を一様に引張った場合で，その要素分割図を Fig. 6 に，計算結果を Table 3, 4 および Fig. 7 に示す。山本ら[12]の計算結果と同様に，K_I, K_{II} の両方があらわれる。

これらの数値計算結果については，次のようなまとめが得られる。

（1） Example 2 の K_I の絶対値が小さいところを除けば，計算精度は，ほぼ4％以内である。

（2） 一般に Pian の要素を用いた方（記号：P）が，等歪要素を用いた場合（記号：Q）より精度がよい。特に Example 2 の石田の級数解との比較の場合，その傾向がはっきり出ている。

（3） 切欠き長さの短い所では一般に精度がよくない。これは，ある一定の大きさのサブストラクチャーを用いた結果であると考えられ，分割を細かくすることと又は解析解の項を多くとることにより解決できよう。

（4） 応力や変位の急激な変化をもたらす荷重状態，例えば集中力 (Example 2) の場合は，精度向上のために通常要素に高次要素を使用した方がよいと思われる。

又，上記の例以外にいくつかの計算を行い，要素分割，要素特性などが解の精度へ及ぼす影響をしらべた。Table 5 に，その一例として，中央に切欠きのある正方形板 (Example 2 と同じ) に一様な引張応力 σ_0 をかけた

場合の計算結果と，石田[14]の級数解との比較を示す。表中の記号Pは，Pian の要素を使用した場合，Q-2，Q-1 は共に等歪要素を用いた場合である。但し Q-2 は板の幅，長さ方向共 1/10 分割を行った比較的細かい要素分割を行い，Q-1 は Q-2 より長さ方向に2倍だけ大きい縦長の要素分割を行っている。W は特異要素の表現パラメータに等歪成分を含めない Walsh が最初に用いた方法による結果である。

Table 5 A Plate with Center Crack in Uniform Tension (Comparison of $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ Values with Respect to Mesh Sizes and the Number of Parameters)

a/W	0.1	0.3	0.5	0.7
ISIDA	1.014	1.123	1.334	1.680
P	0.965	1.130	1.363	1.721
Q-2	0.906	1.079	1.304	1.648
Q-1	0.890	1.066	1.289	1.629
W	0.869	1.054	1.270	1.594

これらの計算結果の比較から，計算精度を向上させるには，要素分割が粗いか細かいかよりも，特異要素の表現式に解析解のどこまで高次の項までをとるかが重要であることがわかる。要素分割の細かさは精度向上の面では2次的効果しかあらわれていない。Byskov[2]と Rao ら[3]との精度の比較，および Tong ら[5]が得た高精度な結果も，この精度向上の方向を裏付けていると思われる。

5 結 論

以上の解析および計算より次のような結論が得られる。

（1） Walsh[4] の方法の一般化により，通常要素および特異要素の形状および特性の選択に任意性のある，「特異性を含むサブストラクチャー」を用いる解析法の定式化を行った。

（2） 特異要素での独立変数として応力拡大係数，定応力成分までの6個をとった簡単なモデルにより，山本ら[10),12)] 石田[11]の解と比較して精度4％程度の解が得られた。モデルの持つ任意性と汎用性とから，今後の複雑な構造物への解析に有利な方法であると考えられる。

（3） いくつかのチェック計算および他の文献における計算から，解の精度を向上するには，要素分割を細かくするよりも，特異要素のパラメータをふやすことが有効であることが示唆される。

最後にこれらの計算において，多くのご討論と計算例題の提供をいただいた，航空宇宙研究所（現，九州大学教授）石田誠先生に深く感謝いたします。

参 考 文 献

1) 山本，徳田：板構造物中のクラックの応力拡大係数の有限要素法による解析法，日本造船学会論文集，第130号（1971）pp. 219～233.
2) E. Byskov : The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method with Cracked Elements, Int. J. Fract. Mech., Vol.6 (1970) pp. 159～167.
3) A. K. Rao et al : Special Finite Elements for the Analysis of Stress Concentrations and Singularities, 1st Int. Conf. on Structural Mech. in Reactor Technology, Berlin (1971).
4) P. F. Walsh : The Computation of Stress Intensity Factors by a Special Finite Element Technique, Int. J. Solids Structures, Vol.7 (1971) pp. 1333～1342.
5) P. Tong et al.: A Hybrid-Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity, Int. J. Numerical Method in Engineering Vol.7 (1973) pp. 297～308.
6) K. Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, PERGAMON PRESS (1968).
7) I. Holand : Finite Element Method in Stress Analysis, TAPIR (1969).
8) T. H. H. Pian : Element Stiffness-Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses, AFFDL-TR-66-80 (1966) pp. 457～477.
9) T. H. H. Pian : Derivation of Element Stiffness Matrices, AIAA J. Vol.2 (1964) pp. 576～577.
10) 徳田，山本：クラックの応力拡大係数の有限要素法による高精度計算法，日本造船学会論文集第132号（1972）pp. 349～360.
11) M. Isida : Private Communication.
12) 山本，徳田：重ね合せ法による板構造物中の応力拡大係数の解析，JSSC 第7回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集（1973）pp. 709～716.
13) 安藤：船体構造部材のき裂強度解析，三菱重工技報，Vol.10，No. 3（1973）pp. 327～335.

14) M. Isida : Method of Laurent Series Expansion for Internal Crack Problems, Method of Analysis and Solutions of Crack Problems, Mechanics of Fracture 1, edit. by G. C. Sih, Noordhoff Int. Publ., Leiden, 1973 pp. 56～130.

Appendix 1 式 (4 b), (5), (9) の相互関係について

式 (4 b) にあらわれる $\{\partial \Pi_1/\partial q_1\}$ は，$\{q_\Gamma\}$ および $\{q_1\}$ の関数であるが，通常その1次式として，行列 $[L]$, $[M]$ およびベクトル $\{R\}$ により，次のようにあらわされる。

$$\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}\right\}=[L]\{q_\Gamma\}+[M]\{q_1\}+\{R\}=0 \tag{A1}$$

ここで $\{q_\Gamma\}$ の成分数を m_Γ, $\{q_1\}$ の成分数を m_1 とすると $[L]$ は次元 (m_1, m_Γ) の行列，$[M]$ は次元 (m_1, m_1) の行列である。従ってこれより，本文中の(5)又は(9)と類似の式が得られることになるが，$[L]$は少くとも $m_1=m_\Gamma$ でなければ逆行列は存在しない。これに対し $[M]$ は正方行列であり，逆行列の存在は一応想定可能である。

それ故一般に任意な m_1, m_Γ に対して，本文中の (4 b) 式：$\{\partial \Pi_1/\partial q_1\}=0$ は

$$\{q_1\}=-[M]^{-1}[L]\{q_\Gamma\}-[M]^{-1}\{R\} \tag{A2}$$

という形への変形が可能であり，特に $\{R\}=0$ のときは(9)式と形式的に等価の式が導かれる。しかし(5)式は$[L]$の逆行列が一般には ($m_1 \neq m_\Gamma$ の場合は全て) 存在しないから，(4 b) と全く別な独立な条件式である。しかしもし(5)式，すなわち

$$\{q_\Gamma\}=[H]\{q_1\} \tag{A3}$$

が与えられれば，(A1) は次のような式に変形される。

$$([L][H]+[M])\{q_1\}+\{R\}=0 \tag{A4}$$

すなわち$[H]$の存在によりサブストラクチャー V_1 内に属する変数についての方程式が得られることとなる。

Tong ら[5]の用いている方法はこれと逆の，形式的には(9)式と等価の

$$\{q_1\}=[H^*]\{q_\Gamma\} \tag{A5}$$

を用いる。このときは，$\{q_1\}$ を消去して V_0 に属する変数 $\{q_0\}$, $\{q_\Gamma\}$ のみの方程式がえられサブストラクチャーを用いないで直接全体の系での解を求め，その後 (A5) で $\{q_1\}$ の値を決めることとなる。

すなわち (A3) 又は(5)はサブストラクチャーの解析に必要な特有の条件式となっている。

Appendix 2 例題計算に用いた特異要素の表現式

独立変数として式 (15) に示す6個のパラメータを用いる。

$$\{\alpha\}^T=\{D_1, D_2, \omega, K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, \sigma_1^\circ\} \tag{B1}$$

応力$\{\sigma\}$および変位$\{u\}$は次のように表現される。

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&f_1&f_4&1\\0&0&0&f_2&f_5&0\\0&0&0&f_3&f_6&0\end{bmatrix}\{\alpha\} \tag{B2}$$

$$\{u\}=\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-x_2&g_1&g_3&c_1x_1\\0&1&x_1&g_2&g_4&-c_2x_2\end{bmatrix}\{\alpha\} \tag{B3}$$

但し x_1 はき裂と平行方向，x_2 はき裂と直角方向で，原点をき裂先端におく座標であり極座標 (r, θ) により次のようにあらわされる。

$$x_1=r\cos\theta, \quad x_2=r\sin\theta \tag{B4}$$

$f_1, f_2, \cdots, f_6$ および $g_1, g_2, \cdots, g_4$ は，r と θ の関数として，又 c_1, c_2 は定数としてそれぞれ次のようにあらわされる。

$$\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\\f_5\\f_6\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\begin{Bmatrix}\cos(\theta/2)[1-\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]\\ \cos(\theta/2)[1+\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]\\ \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\cos(3\theta/2)\\ -\sin(\theta/2)[2+\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)]\\ \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)\\ \cos(\theta/2)[1-\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]\end{Bmatrix} \tag{B5}$$

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2)\,[\kappa-1+2\sin^2(\theta/2)] \\ \sin(\theta/2)\,[\kappa+1-2\sin^2(\theta/2)] \\ \sin(\theta/2)\,[\kappa+1+2\cos^2(\theta/2)] \\ -\cos(\theta/2)[\kappa-1-2\sin^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \tag{B 6}$$

但し　$\kappa=3-4\mu$ (B 7)

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2G} \begin{Bmatrix} 1-\mu \\ \mu \end{Bmatrix} \tag{B 8}$$

ここでGは剛性率，μは平面歪，平面応力の条件により異なる値で，ポアソン比をνとすると

$$\mu = \begin{cases} \nu & :\text{平 面 歪} \\ \nu/(1+\nu) & :\text{平面応力} \end{cases} \tag{B 9}$$

である。

このように特異要素の応力，変位が与えられれば，その周囲の通常要素との接続のためのマトリックス$[H]$は簡単に求められる。例えば，通常要素として等歪要素を用いる場合，特異要素境界上の節点 (r_i, θ_i) の変位を(u_{1i}, u_{2i})，$i=1,\cdots,k$ とすれば，

$$\{\beta\}^T = \{u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{1k}, u_{2k}\} \tag{B 5}$$

として，$\{\beta\}=[H]\{\alpha\}$ となるマトリックス$[H]$は次のように与えられる。

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_1\sin\theta_1 & g_1(r_1,\theta_1) & g_3(r_1,\theta_1) & c_1 r_1\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & r_1\cos\theta_1 & g_2(r_1,\theta_1) & g_4(r_1,\theta_1) & -c_2 r_1\sin\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -r_k\sin\theta_k & g_1(r_k,\theta_k) & g_3(r_k,\theta_k) & c_1 r_k\cos\theta_k \\ 0 & 1 & r_k\sin\theta_k & g_2(r_k,\theta_k) & g_4(r_k,\theta_k) & -c_2 r_k\cos\theta_k \end{bmatrix} \tag{B 6}$$