(昭和51年5月　日本造船学会春季講演会において講演)

保針運動の統計的同定と最適操舵

正員　大　津　皓　平*　　正員　北　川　源四郎**
正員　堀　籠　教　夫***

Statistical Identification of Ship's Course Keeping Motion and Optimal Control

by Kohei Otsu, *Member*　Genshiro Kitagawa, *Member*
Michio Horigome, *Member*

Summary

In this paper, the ship's course keeping motion is represented by an Auto Regressive model (A.R. model) in the time series analysis and it is shown that the Akaike's FPE method is effective to the determination of the order of the model. This method is immediately applied to the estimation of spectra of some ship's motions and we designed one optimal controller using the Dynamic Programming.

According to our digital simulation, our controller shows some remarkable characteristics and in particular, through a smoother and a lower rudder motion than the manual or the present auto-pilot steering, ship's motions (especially Yawing and Rolling) are considerably reduced. This last point is expected to contribute to the development of the Direct Digital Control.

1　緒　　言

時間的に変動する不規則な現象の解明に威力を発揮する時系列理論は，今や制御理論と結びついて新しい段階に入りつつあることは，例えば最近の IEEE の Time Series に関する特集号を見ても明らかである[10]。それは時系列理論による多次元の系の同定 (Identification) が，これまでの周波数領域においてではなく，時間領域において成功を収めつつあることが原因で，その中でも本稿において述べる自己回帰過程に関する赤池の FPE 法は実際の複雑な系に適用され多大の成果をあげたこともあって，この分野において今日最も有力な同定法ということができる[5]。

我々は本稿において，この赤池の方法を船体運動におけるフィードバック系の例である保針運動 (Course-keeping motion) に適用することを試みた。そのためまず赤池の自己回帰過程の同定法（最小 FPE 法もしくは最小 AIC 法と呼ばれる）の概略を述べ，実船で得られたデータにこの方法を適用し，そのパワースペクトラム，雑音寄与率などについて検討を加えた。次にこの自己回帰表現をいわゆる状態空間表現に直し，この表現からよく知られたダイナミックプログラミング法によって，適当な，二次形式の評価関数のもとで，最適操舵系の設計を試みた。最後に設計された最適操舵系の制御の良否を確めるため，ディジタルシミュレーションを行なった。この結果，少なくとも理論的に，この方法が保針制御方式に効果を上げ得ることが明らかとなったので報告する。

（注：以下の記述において，Eは統計的期待値，A^tはAの転置行列，Iは断わらない限り単位行列，$\det(A)$は行列Aの行列式とする。）

2　定常時系列の自己回帰表現における赤池の方法

2.1　一次元定常時系列の場合

離散時間において時々刻々得られる時系列 $x(n)$, $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ が定常時系列とみなせるとき，$x(n)$ は白色雑音列 $\epsilon(n)$ を入力とした線形フィルタからの出力として，

$$x(n)=\epsilon(n)+b(1)\epsilon(n-1)+\cdots\cdots$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty} b(m)\epsilon(n-m),\ (b(0)=1) \qquad (2.1)$$

と表現できる。この表現法を移動平均型モデル (Moving Average, MA Model) と呼ぶ。また (2.1) は，$x(n)$ の過去の系列の荷重和として，

*　東京商船大学航海学科
**　統計数理研究所第5研究部
***　東京商船大学機関学科

$$x(n)=a(1)x(n-1)+a(2)x(n-2)+\cdots\cdots$$
$$+\epsilon(n)=\sum_{m=1}^{\infty}a(m)x(n-m)+\epsilon(n) \qquad (2.2)$$

とも表現でき，自己回帰型モデル (Auto-Regressive, AR Model) と呼ぶ。(2.1) と (2.2) を合わせた表現

$$x(n)=a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+\cdots\cdots$$
$$+b_0\epsilon(n)+b_1\epsilon(n-1)+\cdots\cdots \qquad (2.3)$$

も可能で自己回帰移動平均型モデル (ARMA Model) と言う。ここで取扱う表現法は主として (2.2) の自己回帰型モデル (以後 AR モデルと呼ぶ) である[8]。

さて得られるデータ個数は有限で，上式のような無限表示は不可能であるから，AR モデル (2.2) は有限次数 M で切って，

$$x(n)=\sum_{m=1}^{M}a(m)x(n-m)+\epsilon(n) \qquad (2.4)$$

と表現するのが実用的である。このとき，(1) M を何次で切り，(2) 自己回帰係数 $a(m)$ をいかに決めるかが問題となる。いまかりに M を決めたとし，(2) の問題を平均自乗誤差の意味で最も誤差の少い $a(m)$ (これを $a_M(m)$ とする) を採用することにすれば，$a_M(m)$ は，よく知られた Yule-Walker の関係式，(M 元一次)

$$\sum_{m=1}^{M}R_{xx}(l-m)a_M(m)=R_{xx}(l) \quad (l=1,2\cdots,M) \qquad (2.5)$$

を解くことによって与えられる。ここで $R_{xx}(l)$ は，N 個のデータから計算される相関関数である。したがって本質的には，M を決めることが重要となる。この問題に対し，Box, Jenkins, T. W. Anderson 等によるさまざまなアプローチが試みられたが，最近，赤池は次数 M で時系列を予測した場合にその予測誤差を示す量 FPE (Final Prediction Error) の推定値を求め，この FPE が最小となる次数 M を，AR モデルにおける次数として採用することを提唱している[1] (Appendix)。

ここで M 次の FPE(M) は，

$$\mathrm{FPE}(M)=(N+(M+1))(N-(M+1))^{-1}\sigma^2(M) \qquad (2.6)$$

で与えられ，N はデータ個数，$\sigma^2(M)$ は，M 次における残差項 (innovation term) $\epsilon(n)$ の分散である。

2.2 多次元定常時系列の場合

相互に関連し合った k 次元の定常時系列 $X(n)=(x_1(n), x_2(n),\cdots\cdots, x_k(n))^t$ についても，任意の $x_i(n)$ の自己回帰表現として，m 時刻における x_j と x_i の回帰係数を $A_{ij}(m)$ とすると，

$$x_i(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}A_{ij}(m)x_j(n-m)+\epsilon_i(n)$$
$$(i=1,\ 2,\cdots\cdots k) \qquad (2.7)$$

と表現され，これは，一般にベクトル表現すると，

$$X(n)=\sum_{m=1}^{\infty}A(m)X(s-m)+U(n) \qquad (2.8)$$

となる。ここで $A(m)$ は $A_{ij}(m)$ を要素とする $k\times k$ 行列，また $U(n)=(\epsilon_1(n), \epsilon_2(n),\cdots\cdots, \epsilon_k(n))^t$ で，ϵ_i, ϵ_j はそれらの分散共分散を σ_{ij} とすると (以下同じ)，それらの相関関数 $R_{\epsilon_i\epsilon_j}$ は，

$$R_{\epsilon_i\epsilon_j}(l)=\delta_{l,0}\sigma_{ij} \ (\delta_{l,0}=1(l=0),\ =0(l\neq0)) \qquad (2.9)$$

となる k 次元白色雑音であり，$\epsilon_i(n)$ と任意の $x_j(n-m)$ ($m=1, 2,\cdots\cdots$) の共分散は 0 とする。この場合においても，有限次数 M で (2.8) を切り，

$$X(n)=\sum_{m=1}^{M}A(m)X(n-m)+U(n) \qquad (2.10)$$

と有限表示することが実用的である。赤池はこの場合には，d_M を $U(n)$ の分散共分散行列 (σ_{ij}) の推定値とすると，

多次元 MFPE (M)；

$$\mathrm{MFPE}(M)=\left(1+\frac{Mk+1}{N}\right)^k\left(1-\frac{Mk+1}{N}\right)^{-k}\det(d_M) \qquad (2.11)$$

を各次数 M について求め，この量が最小となる次数を (2.10) の次数 M として採用することを提唱している[2]。この方法では，相互に絡みあった各々の時系列 x_i を，それぞれ異なった次数によって自己回帰表現するのではなく，k 個の時系列群すべてについて，統一した同じ次数 M で最も予測誤差を少く時系列群を表現していることに注意すべきである。

M が決まれば，(2.5) に対応した多次元の場合の Yule-Walker の関係式(M 元一次連立方程式)を解くことによって $\hat{A}_{ij}(m)$ が $A_{ij}(m)$ の最小自乗推定値として求まる。しかし，この方程式を解くことは時間的に言って得策でなく，M についての漸化式に変形して解くことが実用的である[1),2),5)]。

2.3 スペクトラムの推定

このようにして，時間領域において最良予測式が決まれば，領域をフーリエ変換によって周波数領域に移せば，いわゆるオートもしくはクロススペクトラム (Auto and/or Cross Spectrum) を求め得る。すなわち k 次元定常時系列 $X(n)=(x_1(n), x_2(n),\cdots\cdots, x_k(n))^t$ の場合，(2.10) のスカラ表現として，

$$x_i(n)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{k}A_{ij}(m)x_j(n-m)+\epsilon_i(n) \qquad (2.10)'$$

の形に書けるから，$\epsilon_i(n)$ と $\epsilon_j(n)$ の相互相関関数 $R_{\epsilon_i\epsilon_j}(l)$ を求めると，

$$R_{\epsilon_i\epsilon_j}(l)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M}\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}A_{ir}(m)A_{js}(n)R_{rs}(l-m+n) \qquad (2.12)$$

が得られる。ただし $R_{rs}(l)$は，時系列 $\{x_r(n)\}$ と $\{x_s(n)\}$ との相互相関関数である。また $p_{rs}(f)$ を上記2つの間の時系列のクロススペクトルとすると，

$$R_{rs}(l)=\int_{-1/2}^{1/2}\exp(i2\pi fl)p_{rs}(f)df,\quad (i=\sqrt{-1}) \tag{2.13}$$

の関係から，ϵ_i, ϵ_j の分散，共分散 σ_{ij} は，

$$\sigma_{ij}=\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}A_{ir}(f)p_{rs}(f)\overline{A_{js}(f)} \quad (i,\ j=1,\ 2,\cdots\cdots,\ k) \tag{2.14}$$

と書ける。ただし $\overline{A_{js}(f)}$ は $A_{js}(f)$ の共役行列である。$A_{ih}(f)$ は，$A_{ih}(0)=-1$ とすると，

$$A_{ih}(f)=\sum_{m=0}^{M}A_{ih}(m)\exp(-i2\pi fm) \tag{2.15}$$

ゆえに，$\{x_i(n)\}$ と $\{x_j(n)\}$ のクロススペクトラム $p_{ij}(f)$ は，

$$p_{ij}(f)=\frac{\sigma_{ij}}{\left(\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}A_{ir}(f)\overline{A_{js}(f)}\right)} \tag{2.16}$$

によって与えられる。

以上まとめて，マトリクス表現では，

$$P(f)=(A(f)^{-1}\sum((\overline{A(f)})^t)^{-1} \tag{2.17}$$

となる。ここで $\sum$ は ϵ_i, ϵ_j の分散共分散行列 $\{\sigma_{ij}\}$ で，

$$A(f)=-\left(I-\sum_{m=1}^{M}A(m)\exp(-i2\pi fm)\right) \tag{2.18}$$

(I は $k\times k$ 単位行列，$A(m)$ は，$(i,\ j)$ 要素が，$A_{ij}(m)$ であるような $k\times k$ 行列) である。

このようにして，赤池の方法では周波数領域で適当な Window を用いて Raw spectrum を平滑化する方法にかわって，まず時間領域で時系列の予測式を求め，(2.18) によってスペクトラムを推定する。したがって，従来の Lag 数にあたる次数 M および，Window を半自動的に決定することができる。

3 Feedback 系の自己回帰表現とその解析

3.1 Feedback 系の自己回帰表現

2.2 の実用的な多次元定常時系列の自己回帰表現法が得られた結果，保針操舵系のような一般に Feedback のかかった系を解析する方法が与えられる[3]。

いま簡単のために Fig. 1 のように2変数 Feedback 系を考察する。時刻 n の出力信号 $x(n)$，フィードバック信号 $y(n)$ は，線形過程 (Linear Process) 表現として，$\{a_{(m)}\}$, $\{b_{(m)}\}$ をインパルス応答関数とするとき，

$$\left.\begin{aligned}y(n)&=\sum_{m=1}^{\infty}a(m)x(n-m)+u(n)\\x(n)&=\sum_{m=1}^{\infty}b(m)y(n-m)+v(n)\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

と表わせる。ここで $u(n)$, $v(n)$ は，たとえば，波浪外力などによる外乱で，$E[u\cdot v]=0$ であることを要するが，必ずしも白色雑音でなくともよい。このとき $a(m)$ の推定値 $\hat{a}(m)$ として，自乗平均誤差を最小化して，

$$\underset{\{\hat{a}(m)\}}{Min}\ E\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left\{y(n)-\sum_{m=1}^{\infty}a(m)x(n-m)\right\}^2\right] \tag{3.2}$$

を満たす $\{\hat{a}_m\}$ を求めようとすると，得られる係数が統計的に偏差をもつので，良い推定法とは言えない。それは，$u(n)$, $v(n)$ が Feedback loop を通じて，$x(n)$, $y(n)$ の過去の値と一般に相関を持つからで，このことから統計的偏差のない推定値が求まるのは，$u(n)$, $v(n)$ が白色雑音の場合に限ることがわかる。そこで $u(n)$, $v(n)$ を自己回帰表現によって白色化し，この白色化によって現われる $u(n)$, $v(n)$ の過去の値による自己回帰項を消去する方法を考える。まず $u(n)$, $v(n)$ を自己回帰表現し，白色雑音 $\xi(n)$, $\eta(n)$ をもちいて，

$$\left.\begin{aligned}u(n)&=\sum_{l=1}^{\infty}c(l)u(n-l)+\xi(n)\\v(n)&=\sum_{l=1}^{\infty}d(l)v(n-l)+\eta(n)\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

と表わす。(3.3) の第1式に (3.1) の第1式に代入すれば，

$$y(n)=\sum_{m=1}^{\infty}a(m)x(n-m)+\sum_{l=1}^{\infty}c(l)u(n-l)+\xi(n) \tag{3.4}$$

が得られる。第2項 $\sum_{l=1}^{\infty}c(l)u(n-l)$ を消去するため，(3.4) の左辺から形式的に $\sum_{l=1}^{\infty}c(l)y(n-l)$ を引けば，

$$\begin{aligned}y(n)-\sum_{l=1}^{\infty}c(l)y(n-l)=&\sum_{m=1}^{\infty}a(m)x(n-m)\\&+\sum_{l=1}^{\infty}c(l)u(n-l)+\xi(n)\\&-\sum_{l=1}^{\infty}c(l)\left\{\sum_{m=1}^{\infty}a(m)x(n-l-m)+u(n-l)\right\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

となって，$\sum_{l=1}^{\infty}c(l)u(n-l)$ 項が消え，整理すれば，

$$\begin{aligned}y(n)=&\sum_{l=1}^{\infty}c(l)y(n-l)+\sum_{m=1}^{\infty}a(m)x(n-m)\\&-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c(l)a(m)x(n-l-m)+\xi(n)\end{aligned} \tag{3.6}$$

が導びかれる。(3.6) は，さらにまとめて，

$$y(n)=\sum_{l=1}^{\infty}c(l)y(n-l)+\sum_{m=1}^{\infty}A(m)x(n-m)+\xi(n) \tag{3.7}$$

と書ける。ここで $A(m)$ は，

$$\left\{\begin{aligned}&A(1)=a(1)\\&\cdots\cdots\cdots\\&A(m)=a(m)-\sum_{l=1}^{m-1}c(l)a(m-l)\quad (m=2,\ 3,\cdots\cdots\infty)\end{aligned}\right. \tag{3.8}$$

である。(3.7)には，(3.1)と異なり $y(n-l)(l=1,\cdots\infty,)$ で表わされる y 自身の過去の値があること，$\xi(n)$ が白色雑音であること，および $x(n)$ についても (3.7) と同様な表現が可能であることに留意すれば，これらの表現は2.2で述べた多次元自己回帰モデルの2次元のあてはめに相当することがわかる。したがって2.2のMFPEを使えば，(3.7) において l, m を同じ次数で切れるので，有限表示が可能となる。

一般に，上に述べたことを k 次元変量の場合に拡張する。$X(n)=(x_1(n), x_2(n),\cdots, x_k(n))^t$ において，$\{a_{ij}(m)\}$ を出力 $x_i(n)$ に対する $x_j(n)$ からのインパルス応答関数とすれば，$x_i(n)$ は，

$$x_i(n)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty}a_{ij}(m)x_j(n-m)+u_i(n),\quad (i=1, 2,\cdots, k) \tag{3.9}$$

(但し $a_{ii}(m)=0$) と線形過程として表現され，さらに白色化の演算によって，

$$x_i(n)=\sum_{l=1}^{\infty}c_i(l)x_i(n-l)+\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{k}\sum_{m=1}^{\infty}A_{ijm}(m)x_j(n-m)+\epsilon_i(n) \tag{3.10}$$

と自己回帰表現に直る。(3.10) は，MFPEを使って，一般に

$$x_i(n)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{k}A_{ij}(m)x_j(n-m)+\epsilon_i(n) \tag{3.11}$$

と有限表示される。このとき

$$\left.\begin{aligned}&A_{ii}(m)=c_i(m),\ (m=1,2,\cdots M),\\ &A_{ij}(m)=a_{ij}(m)-\sum_{l=1}^{m}c_i(l)a_{ij}(m-l)\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

である。(3.12) は，マトリクス表示すると，(2.10) になるが，このとき行列 $A(m)$ の対角項には，$u(n)$ を白色化して得られる自己回帰係数が現われることに留意すべきである。なお (3.12) を逆に $a_{ij}(m)$ について解けば，(3.1) におけるインパルス応答関数が M 個求まる.

3.2 雑音寄与率について

上に得られたインパルス応答関数を用いると，多次元定常時系列において，周波数 f における $x_j(n)$ から $x_i(n)$ への周波数応答関数 $a_{ij}(f)$ は，

$$a_{ij}(f)=\sum_{m=1}^{M}a_{ij}(m)\exp(-i2\pi fm) \tag{3.13}$$

で与えられる。

また3.1の終りに注意したことから雑音の自己回帰係数 $c_i(l)$ が求まり，$u_i(n)$ は，

$$u_i(n)=\sum_{m=1}^{M}c_i(m)u_i(n-m)+\epsilon_i \tag{3.14}$$

とかけるから，外乱 $u_i(n)$ のスペクトラム $p_{u_i}(f)$ は (2.17) から，

$$p_{u_i}(f)=\frac{\sigma_{ii}^2}{\left|1-\sum_{l=1}^{M}c_i(l)\exp(-i2\pi fl)\right|^2}=\frac{\sigma_{ii}^2}{\left|1-\sum_{l=1}^{M}A_{ii}(l)\exp(-i2\pi fl)\right|^2} \tag{3.15}$$

によって与えられる。

(2.17) において，いまそれぞれの残差項 $\epsilon_i(n)$ が，i の異なるとき互いに無相関であれば，$\sigma_{ij}=0, (i\neq j)$ となるので，$x_i(n)$ のオートスペクトラム $p_{ii}(f)$ は，

$$p_{ii}(f)=\sum_{j=1}^{k}|(A(f))_{ij}^{-1}|^2\sigma_{jj}^2 \tag{3.16}$$

で与えられる $(A(f))_{ij}^{-1}$ は $(A(f))^{-1}$ の (i, j) 要素)。このとき，

$$q_{ij}(f)=|(A(f))_{ij}^{-1}|^2\sigma_{jj}^2 \tag{3.17}$$

とすると，(3.16) は

$$p_{ii}(f)=\sum_{j=1}^{k}q_{ij}(f) \tag{3.18}$$

となる。(3.17) における σ_{jj}^2 は，j 番目の変数の白色雑音であるから，その白色雑音のパワースペクトラムに等しい。このことから $q_{ij}(f)$ は，フィードバック系を構成する各変数に白色雑音を加えたとき，j 番目の変数に与えた白色雑音が，i 番目の変数の周波数 f のパワースペクトラムに与える影響を表わしている。よって，新しく，

$$r_{ij}(f)=q_{ij}(f)/p_{ii}(f) \tag{3.19}$$

と $r_{ij}(f)$ を定義するとき，$r_{ij}(f)$ を j 変数の雑音寄与率 (Noise contribution) と呼び，フィードバック系の解析に重要な役割を果す。

4 実船データによる解析例

2,3章で得られたフィードバック系の解析法を，実際の船の動揺記録にあてはめた例を示す。供試船は，就航中の典型的な高速コンテナ船A丸（排水量約16,400トン，長さ175m）で，著者の1人が，かつて従来の方法で統計解析を試みた例と同じ記録である[7]。我々はこの記録の中から2例を選択し，保針運動に関連すると考えられるTab.1の項目についてモデルを構成した。選択した2例はT. No.6とT. No.8で，T. No.6は熟練した操舵員が操舵した場合（以下，手動操舵もしくはManual Steeringと呼ぶ)，T. No.8は搭載中のオートパイロットによる操舵の場合（以下，自動操舵もしくはAuto Pilot Steeringと呼ぶ）の例である。Tab.1中，○印は，この解析において使用した運動項目である（船首横加速度 (Lateral acceleration) は，$Yacc$ と略す)。表から，我々の場合4次元の自己回帰モデルによる解析

を行なったことになり，この点，従来の多くの解析が，保針運動に直接関連している Yaw と Rudder の2変数についてのみ解析していた点と異なる。いずれの記録についても Sampling 周期は1秒で，標本数は 896 点である。Tab. 2 は，両記録の得られた当時の気象・海象を示している。

これ等の記録に，第2章で述べた MFPE を使って多次元自己回帰モデルのあてはめをした結果，手動操舵の場合その次数は 9，自動操舵の場合 8 であった。次に，(2.17) 式を使って求めた Yaw, Roll, Rudder についてのパワースペクトラムを Fig.2 (手動操舵)，Fig.3 (自動操舵) に示す。手動操舵の場合，Yaw，Rudder が非常に長周期の所にそのピークを示し，以後若干の変動はあるが概ね落ちる傾向にある。自動操舵の場合，0.04 Hz 付近にもピークをもつ双峰型となっている点が特徴である。Roll は両例共に 0.06 Hz 付近に強いピークが認められる。

次に各変数の残差項 ϵ_i 間の無相関性を確めた上，手動操舵の場合の雑音寄与率を計算した。Fig.4 は，この場合の Rudder への各変数の寄与率，Fig.5 は Yaw への寄与率を示している。Yaw，Rudder のパワースペクトラムにピークがある長周期の所に着目すると，Fig. 4 から Rudder は Yaw に大きく影響されて動き，自分自身の固有の雑音による無駄な動きのないことがわかる。一方，Fig. 5 においては，Yaw が Rudder のゆっくりとした動きに応答している。また Roll はそのピークの位置において，Yaw に貢献しているが，Yaw にピークを形成する程ではない。なお，自動操舵の場合においても，同様の解析をした所，舵を速い周期でとる程 Rudder の Yaw への影響が相対的に少なくなること，および Yaw，Roll 間の関連性が認められた。後に述べたことは，Rudder の制御によって，Yaw を軽減すれば，Roll も多少軽減される可能性が期待されることを示している。

5 統計的最適制御系の設計

5.1 制御系の自己回帰表現から状態空間表現への変換

2, 3 章で求めた制御系の自己回帰表現は，最適制御系の設計のための表現としては不便であるので，状態空間表現 (State Space Representation) に変換して考察する[2),5)]。このため，制御系を構成する k 個の変数は一般に r 個の被制御変数 (Controlled Variable) と l 個の操作変数 (Manipulated Variable) に分けられること ($k=r+l$) を考慮して，(2.10) を

$$X(n)=\sum_{m=1}^{M}A(m)X(n-m)+\sum_{m=1}^{M}B(m)Y(n-m)+U(n) \tag{5.1}$$

と書き直す。ここで $X(n)$ は r 個の被制御変数ベクトルで，$X(n)=(x_1(n), x_2(n), \cdots\cdots, x_r(n))^t$，$Y(n)$ は l 個の制御変数ベクトル $Y(n)=(y_1(n), y_2(n), \cdots\cdots, y_l(n))^t$ で，$U(n)(=\epsilon_1(n), \epsilon_2(n), \cdots\cdots, \epsilon_r(n))^t$ は $X(k)$, $Y(k)$ ($k=n-1, n-2, \cdots\cdots$) と無相関な r 次元白色雑音ベクトルである。また $A(m)$, $B(m)$ は $A(m)=r\updownarrow\{\overset{\longleftarrow r \longrightarrow}{a_{ij}(m)}\}$, $B(m)=l\updownarrow\{\overset{\longleftarrow l \longrightarrow}{b_{ij}(m)}\}$ で与えられる $r\times r$, $l\times l$ 回帰係数行列である。そしてこの場合における次数 M の決定には，(2.11) にかわって，($k=r+l$)

$$\mathrm{FPEC}(M)=(1+(Mk+1)/N)^r\cdot(1-(Mk+1)/N)^{-r}\det(d_{r,M}) \tag{5.2}$$

を使う。ただし $d_{r,M}$ は，(2.11) の d_M の左上隅の被制御変数に対応する $r\times r$ 小行列である[5)]。

さて (5.1) の自己回帰表現から状態空間表現への変換は一意ではないが，ここでは後の実時間制御のことを十分考慮し，得られた瞬間のデータをそれが将来（p 時刻先）使われる形にして記憶させるため，(5.1) において $n=n+p$ とおいて，

$$\begin{aligned}
X(n+p)&=\sum_{m=1}^{M}A(m)X(n+p-m)+\sum_{m=1}^{M}B(m)Y(n+p-m)+U(n+p)\\
&=\sum_{m=1}^{p}A(m)X(n+p-m)+\sum_{m=p+1}^{M}A(m)X(n+p-m)\\
&\quad+\sum_{m=1}^{p}B(m)\ Y\ (n+p-m)+\sum_{m=p+1}^{M}B(m)Y(n+p-m)+U(n+p)\\
&=\sum_{j=0}^{p-1}A(p-j)X(n+j)+\sum_{i=1}^{M-p}A(p+i)X(n-i)\\
&\quad+\sum_{j=0}^{p-1}B(p-j)Y(n+j)+\sum_{i=1}^{M-p}B(p+i)Y(n-i)+U(n+p)
\end{aligned} \tag{5.1$'$}$$

と変形する。そこで，新しく，

$$Z_p(n)=\sum_{i=1}^{M-p}A(p+i)X(n-i)+\sum_{i=1}^{M-p}B(p+i)Y(n-1)\qquad(p=0, 1, \cdots\cdots, M-1) \tag{5.3}$$

とすると，

$$\begin{aligned}
Z_p(n)&=Z_{p+1}(n-1)+A(p+1)X(n-1)+B(p+1)Y(n-1)\qquad(p=1, 2, \cdots\cdots M-2)\\
Z_{M-1}(n)&=A(M)X(n-1)+B(M)Y(n-1)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

という関係が求められる。いま新しいデータ $X(n)$ が得られた瞬間を考えて，$Z_0(n)=X(n)$ とおくと，(5.4) を用いて，

$$Z_0(n)=Z_1(n-1)+A(1)Z_0(n-1)+B(1)Y(n-1)+U(n), \qquad (5.5)$$

また $p=1, 2,\cdots\cdots M-2$ では，

$$Z_p(n)=Z_{p+1}(n-1)+A(p+1)Z_0(n-1)+B(p+1)Y(n-1) \qquad (5.6)$$

さらに $p=M-1$ では，

$$Z_{M-1}(n)=A(M)Z_0(n-1)+B(M)Y(n-1) \qquad (5.7)$$

を得る。(5.5)，(5.6)，(5.7) をマトリクス表示すると，

$$\begin{array}{c} r\updownarrow \\ \\ \\ r\updownarrow \\ r\updownarrow \end{array}\overset{1}{\begin{bmatrix} Z_0(n) \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{M-2}(n) \\ Z_{M-1}(n) \end{bmatrix}} = \begin{array}{c} r\updownarrow \\ \\ \\ r\updownarrow \\ r\updownarrow \end{array}\begin{bmatrix} A(1) & I & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ A(M-1) & 0 & \cdots & & I \\ A(M) & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} Z_0(n-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{M-2}(n-1) \\ Z_{M-1}(n-1) \end{pmatrix}$$

$$+\begin{array}{c} r\updownarrow \\ \\ \\ r\updownarrow \\ r\updownarrow \end{array}\overset{l}{\begin{pmatrix} B(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ B(M-1) \\ B(M) \end{pmatrix}}\, l\updownarrow(\overset{r}{\overline{Y(n-1)}})+\begin{array}{c} r\updownarrow \\ r\updownarrow \\ \\ r\updownarrow \\ r\updownarrow \end{array}\overset{1}{\begin{pmatrix} U(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad (5.8)$$

となる。ここで改めて，

$$\left.\begin{array}{l} Z_n= 1\updownarrow(\overset{r}{Z_0(n)},\ \overset{r}{Z_1(n)},\cdots\cdots \overset{r}{Z_{M-1}(n)})^t \\ Y_n= l\updownarrow \overset{1}{Y(n)}, \quad X_n= r\updownarrow \overset{1}{X(n)} \end{array}\right\} \qquad (5.9)$$

と置くと，(5.8) は，

$$\left\{\begin{array}{l} Z_n=\Phi Z_{n-1}+\Gamma Y_{n-1}+W_n \\ X_n=HZ_{n-1} \end{array}\right. \qquad (5.10)$$

と表現され，ひとつの状態空間表現が得られる。ただし

$$\Phi=\left(\begin{array}{c|c} A(1) & I \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ A(M-1) & 0 \cdots\cdots I \\ \hline A(M) & 0 \cdots\cdots 0 \end{array}\right),$$

$$\Gamma=\begin{pmatrix} B(1) \\ \vdots \\ B(M-1) \\ B(M) \end{pmatrix}, \qquad W_n=\begin{pmatrix} U(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5.11)$$

$H=(I\ \ 0\cdots\cdots 0)$ で与えられる。

(5.6)，(5.8) の状態変数 $Z_p(n)$ は，$X(n+p)$ の推定値，$\sum_{m=1}^{M} A(m)X(n+p-m)$ を求めるときの $X(n-1)$，$X(n-2)$，…… 等，時刻 $n-1$ までの観測値に依存する部分を与え，したがって $Z_0(n)$ は $X(n)$ の予測値 $\hat{X}(n)$ を与える。最後のことは，$X(n-1)$ が得られた瞬間，次の n 時刻における $X(n)$ の推定値 $\hat{X}(n)$ を求めるには，(5.5) を用いて極めてわずかな計算で与えられるから，計算機制御のような実時間制御においては，いま得られた $\hat{X}(n)$ を用いて，まず n 時刻の制御信号を計算し，それを発令した後，$Z_p(n)$，$(p=1, 2,\cdots\cdots, M-1)$ を計算して将来使われる形で記憶しておけば良いので，有利である。

5.2 D.P. による統計的最適制御系の設計

(5.10) のような状態空間表現を用いれば，適当な二次形式の評価関数のもとで，最適制御系を設計することができる。その際，評価関数としては工学的に見て，次の3点を考慮しておけば良いと考えられる。すなわち，

（1） Yawing，Rolling などの被制御変数の偏差をできるだけ小さくすること，

（2） 舵などの制御量もできるだけ少くして (1) を実現すること，

（3） (2) に関連して舵の変動速力をできるだけ遅くして，滑らかな制御信号を得ること，

である。この結果，我々は次のような評価関数 J_I を採用することにする（I は最適化する区間)。

$$J_I=E\Big[\sum_{n=1}^{I} Z_n{}^tQ(n)Z_n+Y_{n-1}^tR(n)Y_{n-1}+(Y_{n-1}-Y_{n-2})^tT(n)(Y_{n-1}-Y_{n-2})\Big] \qquad (5.12).$$

ここで，$Q(n)$ は目的 (1) のために導入した $Mr\times Mr$ 重み係数マトリクス，$R(n)$ は目的 (2) のために導入した $l\times l$ マトリクスである。また $T(n)$ は目的 (3) のために筆者らの導入した重み係数マトリクス $(l\times l)$ で[6]，いずれも非負行列である。さて，上記の問題は，線形2次形式の最適制御問題であるから R. Bellman のダイナミックプログラミング (D.P.) を使って解き得る。

まず評価関数を，一般に

$$J_I=E\Big[\sum_{n=1}^{I}\Big\{(Z_n^t,\ Y_{n-1}^t)\,{}_{rM}\!\updownarrow\begin{array}{c} rM\updownarrow \\ l\updownarrow \end{array}\begin{pmatrix} \overset{rM}{S(n)} & \overset{l}{P(n)} \\ P(n)^t & R(n) \end{pmatrix}\begin{array}{c} \updownarrow rM \\ \updownarrow l \end{array}\begin{pmatrix} Z_n \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}+(Y_{n-1}-Y_{n-2})^tT(n)(Y_{n-1}-Y_{n-2})\Big\}\Big] \qquad (5.13)$$

とおく。ここで

$$S(n)=\ r\updownarrow\left(\begin{array}{c|c} \overset{r}{Q(n)} & \overset{(M-1)r}{0} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\updownarrow rM, \qquad P(n)=\overset{l}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\updownarrow rM \qquad (5.14)$$

とおくと (5.12) と同じものとなる。いま (5.13) の [ ] 内全体を K_I とおき，$J_I=E[K_I]$ として D.P. の最適原理を適用する。

$$K_I=(Z_I^t,\ Y_{I-1}^t)\begin{pmatrix}S(I) & P(I)\\ P(I)^t & R(I)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_I\\ Y_{I-1}\end{pmatrix}+(Y_{I-1}-Y_{I-2})^tT(I)(Y_{I-1}-Y_{I-2})+K_{I-1} \tag{5.15}$$

であるから両辺の平均値をとると,

$$J_I=E\left[(Z_I^t,\ Y_{I-1}^t)\begin{pmatrix}S(I) & P(I)\\ P(I)^t & R(I)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_I\\ Y_{I-1}\end{pmatrix}+(Y_{I-1}-Y_{I-2})^tT(I)(Y_{I-1}-Y_{I-2})\right]+J_{I-1} \tag{5.16}$$

となる。状態空間表現 (5.10) を (5.16) の Z_I に代入すると, (5.16) は,

$$\begin{aligned}J_I=&E[W_I^tQ(I)W_I]+E[(Y_{I-1}^t\Gamma^t+Z_{I-1}^t\Phi^t)\\&\times S(I)(\Phi Z_{I-1}+\Gamma Y_{I-1})+(Z_{I-1}^t\Phi^t+Y_{I-1}^t\Gamma^t)\\&\times P_IY_{I-1}+Y_{I-1}^tP_I^t(\Phi Z_{I-1}+\Gamma Y_{I-1})\\&+Y_{I-1}^tR_IY_{I-1}]+E[(Y_{I-1}-Y_{I-2})^tT(I)\\&\times(Y_{I-1}-Y_{I-2})]+J_{I-1}\end{aligned} \tag{5.17}$$

と変形される。第1項の $E[W_I^tS(I)W_I]$ は Y_{I-1} の関数でないから, 定数項として取扱えるので, 第2項以下を Y_{I-1} を適当に取って (5.17) を最小にするため, (5.17) を Y_{I-1} に関して微分し 0 と置いて Y_{I-1} を求めると,

$$\begin{aligned}Y_{I-1}=&-(\Gamma^tS(I)\Gamma+\Gamma^tP(I)+P^t(I)\Gamma+R(I)\\&+T(I))^{-1}\{(P^t(I)\Phi+\Gamma^tS(I)\Phi)Z_{I-1}\\&-T(I)Y_{I-2}\}\end{aligned} \tag{5.18}$$

となる。これが $(I-1)$ 時刻の最適制御量である。したがってこの Y_{I-1} を用いれば,

$$\begin{aligned}J_I=&E[W_I{}^tS(I)W_I]+E[Z_{I-1}^tN(I-1)Z_{I-1}\\&+Y_{I-2}^tT(I)(A(I-1))^{-1}(\Gamma^tS(I)\\&+P(I)^t)\Phi Z_{I-1}+Z_{I-1}^t\Phi^t(S(I)^t\Gamma\\&+P(I))(A(I-1))^{-1}T(I)Y_{I-2}\\&-Y_{I-2}^tT(I)(A(I-1))^{-1}T(I)Y_{I-2}\\&+Y_{I-2}^tT(I)Y_{I-2}+K_{I-1}]\end{aligned} \tag{5.19}$$

と与えられる。ただし,

$$\left.\begin{aligned}A(I-1)=&\Gamma^tS(I)\Gamma+\Gamma^tP(I)\\&+P^t(I)\Gamma+R(I)+T(I)\\M(I-1)=&S(I)-(S^t(I)\Gamma+P(I))\\&\times(A(I-1))^{-1}(\Gamma^tS(I)+P^t(I))\\N(I-1)=&\Phi^tM(I-1)\Phi.\end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

ここで (5.19) の右辺全体を $\tilde{K}_{I-1}$ とおき, K_{I-1} を (5.15) で表現すると,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{I-1}=&Z_{I-1}^t\tilde{S}(I-1)Z_{I-1}+Z_{I-1}^t\tilde{P}(I-1)Y_{I-2}\\&+Y_{I-2}^t\tilde{P}^t_{(I-1)}Z_{I-1}+Y_{I-2}^t\tilde{R}_{(I-1)}Y_{I-2}\\&+(Y_{I-2}-Y_{I-3})^tT(I-1)(Y_{I-2}-Y_{I-3})\\&+K_{I-2},\end{aligned} \tag{5.21}$$

すなわちマトリクス表現で,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{I-1}=&(Z_{I-1}^t,\ Y_{I-2}^t)\begin{pmatrix}\tilde{S}(I-1) & \tilde{P}(I-1)\\ \tilde{P}(I-1)^t & \tilde{R}(I-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z(I-1)\\ Y(I-1)\end{pmatrix}\\&+(Y_{I-2}-Y_{I-3})^tT(I-1)(Y_{I-2}-Y_{I-3})+K_{I-2}\end{aligned} \tag{5.22}$$

となって (5.15) と同じ形式となる。ここで,

$$\left.\begin{aligned}\tilde{S}(I-1)=&N(I-1)+S(I-1)\\\tilde{P}(I-1)=&P(I-1)+\Phi^t(S^t(I)\Gamma+P(I))\\&\times(A(I-1))^{-1}T(I)\\\tilde{R}(I-1)=&T(I)+R(I-1)-T(I)^t(A(I-1))^{-1}T(I)\end{aligned}\right\} \tag{5.23}$$

である。このことから, 次に最適な Y_{I-2} の決定には, (5.18) の S を $\tilde{S}$ に, P を $\tilde{P}$ に, R を $\tilde{R}$ に直し, I を $I-1$ に直せば良い。同様に Y_{I-3} の計算に必要な $\tilde{S}(I-2)$, $\tilde{R}(I-2)$, $\tilde{P}(I-2)$ は (5.20) において, S を $\tilde{S}$ に, P を $\tilde{P}$ に, R を $\tilde{R}$ に直し I を $I-1$ に変えるだけで良い。こうして出発点 I 時刻において,

$$\tilde{S}_I=S(I),\quad \tilde{P}_I=P(I),\quad \tilde{R}_I=R(I) \tag{5.24}$$

と定義すれば, 一般に $I-i$ 時刻では, その最適制御 Y_{I-i} は,

$$\begin{aligned}Y_{I-i}=&-(\Gamma^t\tilde{Q}_{I-i+1}\Gamma+\Gamma^t\tilde{P}_{I-i+1}+\tilde{P}_{I-i+1}\Gamma\\&+\tilde{R}_{I-i+1}+T(I-i+1))^{-1}\{(\tilde{P}_{I-i+1}^t\Phi\\&+\Gamma^t\tilde{S}_{I-i+1}\Phi)Z_{I-i}-T(I-i+1)Y(I-i-1)\}\end{aligned} \tag{5.25}$$

で逐次決定することができる。ただし,

$$\left.\begin{aligned}\tilde{S}_{I-i}=&S(I-i)+\Phi^t\{S(I-i+1)-(S^t(I-i+1)\Gamma\\&+P(I-i+1))(\Gamma^tS(I-i+1)\Gamma\\&+\Gamma^tP(I-i+1)+P^t(I-i+1)\Gamma\\&+R(I-i+1)+T(I-i))^{-1}(\Gamma^tS(I-i+1)\\&+P^t(I-i+1))\}\Phi\\\tilde{P}_{I-1}=&P(I-i)+\Phi^t(S^t(I-i+1)\Gamma+P(I-i+1))\\&\times\{\Gamma^tS(I-i+1)\Gamma+\Gamma^tP(I-i+1)\\&+P^t(I-i+1)\Gamma+R(I-i+1)\\&+T(I-i)\}^{-1}T(I-i)\\\tilde{R}_{I-i}=&T(I-i+1)+R(I-i)-T(I-i+1)\ (\Gamma^tS(I-i\\&+1)\Gamma+\Gamma^tP(I-i+1)+P^t(I-i+1)\Gamma\\&+R(I-i+1)+T(I-i+1))^{-1}T(I-i+1)\end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

である。

いま, 定常なシステムを考えることにし,

$$S(n)=S,\ (したがって\ Q(n)=Q),\ R(n)=R,\ P(n)=P,\ T(n)=T \tag{5.27}$$

とおき,

$$S_i=\tilde{S}(I-i),\ P_i=\tilde{P}(I-i),\ R_i=\tilde{R}(I-i),\ T_i=\tilde{T}(I-i) \tag{5.28}$$

と定義し直せば,

$$S_0=S,\ R_0=R,\ P_0=P,\ T_0=T \tag{5.29}$$

から始めて，

$$\left.\begin{aligned} S_i&=S+\Phi^t\{S_{i-1}-(S_{i-1}^t\Gamma+P_{i-1})(\Gamma^t S_{i-1}\Gamma \\ &\quad+\Gamma^t P_{i-1}+R_{i-1}+T)^{-1}(\Gamma^t S_{i-1}+P_{i-1}^t)\}\Phi \\ P_i&=P+\Phi^t(S_{i-1}^t\Gamma+P_{i-1})(\Gamma^t S_{i-1}\Gamma \\ &\quad+\Gamma^t P_{i-1}+P_{i-1}^t\Gamma+R_{i-1}+T)^{-1}T \\ R_i&=T+R-T^t(\Gamma^t S_{i-1}\Gamma+\Gamma^t P_{i-1}+P_{i-1}^t\Gamma \\ &\quad+R_{i-1}+T)^{-1}T \\ &\qquad(i=0,\ 1,\cdots\cdots,\ I-1) \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

と逐次計算を進めることによって，最適制御 Y_i は，

$$Y_i=G_iZ_i+D_iY_{i-1} \tag{5.31}$$

によって与えられる。ここで

$$\begin{aligned} G_i&=-(\Gamma^t S_{i-1}\Gamma+P_{i-1}^t\Gamma+\Gamma^t P_{i-1}+R_{i-1}+T)^{-1} \\ &\quad\times(\Gamma^t S_{i-1}\Phi+P_{i-1}^t\Phi) \\ D_i&=(\Gamma^t S_{i-1}\Gamma+P_{i-1}^t\Gamma+\Gamma^t P_{i-1}+R_{i-1}+T)^{-1}T \end{aligned} \tag{5.32}$$

である。これは各時刻において常に I 時間先までを予測して最適な制御を行なうことを意味する。ここで T を零行列とすると，$Y_i=G_iZ_i$ という一般によく知られている式となるが，行列 T を適当に選択することによって，制御装置の無理のない動きが期待できる。(5.31) の T の項は，舵の動きが，舵自身の 1 step 手前の量に支配されることを示しており，舵変動を小さくしようとする制御として自然である。(5.31) は，I を十分長くとるとき，G_i, D_i は一定値 G, D になるので，以後 G, D として取扱う。

6 実データによる最適操舵系の試設計とその評価

本章では，5章で得られた制御則を使って，最適な保針操舵系を設計し，ディジタルシミュレーションによって，その有用性を探る。使用したデータの実験番号は，先の2例であるが，手動の場合のデータに，Yacc (横加速度) を加え，自動の場合は Pitch を抜いて用いた。これらの変数の選択にあたっては，このモデルが統計的な意味で最も良くあてはまる工夫をしたが，ここでは述べない[6)]。この最適問題における評価関数は，5章の初めに述べた (1), (2), (3) を考慮し，(5.12) を用いた。この際，重み係数行列 Q, R, T を決めるには，基本的には試行錯誤によったが，その目安をつけるには文献 5) の方法が有効であった。さらに最適化する区間 I は，数値計算の誤差の関係から30秒とした。計算手順はまず，(1) 実験で得られた1つのデータをモデルに，そのデータの各変数の相関関数を計算し，(2) これを使用して (5.2) の FPEC によって (5.1) のあてはめを行い，(この場合において操作変数は Rudder であり，他は被制御変数として取扱う)，(3) 最後に，(5.10) の状態空間表現から，(5.32) の最適ゲイン行列 G, D を決定するという手順である。

設計された最適制御系の結果の良否の判定には，2つの方法が考えられる。1つは，(5.10) における状態変数 $Z(n)$ に関し，統計的期待値 $E[Z^t(n)Z(n)]$，すなわち $Z(n)$ の分散を理論的に求める方法である[6)]。もう1つは (5.10) における Y_{n-1} を，(5.31) による最適制御 $Y_{n-1}{}^*$ におきかえ，

$$\begin{aligned} Z_n&=\Phi Z_{n-1}+\Gamma Y_{n-1}{}^*+W_n \\ &=(\Phi+\Gamma G)Z_{n-1}+DY_{n-1}+W_n \end{aligned} \tag{6.1}$$

として，W_n に (5.1) のあてはめによって得られる残差項 ϵ_i の分散に合わせた擬似白色雑音を，計算機内に作り，逐次得られるその値を W_n に代入してディジタルシミュレーションによって評価する方法である。方法としては，後者の方が容易であるので，前者が後者の方法と Tab. 3 のように良く合うことを確めた上，後者のシミュレーションを1000秒，計10回行なって評価することとした。

Tab. 4 は，手動操舵による場合と手動操舵をモデルに最適操舵系を設計した場合とを比較したもので，各種の評価関数の下で，それぞれ 10 回のシミュレーションによる各変数の分散の平均値 (Tab. 4-1) と標準偏差 (Tab. 4-2) を表わす。この表において，Q 欄が (2, 7, 35, 1) とあるのは，重み行列 $Q(i, j)$ において，その対角項の値を示し，本例においては Pitch, Roll, Yaw, Yacc に，( ) 内の順に重みをかけたことを表わす。R, T についても同様で，Rudder およびその変動量への重みの程度を示す。各表の最下欄は，手動操舵を，(5.31) を用いて，白色雑音で 10 回シミュレートしたときの各変数の分散の平均値，標準偏差である。Tab. 4-1 によると，最適操舵系の各例は，手動操舵の場合に比して，Rudder の少い労力で Yaw が分散で見て 1/3～1/4 に軽減される可能性のあることを示唆している。さらに T に重みをつけることによって，Rudder の変動の滑らかさが得られるので，舵取機の応答が工学的に可能である。また Tab. 4-2 は，異なった乱数によるシミュレーションによっても分散の変動は少なく，我々の設計した制御系は，安定に動く可能性があることを示している。Fig. 6 はこの最適操舵系のパワースペクトラムの例である。Fig. 2 と較べれば，全体としてパワーは減少していることがわかる。Tab. 5-1, Tab. 5-2 は，自動操舵の場合のデータをモデルにして同定を行い，最適操舵系を設計した例で，10 回のシミュレーション結果である。また最下欄は，自動操舵のシミュレーション結果である。この場合においても，手動操舵の場合と同じことが確認されるが，その他に Roll の軽減が著しい。自動操舵の

場合，かなり高周波で舵をとることによってっ起こるRoll の影響を，最適操舵によって除くことができる可能性を物語っている。Fig.7 は，最適操舵のパワースペクトルであるが，上に述べたことが周波数領域で確認される。

最後に，手動操舵と最適操舵系を比較したシミュレーション波形例を Fig.8 に，さらに自動操舵との比較例を Fig.9 に示した。いずれの図においても Switch と記した矢印より右が最適操舵例で，左側はモデルの基礎となった原データのシミュレーション例である。これらの図は，これまで述べたことを，より明白に示している。特に手動操舵の場合の Yaw が滑らかな最適操舵によって，大きく軽減されること，および自動操舵の場合よりも Roll が軽減することなどが印象的である。

7 結言

我々は以上の自己回帰表現のあてはめと最適操舵系の試設計から，次のような知見を得た。すなわち，(1) 従来のスペクトラム推定法に比し，最小 FPE 法では滑らかなスペクトラムを，半自動的に得る。(2) 自己回帰モデルは，保針運動のようなフィードバック系の解析および最適制御系の設計に重要な情報を与える。(3) 手動操舵，自動操舵と比べ，我々の最適操舵系は，ディジタルシミュレーシンによると，Rudder の滑らかな動きと少い労力で，Yaw および Roll を軽減させることが期待される。(4) 操舵の滑らかさを得るための T 行列の導入は，十分にその効果を発揮する，などである。この結果新しいオートパイロットの設計に明るい見通しが得られた。

本稿を終えるにあたり，終始暖い助言と激励を賜った統計数理研究所第5研究部部長，赤池弘次博士に深甚の謝意を表します。また日頃お世話になっている三井造船 K.K. 山内保文博士，貴重なデータを長期間貸していただいている船舶技術研究所の小川陽弘博士にお礼を申し述べる。東京商船大学の谷初蔵教授には，終始激励を賜った。(なお本研究には，昭和50年度文部省科学研究費の一部を用いたことを付記する。また計算は，主としてプログラムパッケージ TIMSAC に依った。)

参考文献

1) H. Akaike: Statistical predictor identification, Ann. Inst. Statist. Math., Vol.22 (1970).
2) H. Akaike : Autoregressive model fitting for control, Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 23 (1971).
3) H. Akaike : On the use of a linear model for identification of feedback systems, Ann. Inst. Statist. Math., Vol.20 (1968).
4) H. Akaike : Information theory and an extension of maximum likelihood principle, 2nd International Symposium on Information Theory.
5) 赤池弘次，中川東三郎：ダイナミックシステムの統計的解析と制御，サイエンス社 (1972).
6) 北川源四郎，大津皓平：船の保針運動の統計的制御，統計数理研究所彙報 (1976. 3).
7) 小川陽弘，大津皓平：コンテナ船あめりか丸による北太平洋航海性能試験（第3報），船舶技術研究所報告，第9巻，第3号 (昭 46.3).
8) G. M. Jenkins and D. G. Watts : Spectral Analysis and Its Applications, Holden-Day, San Francisco (1968).
9) K. J. Aström and Källström : Application of system identification techniques to the determination of ship dynamics, Identification and System Parameter Estimation, P. Eykoff ed. North-Holland (1973).
10) IEEE Trans. on Automatic Control : Special Issue on System Identification and Time Series Analysis, Vol. AC-19 (1974).

Appendix

有限個のデータをもとに，それを生成した構造を最も適切に表現しようとする時，どの様なモデルを想定するかが本質的な問題であり，そのパラメータの推定はむしろ副次的なものといえる。例えば定常時系列 $X(n)$ の自己回帰表現

$$X(n)=\sum_{m=1}^{M}a(m)X(n-m)+\varepsilon(n)$$

において本質的な問題は何次の AR モデルを想定するかであり，次数 M が決定されれば係数 $a(m)$ は最小二乗法によって直ちに推定することができる。この次数の決定においては，

（1） M を大きくすると推定されたモデルはデータ中の偶然誤差に過剰に応答し信頼性，再現性が損われる，

（2） M を小さくすると推定値に偏りが生じる，

という矛盾する2つの問題を調整するために何らかの基準が必要となる。

定常時系列の AR 表現において，この基準として提案されたものが FPE (final prediction error)[1] である。FPE は推定されたパラメータを用いて予測を行なう場合の平均的な誤差の大きさを示すものであり，FPE（の推定値）を最小とするモデルを採用するという客観的な推定方法の確立によってスペクトル推定の分野等で多くの成果を上げた。現在では，この方法は一般化エントロピー（Kullback の情報量）を最小にするという思想のもとに AIC（赤池情報基準）[4]

AIC＝−2(maximum likelihood)＋2(parameter 数)

を最小化する方法に発展し，すでに時系列の分野だけでなく因子分析，回帰分析，数値解析等の多くの分野で大

きな成功を収めている。以下ではこの論文で使われたFPEを導く。

一般に，推定された係数を用いて得られる $X(n)$ の予測値を $\hat{X}(n)$ とするとき，$\hat{X}(n)$ の FPE は $E(X(n)-\hat{X}(n))^2$ によって定義される。

以下 $X(n)$ は

$$X(n)=\sum_{m=1}^{M}a(m)X(n-m)+a(0)+\varepsilon(n)$$

によって生成された自己回帰過程とする。ただし $\varepsilon(n)$ は平均 0，分散 σ^2 のホワイトノイズである。$X(n)$ を観測することによって推定したパラメータ $\hat{a}_M(m)$ を利用して $X(n)$ と同じ統計的性質をもつ別の過程 $Y(n)$ の予測を

$$\hat{Y}(n)=\sum_{m=1}^{M}\hat{a}_M(m)Y(n-m)+\hat{a}_M(0)$$

によって行なう場合を考える。このとき，$Y(n)$ の予測値 $\hat{Y}(n)$ のFPEは

$$\begin{aligned}\mathrm{FPE}&=E(Y(n)-\hat{Y}(n))^2\\&=E\Bigl(\sum_{m=1}^{M}a(m)Y(n-m)+a(0)+\delta(n)\\&\quad-\sum_{m=1}^{M}\hat{a}_M(m)Y(n-m)-\hat{a}_M(0)\Bigr)^2\end{aligned}$$

で与えられる。ただし，$\delta(n)$ は $\varepsilon(n)$ と同一の統計的性質を持ち，また $\hat{a}_M(m)$ は $X(n)$ の観測値から最小二乗法によって得られた $a(m)$ の推定値である。

ここで，まず条件付き期待値をとると

$$\begin{aligned}E_x(Y(n)-\hat{Y}(n))^2&=\sigma^2\\&+\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\varDelta a_M(m)\varDelta a_M(l)R_{xx}(l-m)\\&+\Bigl(\varDelta\bar{X}_0-\sum_{m=1}^{M}\hat{a}_M(m)\varDelta\bar{X}_m\Bigr)^2\end{aligned}$$

となる。ただし $R_{xx}(l-m)=EX(n-l)X(n-m)-(EX(n))^2$, $\varDelta a_M(m)=\hat{a}_M(m)-a_M(m)$, $\varDelta\bar{X}_l=\bar{X}_l-E(X(n))$, $\bar{X}_m=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X(n-m)$，また $a_M(m)$ は $E(Y(n)-\sum_{m=1}^{M}a(m)Y(n-m))$ を最小とする係数 $a(m)$ である。

$C_{\varepsilon x}(l)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon(n)X(n-l)$，$\delta=1-\sum_{m=1}^{M}a(m)$ とし，また R_M を $R_{xx}(l-m)$ を $(l,\ m)$ 成分とする行列とするとき $\sqrt{N}\varDelta\bar{X}_0$，$\sqrt{N}\varDelta a_M$ の極限分布が平均0，共分散行列 $\sigma^2\begin{pmatrix}\delta^{-2} & 0\\ 0 & R_M^{-1}\end{pmatrix}$ の正規分布で与えられるので[1]，$N\{E_x(Y(n)-\hat{Y}(n))^2-\sigma^2\}$ の極限分布の平均値は $(M+1)\sigma^2$ となる。したがって FPE は漸近的に $\left(1+\frac{M+1}{N}\right)\sigma^2$ で与えられることがわかる。

実際の場面においては σ^2 も未知であるから，σ^2 の代りにその推定値が使われるが，

$$S(M)=C_{xx}(0,\ 0)-\sum_{m=1}^{M}\hat{a}_M(m)C_{xx}(0,\ m)$$

とするとき，σ^2 の推定値として $\left(1-\frac{M+1}{N}\right)^{-1}S(M)$ を使えばよいことが示されている[1]。

以上から FPE の推定値として

$$\mathrm{FPE}(M)=\left(1+\frac{M+1}{N}\right)\left(1-\frac{M+1}{N}\right)^{-1}S(M)$$

が得られる。

一般に，k 次元時系列 $X(n)$ において，多次元 AR モデル

$$X(n)=\sum_{m=1}^{M}A(m)X(n-m)+U(n)$$

をあてはめる場合には

$$\mathrm{MFPE}(M)=\left(1+\frac{Mk+1}{N}\right)^k\left(1-\frac{Mk+1}{N}\right)^{-k}\det(d_M)$$

が利用される。ただし，d_M は $U(n)$ の共分散行列の推定値である。

特に，$X(n)^t=(Z(n)^t,\ Y(n)^t)$ となるような，$Z(n)$ を r 次元被制御変数，$Y(n)$ を $k-r$ 次元操作変数とする制御用の AR モデル

$$\begin{aligned}Z(n)&=\sum_{m=1}^{M}B(m)Z(n-m)\\&\quad+\sum_{m=1}^{M}C(m)Y(n-m)+V(n)\end{aligned}$$

をあてはめる場合には

$$\mathrm{FPEC}(M)=\left(1+\frac{Mk+1}{N}\right)^r\left(1-\frac{Mk+1}{N}\right)^{-r}\det(d_{r,M})$$

が使われる[2]。ただし，$d_{r,M}$ は $k\times k$ 行列 d_M の左上隅の $r\times r$ 小行列である。

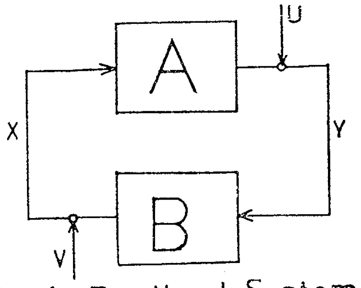

Fig.1 Feedback System

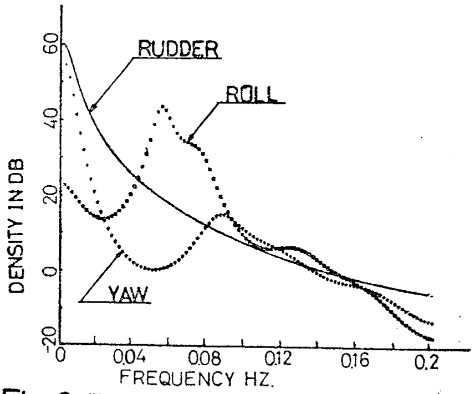

Fig.2 Power spectrum of manual steering

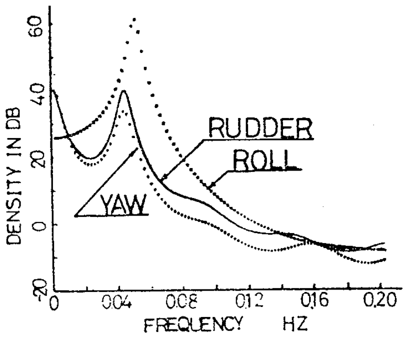

Fig.3 Power Spectrum of Auto Pilot

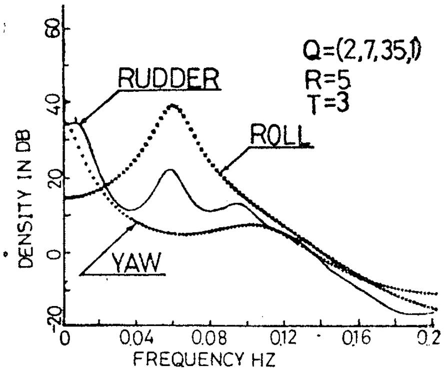

Fig6 Power spectrum of optmal controller(manual steerig)

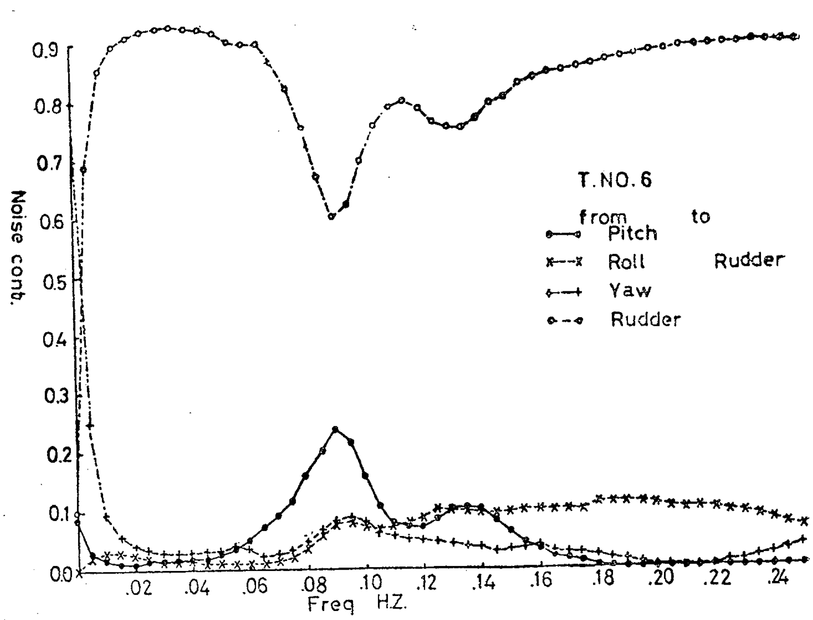

Fig4 NOISE CONTRIBUTION

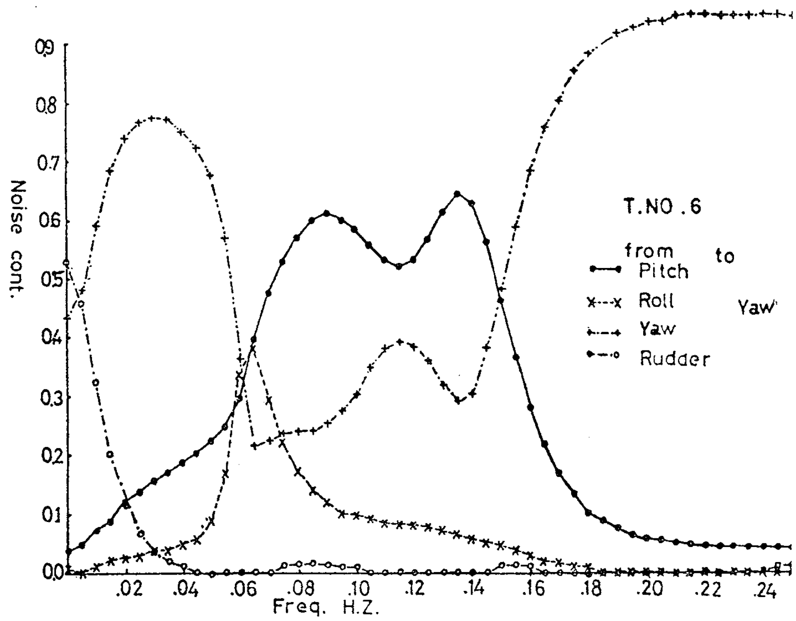

Fig5 NOISE CONTRIBUTION

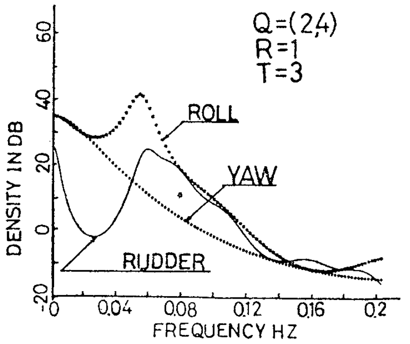

Fig.7 Power Spectrum of Optimal Controller

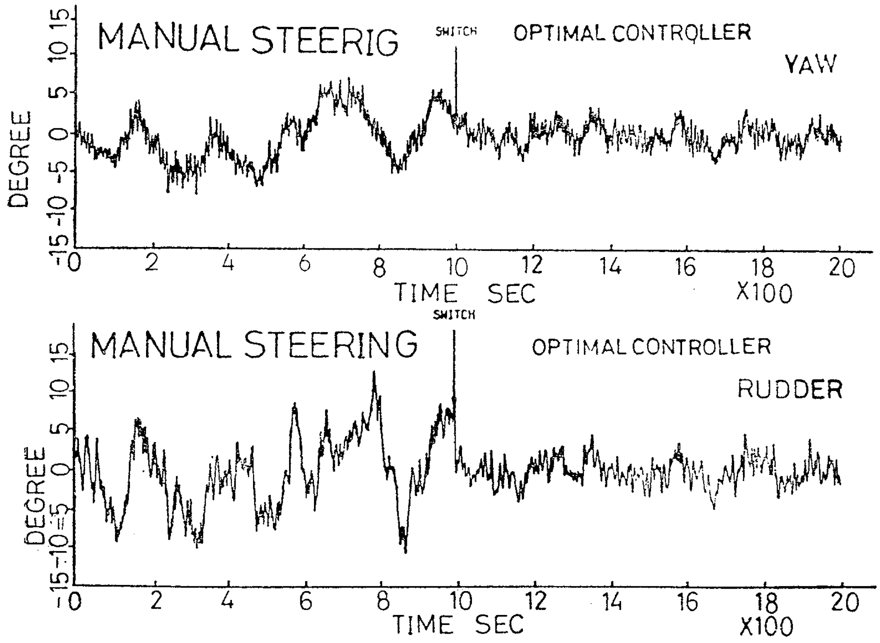

Fig.8 Digital Simulation Output
Manual steering and Cptimal Controller
Q=(2,7,35,1), R= 5 , T= 3

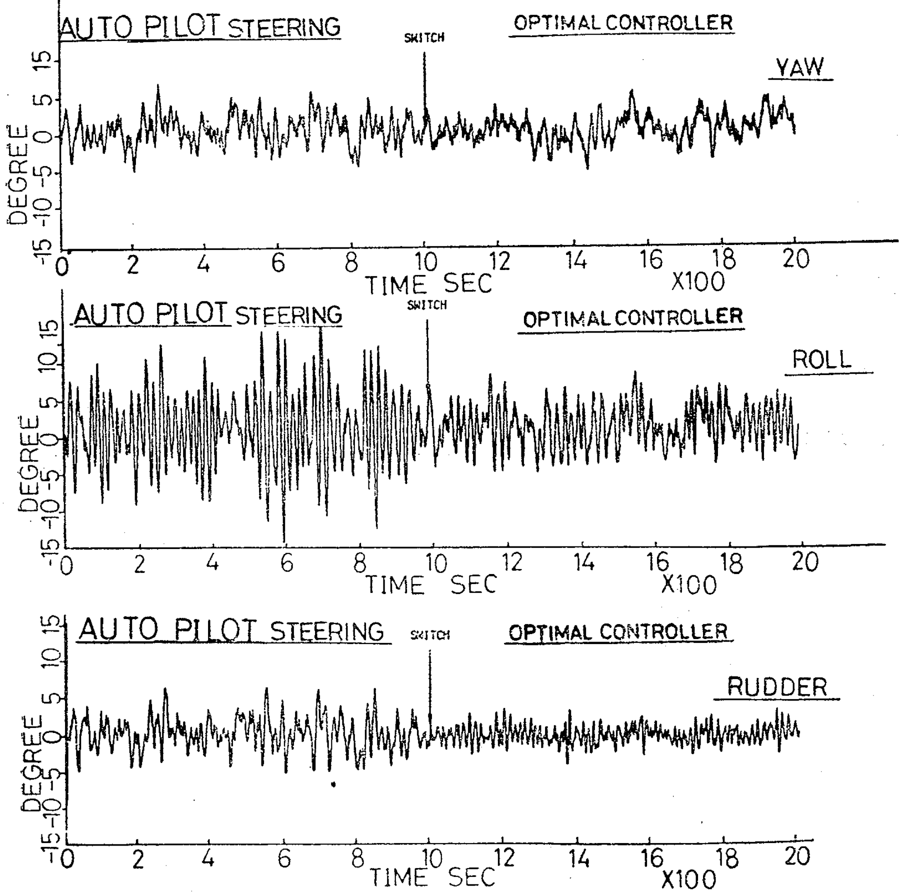

Fig.9. DIGITAL SIMULATION OUTPUT
Autopilot steering and Optimal Controller
Q=(2,4), R= 1 , T = 3

Tab.1. Random variable's name

MOTION	OBS'red PLACE	Apparatus	Variable	
Pitchig	Bridge	Gyro	Controlled Var.	O
Rolling	Bridge	Gyro		O
Yawing	Bridge	Gyro Repeater		O
Lateral Acceleration*	Fore Peak	Accelerometer		
RudderAngle	RudderPost	Potentiometer	Manipulated Var.	O

(*for short; Y_{acc})

Tab.2 Sea Conditions

	T.NO.6	T.NO.8
Wind Force	6	7
Wave Scale	8	6
Swell Scale	8	5
Direction Wind	W	SE
Direction Wave	S	SE
Direction Swell	S	S
Rel. Direction		
Ship Speed	10 kt	21 kt
Course	130°	80°

Tab.3 Comparison of Variance

	Pitch	Roll	Yaw	Y_{acc}
(1) Theory	1.755	4.509	1.624	0.0066
(2) Simulation	1.726	4.575	1.709	0.0063

Tab.4-1 Digital Simulations (Manual and Optimal Control)
—MEAN—

Q	R	T	Pitch	Roll	Yaw	Y_{acc}	Rudder	Difference
(2,7,35,1)	0.85	0	1.726	4.575	1.709	0.0063	18.723	4.546
(2,7,35,1)	2	2	2.087	5.126	2.050	0.0066	8.672	1.012
(2,7,35,1)	5	3	2.291	5.643	2.821	0.0071	3.986	0.312
(2,7,35,1)	10	10	2.447	6.002	4.342	0.0074	2.087	0.079
MANUAL (simulation)			2.718	7.082	8.261	0.0090	19.715	0.961

Tab.4-2 Digital Simulations (Manual and Optimal Control)
- STANDARD ERROR -

Q	R	T	Pitch	Roll	Yaw	Y_{acc}	Rudder	Diff.
(2,7,35,1)	0.85	0	0.184	0.370	0.256	0.44D-3	2.517	0.385
(2,7,35,1)	2	2	0.228	0.462	0.338	0.50D-3	1.508	0.095
(2,7,35,1)	5	3	0.256	0.577	0.523	0.55D-3	0.756	0.030
(2,7,35,1)	10	10	0.277	0.666	1.125	0.83D-3	0.550	0.008
MANUAL (simulation)			0.357	0.835	2.663	0.41D-3	3.635	0.034

Tab.5-1 Digital Simulations (Auto pilot and Optimal Control)
-MEAN-

Q R T	Roll	Yaw	Rudder	Diff.
(2,4),1,3	9.2500	2.9396	1.1276	0.2688
(1,2),1,1	8.5910	2.9242	1.8217	0.3856
Auto-Pilot (Simulation)	21.381	3.5195	3.9836	0.6153

Tab.5-2 Digital Simulations (Auto pilot and Optimal Control)
-STANDARD ERROR-

Q R T	Roll	Yaw	Rudder	Diff.
(2,4),1,3	0.7219	0.4292	0.1849	0.262D-1
(1,2),1,1	0.6229	0.4473	0.3046	0.418D-1
Auto-Pilot (Simulation)	4.4918	0.4374	0.5285	0.464D-1