（昭和 51 年 11 月　日本造船学会秋季講演会において講演）

パネルの動的非線形応答の計算法について

正員　安　川　　度*　正員　川　上　　肇*
正員　大西登喜夫*

On the Estimation of Non-Linear Dynamic Response of Ship Plating

by Wataru Yasukawa, *Member*　Hajime Kawakami, *Member*
Tokio Onishi, *Member*

Summary

It is well known that ship platings near the bow suffer some damages caused by the water impact pressure. In order to investigate this phenomenon, it is necessary to analyze the non-linear dynamic response of ship platings.

This paper presents the methods for calculating the response of ship platings.

At first, the authors study the applicaton of the Mode Superposition Method to dynamic response problems which are analyzed by F. E. M., and obtain a formula of direct numerical integration based on the calculus of variation and show its usefulness. Then, based on the above-mentioned results, the authors study a simplified method to estimate the maximum response approximately, using a linear system of a single degree of freedom equivalent to ship plating.

The results obtained are as follows:

(1) The Mode Superposition Method presented here is useful for estimating the dynamic response of ship platings from a viewpoint of time and accuracy in computation.

(2) The formula of numerical integration obtained in this paper is considered to be equivalent to Newmark's β method when $\beta=1/6$, and takes as much time in computation as β method.

(3) The simplified method of estimating the maximum response has good accuracy for practical use.

1　緒　　言

船体は波浪及び船体運動によりスラミング，青波衝撃に代表される衝撃水圧を受けている。とくに船首においては大きな衝撃水圧を受けるため，外板パネルに凹損が発生することが知られている[1]。この外板パネルが凹損する過程を究明するためには，衝撃水圧を受けるパネルの過渡応答を弾塑性大変形問題として取り扱う必要がある。このような動的非線形問題を有限要素法で解く場合，係数行列を微小時間増分 Δt で一定と考えて運動方程式を増分形で表わして，Runge-Kutta 法や Newmark の β 法[2] などの逐次積分法により応答を直接求める方法が通常用いられる[3]。これらの方法は自由度が小さい場合は有効であるが，自由度が大きくなると計算時間が膨大になり実用的でなくなる。このため最近ノーマルモードを用いて計算時間の短縮化を図るモード重畳法[4~6]が試みられている。

*　川崎重工業（株）技術研究所

本報ではパネルの動的非線形応答を有限要素法で求める際に，ノーマルモードを用いるが従来のモード重畳法と少し異なる方法を適用して，計算時間の短縮を図る方法を検討した。さらに時間積分法についても，有限要素法に基づく計算式を導き，その有用性を確めた。次に上述の結果に基づき，パネルを1自由度の線形系に変換して最大応答を求める簡易計算法を検討し，実用上十分な精度を持つことを示した。

2　ノーマルモードを用いた計算法

線形系があまり速くない荷重をうける場合の過渡応答はノーマルモード法により解析できる。船体外板パネルが衝撃水圧を受ける問題を弾塑性大変形計算で解く場合は非線形問題となるが，この場合の衝撃水圧は一般にそれ程速い衝撃ではない[1]ので，パネルの非線形応答の解析に，以下に述べるノーマルモード法を用いる計算法の適用を試みた。

2.1　基　礎　式

有限要素法によりパネルの動的非線形問題を解く場合運動方程式は次のように書ける。

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}(t) \tag{2.1}$$

ここに，$\boldsymbol{U}$ は変位ベクトル，$\boldsymbol{M}$ は質量行列，$\boldsymbol{C}$ は減衰行列，$\boldsymbol{F}$ は復原力，$\boldsymbol{P}(t)$ は外力，$\dot{}$ は時間微分を表わす。$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{U}$ の関数とすれば，それらは時間とともに変化するので(2.1)式は非線形微分方程式となる。いま微小時間 $t_n \leq t \leq t_n+\Delta t$ の間で変位増分を $\Delta\boldsymbol{U}$ として (2.1) 式を Taylor 級数に展開し，高次の微小項を省略すれば次式が求められる。

$$\boldsymbol{M}_n\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{C}_n\Delta\dot{\boldsymbol{U}}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}_n}{\partial \boldsymbol{U}}\ddot{\boldsymbol{U}}_n+\frac{\partial \boldsymbol{C}_n}{\partial \boldsymbol{U}}\dot{\boldsymbol{U}}_n+\boldsymbol{K}_n\right)\Delta\boldsymbol{U} =\boldsymbol{P}(t_n+\Delta t)-\boldsymbol{F}_n \tag{2.2}$$

ここに添字 n は $t=t_n$ のときの値を表わし，$\boldsymbol{K}_n=\partial\boldsymbol{F}_n/\partial\boldsymbol{U}$ は $t=t_n$ のときの剛性行列である。パネルの弾塑性大変形問題では $\partial\boldsymbol{M}_n/\partial\boldsymbol{U}$ および $\partial\boldsymbol{C}_n/\partial\boldsymbol{U}$ は小さいと考えられるので，本報ではこれらの項を省略する。(2.2) 式を用いれば $t_n \leq t \leq t_n+\Delta t$ の間の変位増分 $\Delta\boldsymbol{U}$ を求めることができる。

次に (2.2) 式にノーマルモード法を適用して自由度の減少をはかる。パネルが微小振動するときの固有ベクトル $\boldsymbol{y}_i(i=1,2,\cdots,s\,;\,s$ は系の全自由度) のうち，固有値の小さいものから q 個を選び，$s\times q$ の大きさの行列

$$\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_q] \tag{2.3}$$

を作り，これを用いて (2.2) 式の近似解を次のように仮定する。

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Y}\cdot\Delta\boldsymbol{u}\\ \text{ここに，}\quad&\Delta\boldsymbol{u}=[u_1,u_2\cdots u_q]^T\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

(2.2) 式で $\partial\boldsymbol{M}_n/\partial\boldsymbol{U}$, $\partial\boldsymbol{C}_n/\partial\boldsymbol{U}$ を省略した式に (2.4) 式を代入し，$\boldsymbol{Y}$ の転置行列 $\boldsymbol{Y}^T$ を左側から乗ずると次式が得られる。

$$\boldsymbol{m}_n\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{c}_n\Delta\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{k}_n\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{p}(t)-\boldsymbol{f}_n \tag{2.5}$$

ここに，

$$\boldsymbol{m}_n=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}_n\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{c}_n=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{k}_n=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{K}_n\boldsymbol{Y},$$
$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{P}(t),\ \boldsymbol{f}_n=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{F}_n$$

ただし $\boldsymbol{m}_n$, $\boldsymbol{c}_n$ および $\boldsymbol{k}_n$ は $q\times q$ の正方形行列であり，$\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{f}_n$ は自由度 q のベクトルである。$\boldsymbol{m}_n$, $\boldsymbol{c}_n$, $\boldsymbol{k}_n$ の非対角成分は一般に 0 とならない。さて従来のモード重畳法では (2.1) 式を解くのに非線形項を右辺に移して左辺を線形項のみにする。従ってノーマルモード法を適用すると，$\boldsymbol{m}_n$, $\boldsymbol{k}_n$ は対角行列になり，もし $\boldsymbol{c}_n$ も対角になるとすれば 1 自由度として取り扱える。しかし右辺の非線形項を収束させるためのくり返し計算を必要とする。本法では従来のモード重畳法と同様に，微小振動のモードを用いるが，(2.2) 式を考える場合にはくり返し計算を必要としない。

(2.5) 式を次の初期条件

$$t=t_n \text{ で } \Delta\boldsymbol{u}=0,\ \dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}_n \tag{2.6}$$

で解けば全変位 $\boldsymbol{u}_{n+1}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{u}_{n+1}=\boldsymbol{u}_0+\sum_{i=1}^{n}\Delta\boldsymbol{u}_i \tag{2.7}$$

また本法は従来のモード重畳法と同様に，(2.2) 式を直接解く場合に比べて，解くべき方程式 (2.5) 式の自由度が少なくなっていることおよび高次の振動成分が除去されているので数値積分の際の時間刻み Δt を大きくとれることによって，計算時間がかなり短縮できる。

2.2 有限要素法に基づく数値積分

(2.5) 式を数値積分する方法としては，差分法により解を求める β 法[2]，荷重項を直線近似して厳密解を求める Nigam の方法[7),8)]，および有限要素法による解法[9)~11)]が考えられる。有限要素法による解法についてはこれまで種々の方法が試みられているが，本報ではそれらと異る以下に示す新しい計算式を導いて (2.5) 式の数値積分を行なった。

まず運動方程式

$$\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{p}(t) \tag{2.8}$$

を次の初期条件のもとで解くことを考える。

$$t=0 \text{ において } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0,\ \dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}_0 \tag{2.9}$$

いま，$t=t_1$ および $t=t_2$ において 0 となる変分 $\delta\boldsymbol{u}$ を考えて (2.8) 式を考慮すると (2.10) 式を得る。

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\left(-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{u}}^T\boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{u}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u}\right)dt +\int_{t_1}^{t_2}\dot{\boldsymbol{u}}^T\boldsymbol{c}\delta\boldsymbol{u}dt=0 \tag{2.10}$$

(2.10) 式を用いて (2.8) 式の近似解を次のようにして求める。Fig. 2.1 に示すように時間軸を分割し，分割点

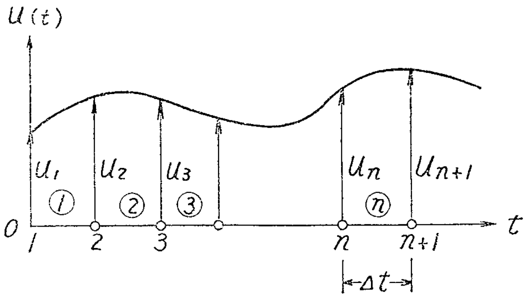


Fig. 2.1 Finit Elemente of Time

に t の小さい順に 1 から通し番号をつける。$t=t_n$ と $t=t_{n+1}$ の間の要素ⓝについて $\boldsymbol{u}(t)$ および $\boldsymbol{p}(t)$ を (2.11) 式のように直線近似する。

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=N_n\boldsymbol{u}_n+N_{n+1}\boldsymbol{u}_{n+1}\\&\boldsymbol{p}=N_n\boldsymbol{p}_n+N_{n+1}\boldsymbol{p}_{n+1}\\&\text{ここに}\\&\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{p}(t_n),\ \boldsymbol{p}_{n+1}=\boldsymbol{p}(t_{n+1})\\&N_n=(t_{n+1}-t)/\Delta t,\ N_{n+1}=(t-t_n)/\Delta t\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

(2.11) 式を (2.10) 式に代入すると次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&h_{11}u_n+h_{12}u_{n+1}=r_n\\
&h_{21}u_n+h_{22}u_{n+1}=r_{n+1}\\
&\text{ここに}\\
&h_{11}=\frac{k\Delta t}{3}-\frac{m}{\Delta t}-\frac{c}{2}\\
&h_{12}=\frac{k\Delta t}{6}+\frac{m}{\Delta t}+\frac{c}{2}\\
&h_{21}=\frac{k\Delta t}{6}+\frac{m}{\Delta t}-\frac{c}{2}\\
&h_{22}=\frac{k\Delta t}{3}-\frac{m}{\Delta t}+\frac{c}{2}\\
&r_n=\left(\frac{p_n}{3}+\frac{p_{n+1}}{6}\right)\Delta t\\
&r_{n+1}=\left(\frac{p_n}{6}+\frac{p_{n+1}}{3}\right)\Delta t
\end{aligned}\right\}\qquad(2.12)$$

(2.12) 式を用いて全節点について連立1次方程式を作り，$t=t_0$ および $t=t_n$ での変位 u_0 および u_n を与えればこの方程式を解くことができる。この方程式が解けると $t=t_0$ での速度 $\dot{u}_0$ が求まる。すなわち u_n と $\dot{u}_0$ の間にある関係があると考えることができるので，初期値問題では u_n を与える代りに $\dot{u}_0$ を与えて，この方程式を解くことを考える。そしていまの問題は時間に関する一次元の問題であるので，伝達マトリックス法により解を求める方法を考える。すなわち，(2.12) 式の r_n が運動量の次元を有しているので，節点における状態量として変位 u と運動量 g を考える。(2.9) 式および (2.12) 式を考慮して節点 n と節点 $n+1$ の状態量の関係を求めると数値積分の計算式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(1) 初期値}\\
&u_1=u_0\\
&g_1=m\dot{u}_0+\left(\frac{p_1}{3}+\frac{p_2}{6}\right)\Delta t\\
&\text{(2) 漸化式 } (n\geq1)\\
&u_{n+1}=-h_{12}^{-1}h_{11}u_n+h_{12}^{-1}g_n\\
&g_{n+1}=\bar{p}_{n+1}-(h_{21}-h_{22}h_{12}^{-1}h_{11})\,u_n\\
&\qquad -h_{22}h_{12}^{-1}g_n\\
&\text{ここに}\\
&\bar{p}_{n+1}=\left(\frac{p_n}{6}+\frac{2p_{n+1}}{3}+\frac{p_{n+2}}{6}\right)\Delta t
\end{aligned}\right\}\qquad(2.13)$$

上式を (2.5) 式に適用するためには次のようにすればよい。すなわち (2.6) 式を考慮して (2.13) 式において $u_n=0$, $u_{n+1}=\Delta u_n$ とおき (2.5) 式と (2.8) 式の右辺を比較することによって次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(1) 初期値}\\
&u_1=u_0\\
&g_1=m_1\dot{u}_0+\left(\frac{p_1}{3}+\frac{p_2}{6}\right)\Delta t\\
&\text{(2) 漸化式 } (n\geq1)\\
&u_{n+1}=u_n+\Delta u_n\\
&\Delta u_n=h_{12}^{-1}g_n\\
&g_{n+1}=\bar{p}_{n+1}-h_{22}h_{12}^{-1}g_n\\
&\bar{p}_{n+1}=\left\{\frac{p_n}{6}+\frac{2p_{n+1}}{3}+\frac{p_{n+2}}{6}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}(f_n+f_{n+1})\right\}\Delta t\\
&f_n=\sum_{i=1}^{n}k_i\Delta u_i
\end{aligned}\right\}\qquad(2.14)$$

なお h_{12}, h_{22} は (2.12) 式で与えられるが，それらの式において m, c, k の代りに m_n, c_n, k_n を用いる必要がある。

上述の方法と β 法及び Nigam の方法の計算式の比較を付録1に示す。付録1の結果を参考にして本計算法の特徴を列挙すると次のようである。

(1) (2.13) 式は β 法の $\beta=1/6$ の場合で Δt^3 の項を無視したものと等価となっている。

(2) β 法で $\beta=1/6$ の場合は Δt の間で加速度が線形変化すると仮定しているのに対して，本方法では変位を (2.11) 式のように線形近似しているので加速度は0となっている。

(3) 線形応答の場合の演算時間を比較すると，各計算法の微小時間増分 Δt を同じにとるとすれば，(2.14) 式は β 法と同程度で，Nigam の方法の半分程度になると予想される。

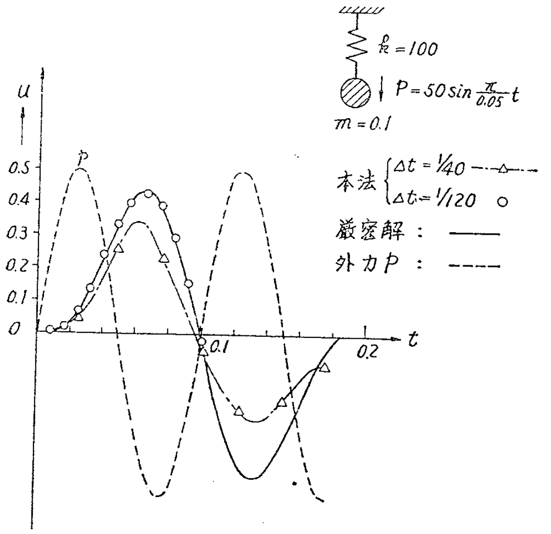
(4) 非線形応答の場合や微小時間増分 Δt を途中で変える場合，β 法の計算式は付録1 (A.2) 式より複雑になると思われるが，本法による (2.14) 式はいずれの場合に対してもそのまま用いることができる。

(2.14) 式は2節点要素に基づく計算式であるが，自由度が小さい線形系の場合には3節点要素に基づく計算式の方が，2節点要素を用いるより計算時間が少なくなる。参考のために付録2にその計算式を示しておいた。

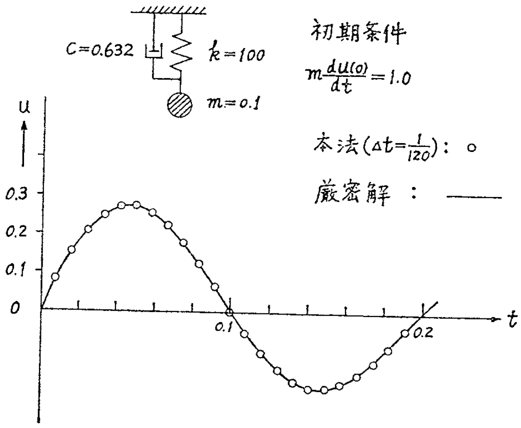
2.3 計算例及び考察

前節の数値積分法の妥当性を検討するため，1自由度線形系の応答につき，$\Delta t=1/40$ (外力周期の 1/4) および $\Delta t=1/120$ (外力周期の 1/12) の場合を計算して厳密解と比較した。計算結果を Fig. 2.2 (a) に示すが，$\Delta t=1/120$ の場合両者はよく一致した。また Fig. 2.2 (b) は初速度を与えた時の計算結果であり，この場合も厳密解とよく一致する。従って本数値積分法は妥当であると思われる。

次にノーマルモードを用いた計算法の有用性を検討するため，両端固定の帯板に正弦波形の衝撃水圧が加えられた場合について，微小変形弾塑性計算と大変形弾塑性計算を行ない，有限要素法による一般解法 (自由度を減じない方法) の解と比較した。衝撃水圧の大きさはその最大値が静的に作用する場合に帯板の両端に塑性関節が



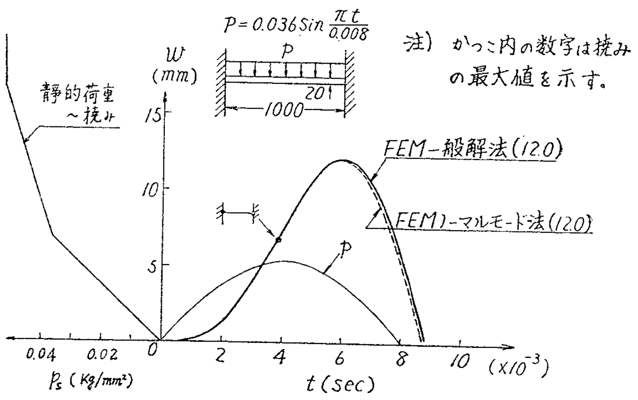
(a)



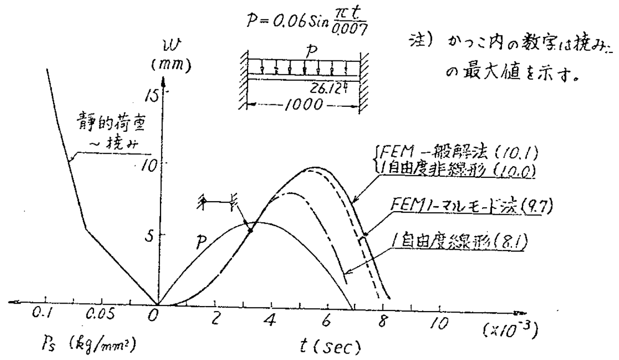
(b)

Fig. 2.2 Results by the Numerical Integration Method

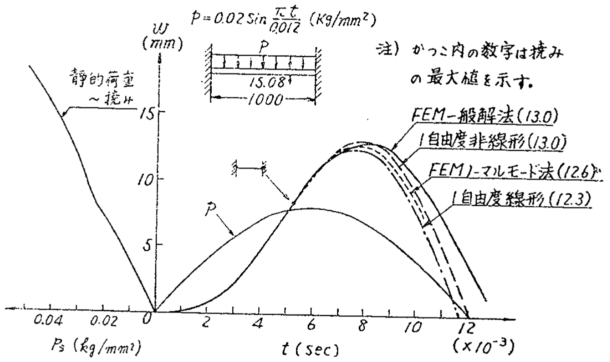
できるようなものとし，荷重周期は応答倍率が最大になるようなものを選んだ。また大変形弾塑性計算では，軸力の影響が大きい場合，小さい場合，両者の中間の場合(実船のパネルの寸法に近い)の3つの場合について計算を行なった。なお計算に使用した要素は剪断撓みを考慮した梁要素であり，弾塑性計算は塑性関節法[12),13)]を用いた。また固有ベクトルの計算は Sub-Space Iteration 法[14)]により行ない，数値積分は(2.14)式を用いて行なった。計算結果を Fig. 2.3 (a) から Fig. 2.3 (d) に示す。同図より，ノーマルモード法を用いた解は一般解法によるものと比較的よく一致している。とくに最大値に達するまでは非常に良く一致している。なおノーマルモードを用いる計算に際して使用したモードの数は，微小変形の場合最低次から5つ，大変形の場合8つである。またこれらの計算例では，ノーマルモードを用いた計算は一般解法による計算の 1/4～1/5 の演算時間である。



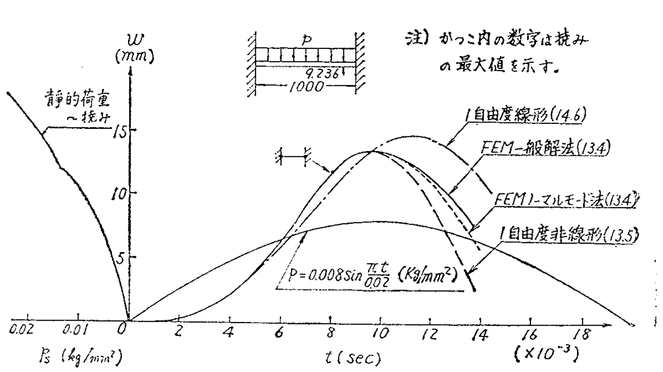
(a) Small Deflection



(b) Large Deflection



(c) Large Deflection



(d) Large Deflection

Fig. 2.3 Elasto-Plastic Dynamic Response of Strips Calculated by Various Methods

3 パネルの応答の簡易計算法

前章においてパネルの非線形応答を有限要素法により求める場合に，ノーマルモードを用いた計算法が計算時間や精度の点で十分有用であることを示した。ここでは実用上の観点からこの方法を拡張して，パネルを1自由度線形系に変換して最大応答を求める簡易計算法について検討する。

3.1 1自由度系への変換

両端固定の帯板または周辺固定の正方形板が一様衝撃水圧をうける場合について，弾塑性大変形問題として取扱う。1自由度系への変換は帯板および正方形板についてまったく同じ考え方で行なえるので，ここでは帯板について述べる。

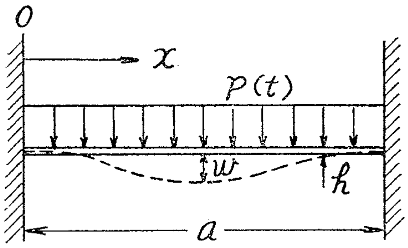


Fig. 3.1 Both End Fixed Strip

Fig. 3.1 に示すように帯板の一端に座標の原点を定め，長さ方向に x 軸をとる。任意の点の撓みを $W(x,t)$ とすれば，一様衝撃水圧 $p(t)$ をうける帯板の運動方程式は次式で与えられる。

$$(\gamma h/g)\ddot{W}+c_p\dot{W}+F(W)=p(t) \qquad (3.1)$$

ここに，γ は単位体積当りの重量，h は板厚，g は重力の加速度，c_p は減衰係数である。また $F(W)$ は単位面積当りの復原力であって W の関数である。

(2.4) 式のもっとも簡単な場合を考え，W を梁の曲げ振動の最低次の固有振動モードを用いて次のように仮定する。

$$\left.\begin{aligned}
&W(x,t)=w(t)\phi(x)\\
&\text{ここに，}\\
&\phi(x)=\beta\Big[\cos\frac{\nu x}{a}-\cos h\frac{\nu x}{a}-\alpha\\
&\qquad\times\Big(\sin\frac{\nu x}{a}-\sin h\frac{\nu x}{a}\Big)\Big]\\
&\alpha=\frac{\cos\nu-\cos h\nu}{\sin\nu-\sin h\nu}\\
&\beta=1/1.59,\quad \nu=4.73
\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

ただし，a は帯板の長さ，$w(t)$ は中央の撓みである。弾塑性大変形の場合は一般に撓み形が時間とともに変化するので，厳密には $W(x,t)$ は (3.2) 式のように変数分離はできないが，ここでは近似的に (3.2) 式が成りたつものとする。

つぎに，撓み形は一様静水圧をうける場合と相似であると仮定する。実船計測結果によれば船体外板パネルに作用する衝撃水圧の立上り時間は最小 1/100 sec 程度[1]であまり速い衝撃ではないので上述の仮定はほぼ成立つものと思われる。したがって一様水圧 p_s と板中央の撓み w の関係 $p_s=f(w)$ が与えられれば，$F(W)$ は次式のように表わされる。

$$F(W)=f(w) \qquad (3.3)$$

(3.1) 式に (3.3) 式を代入した式で，$f(w)$ が x に無関係であることに注意し，ノーマルモード法と同様な考え方で (3.1) 式に $\phi(x)$ を乗じて積分すれば，次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&m\ddot{w}+c\dot{w}+f(w)=p(t)\\
&\text{ここに，}\\
&m=0.758\gamma h/g\\
&c=0.758c_p
\end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

正方形板の場合，最低次の振動モードは解析的に得られないので，近似的な振動モードとして $\phi(x)\phi(y)$ を用いる。ここに，$\phi(y)$ は (3.2) 式の $\phi(x)$ の式において x の代りに y と書き換えたものである。撓み $W(x,y,t)$ を

$$W(x,y,t)=w(t)\phi(x)\phi(y) \qquad (3.5)$$

と仮定すれば，1自由度非線形系の動的応答の運動方程式は (3.4) 式と同じ形になる。この場合，m および c はそれぞれ次式で与えられる。

$$m=0.574\gamma h/g,\quad c=0.574c_p \qquad (3.6)$$

なお，(3.4) 式の係数のうち m は計算で求まるが，c は実験的に推定しなければならない。しかし，最大応答に及ぼす減衰の影響は小さい[15]ので，無視してよいと考えられる。

本計算法の適用を検討するため，帯板に正弦波形の衝

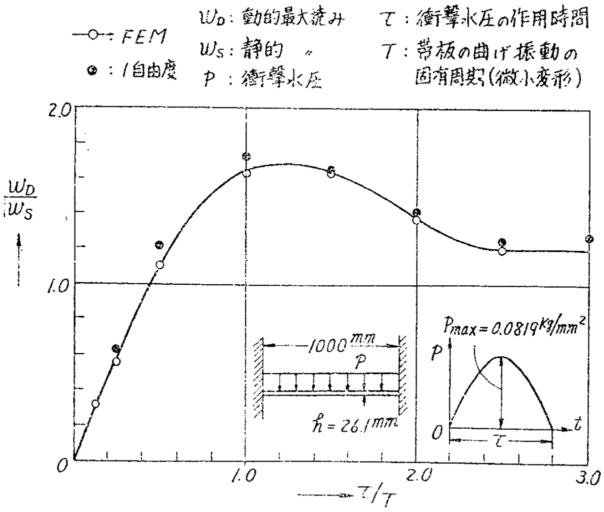


Fig. 3.2 Dynamic Load Factors of a Strip Calculated with a Model of a Single Degree of Freedom and F. E. M. Model

撃水圧が作用する場合につき，$c=0$ とし，鶴田の方法[16]により求めた $f(w)$ を用い，(2.14) 式により (3.4) 式を積分して最大応答を求めた。衝撃水圧の最大値を梁の微小変形理論の塑性崩壊荷重に等しく取り，作用時間を種々に変えて計算した結果を有限要素法による一般解法の結果と比較すると Fig.3.2 のようになる。同図より1自由度非線形系による結果と有限要素法による一般解法の結果はよく一致している。また，Fig.2.3(b)～(d) にも同様な計算結果を示してあるが，この場合も両者はよく一致している。

正方形板については有限要素法による解が現在のところ得られていないが，実験結果によれば，最大応答については1自由度非線形系による計算値と実験値とよく一致している[15]。

3.2 動的最大変位の簡易計算法

(3.4) 式で表わされるような1自由度系に変換できても非線形であるから，電算機が必要で設計に不向きである。そこでここでは動的最大変位を簡単に推定する方法について検討した。

$f(w)$ は一般に w の1次式で表わせないが，ここでは

$$f(w)=k_s w \tag{3.7}$$

と書き，k_s を次のように仮定して (3.4) 式を線形化する。すなわち，静水圧～撓み曲線を用い，Fig.3.3 に示

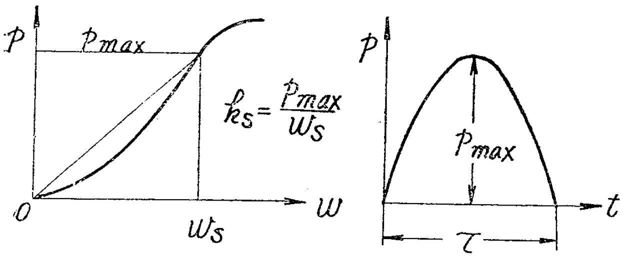


Fig. 3.3 Definition of Linear Spring Constant (Secant Modulus)

すように衝撃水圧の最大値 $p_{\max}$ とそれが静的に作用したときの撓み w_s の比で常に一定値 k_s であるとする。

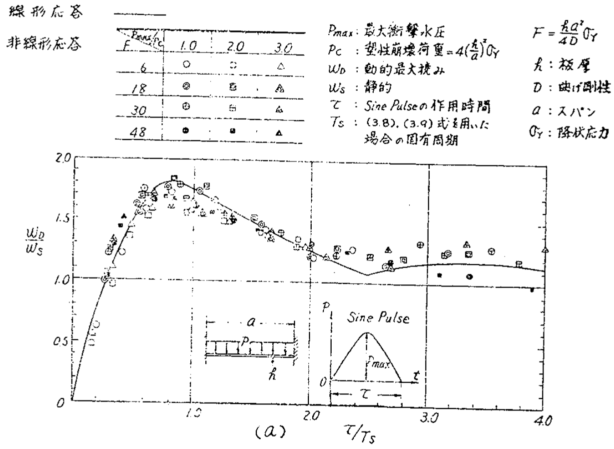
$$k_s=p_{\max}/w_s \tag{3.8}$$

線形ばね定数として k_s を用いた場合の最大応答がどの程度の近似度であるかを調べるために，$f(w)$ を非線形ばねとして (3.4) 式を数値積分して最大応答を求め，k_s を用いた場合と比較した。計算は種々の寸法と荷重について，衝撃水圧の作用時間 τ を変えて行なった。

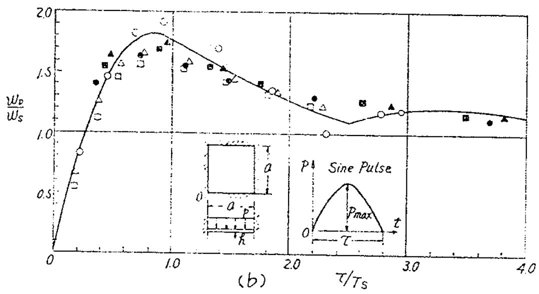
Fig.3.4(a) および (b) はそれぞれ帯板および正方形板に対する結果を，線形系に置換した場合の固有周期

$$T_s=2\pi\sqrt{m/k_s} \tag{3.9}$$

を用いて整理したものである。図中実線は線形応答とした場合の結果，○，□，△などは非線形応答とした場合の計算結果を示す。同図によれば，実線からのバラッキ



(a) Strip



(b) Square Plate

Fig. 3.4 Dynamic Load Factors of Strips (Non-Linear Response)

は最大 20% 以内になる。また有限要素法による一般解法との比較を Fig.2.3 (b)～(d) に示すが，1自由度線形系による結果は実用上ほぼ十分な精度をもっていると思われる。以上の結果から，帯板及び正方形板の弾塑性最大応答は近似的に k_s を Fig.3.3 のように選んだときの線形応答で表わされることがわかる。

船体外板パネルの場合は，$f(w)$ が直線に近くしかも，τ/T_s も上述の計算例の範囲に含まれるので，前述のような1自由度線形系により最大応答を推定できると考えられる。

以上でパネルを1自由度線形系に変換できることがわかった。1自由度線形系の応答は各種の荷重波形に対してすでに述められており[17]，その結果を用いれば容易に最大応答は推定できる。

4 結　　　言

以上の研究の結果，次の結論が得られた。

（1） 衝撃水圧をうける船体外板パネルの非線形応答を有限要素法で求める場合，ノーマルモード法は計算時間も比較的短かく，しかも十分な精度をもっている。

（2） 本報で得られた数値積分の計算式は β 法の $\beta=1/6$ の場合と等価であり，計算時間も β 法と同程度であると考えられる。また非線形応答の場合や微小時間増分 Δt が変わる場合，β 法の計算式は複雑になると思われ

るが，本報の計算式（2.14）式はそのまま用いることができる。

（3） パネルを1自由度線形系に変換して最大応答を求める簡易計算法は実用上十分な精度をもっている。この方法によれば，静水圧～撓み曲線と衝撃水圧が分かれば簡単に最大応答が推定できる。

最後に，本研究の一部は日本造船研究協会第133研究部会の研究の一環として実施したものであり，終始ご指導およびご援助を賜った山本部会長，阪大八木教授ならびに委員の方々に深く感謝致します。

参考文献

1) 西部造船会技術研究会：船体の損傷に関する調査研究（4）——波浪による船首外板の損傷とその対策——西部造船会技術研究会報告書第16号（昭和49年6月）.
2) 日本鋼構造協会：コンピュータによる構造工学講座，培風館，たとえば，I-4-B.
3) R. W. Clough : Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Respose, Recent Advances in Matrix Methods for Structural Analysis and Design, Univ. of Alabama Press (1971).
4) 中尾好昭：動的非線形問題の一解析，日本造船学会誌，第557号（昭和50年11月）.
5) R. E. Nickell : Non-Linear Dynamics by Mode Superposition, Reprint, 2nd U. S.-Japan Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design, Berkeley (1972).
6) 伊藤哲次：モーダルアナリシスの弾塑性応答解析への応用，日本鋼構造協会第7回大会研究集会，マトリックス構造解析法研究発表論文集（昭和48年6月）.
7) 滝沢春夫：振動方程式を数値積分する際の発散現象に関する考察，日本建築学会学術講演梗概集，（昭和46年11月）.
8) D. M. Trujillo : The Direct Numerical Integration of Linear Matrix Differential Equation Using Padé Approximation, Inten. Journ. for Numerical Method in Eng. Vol. 9 (1975).
9) J. H. Argyris and D. W. Scharf : Finite Elements in Time and Space, The Aeron. Journ. of Royal Aeron. Society, Vol. 73 (December 1969).
10) 吉田 裕，村田 修：構造物の動的応答解析における時間積分のアルゴリズム，日本鋼構造協会第9回研究集会，マトリックス構造解析法研究発表論文集（昭和50年6月）.
11) 坂井藤一：力学における変分原理の一般化について，日本鋼構造協会第9回研究集会，マトリックス構造解析法研究発表論文集（昭和50年6月）.
12) 上田幸雄，松石正克，山川武人，赤松毅人：マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析，日本造船学会論文集，第124号（昭和43年6月）.
13) 上田幸雄，赤松毅人，近松義夫：マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析，日本造船学会論文集，第126号（昭和44年12月）.
14) 大坪英臣：大型実対称固有値問題 $Ax=\lambda Bx$ の解法について，日本造船学会誌第550号（昭和50年4月）.
15) 日本造船研究協会第133研究部会研究資料 No. 215（昭和50年3月）.
16) 鶴田彰介，後藤大三，本間康之，藤井登喜男，内野和男：水圧をうける平板の強度，日本造船学会論文集，第109号（昭和36年6月）.
17) C. M. Haris : Shock and Vibration Hand Book, Chapter 8, McGraw Hill (1961).

付録1 本報の数値積分法と β 法及びNigamの方法の比較

本文の（2.12）式を用い，初期変位及び初期速度が u_0 及び $\dot{u}_0$ であることに注意して，全時間について平衡方程式を作ると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&h_{11}u_0+h_{12}u_2=m\dot{u}_0+\left(\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{6}p_2\right)\Delta t\\&h_{21}u_{n-1}+(h_{11}+h_{22})u_n+h_{12}u_{n+1}\\&\quad=\left(\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}p_{n+1}\right)\Delta t\\&\quad(n\geq 2)\end{aligned}\right\}\quad (A\text{-}1)$$

次に β 法の $\beta=1/6$ の場合の計算式[2)]を上式と比較しやすい形に書けば，

$$\left.\begin{aligned}&\text{初期値}\\&-Pu_0+Du_2=Q\dot{u}_0+\left(\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{6}p_2\right)(\Delta t)^2\\&\qquad+\frac{(\Delta t)^3}{12}cm^{-1}p_1\\&\text{漸化式}\ (n\geq 2)\\&Fu_{n-1}-Bu_n+D_{n+1}u_{n+1}=\left(\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{2}{3}p_n\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{6}p_{n+1}\right)(\Delta t)^2\\&\text{ここに,}\\&P=m+\frac{\Delta t}{2}c-\frac{(\Delta t)^2}{3}k-\frac{(\Delta t)^3}{12}cm^{-1}k\\&\quad=-h_{11}\Delta t-\frac{(\Delta t)^3}{12}cm^{-1}k\\&Q=m\Delta t-\frac{(\Delta t)^3}{12}cm^{-1}k\\&D=m+\frac{\Delta t}{2}c+\frac{(\Delta t)^3}{6}k=h_{12}\Delta t\\&B=2m-\frac{2}{3}(\Delta t)^2k=-(h_{11}+h_{22})\Delta t\\&F=m-\frac{\Delta t}{2}c+\frac{(\Delta t)^2}{6}k=h_{21}\Delta t\end{aligned}\right\}\quad (A\text{-}2)$$

（A-2）式において $(\Delta t)^3$ の項を省略すると（A-1）式は（A-2）式とまったく一致する。この事実より，（2.14）式は β 法で $\beta=1/6$ と置いて得られる式と等価

であることがわかる。

次に，本法［(2.14) 式］，β 法［(A-2) 式］および Nigam の方法について，線形応答の場合の演算回数を比較する。なお，Nigam の方法[8]については次式を考えた。

$$\left.\begin{array}{l}
\text{初期値}\\
\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_0\\
\dot{\boldsymbol{u}}_1=\dot{\boldsymbol{u}}_0\\
\text{漸化式}\\
\boldsymbol{u}_{n+1}=\boldsymbol{u}_n+\Delta\boldsymbol{u}_n\\
\Delta\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{D}_{12}^{(1)}\dot{\boldsymbol{u}}_n+\boldsymbol{D}_{12}^{(2)}\boldsymbol{m}^{-1}(\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{f}_n)\\
\qquad+\boldsymbol{D}_{12}^{(3)}\boldsymbol{m}^{-1}(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{f}_n)\\
\dot{\boldsymbol{u}}_{n+1}=\boldsymbol{D}_{22}^{(1)}\dot{\boldsymbol{u}}_n+\boldsymbol{D}_{22}^{(2)}\boldsymbol{m}^{-1}(\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{f}_n)\\
\qquad+\boldsymbol{D}_{22}^{(3)}\boldsymbol{m}^{-1}(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{f}_n)
\end{array}\right\}\qquad\text{(A-3)}$$

ここに，$\boldsymbol{D}_{12}^{(1)}$，$\boldsymbol{D}_{12}^{(2)}$，$\boldsymbol{D}_{12}^{(3)}$，$\boldsymbol{D}_{22}^{(1)}$，$\boldsymbol{D}_{22}^{(2)}$，$\boldsymbol{D}_{22}^{(3)}$ 等は次式で与えられる $\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{D}_3$ の小行列である。

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}^{(1)}, & \boldsymbol{D}_{12}^{(1)}\\ \boldsymbol{D}_{21}^{(1)}, & \boldsymbol{D}_{22}^{(1)}\end{bmatrix}=e^{A\Delta t}=I_2+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\boldsymbol{A}^s(\Delta t)^s$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}^{(2)}, & \boldsymbol{D}_{12}^{(2)}\\ \boldsymbol{D}_{21}^{(2)}, & \boldsymbol{D}_{22}^{(2)}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{D}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}^{(3)}, & \boldsymbol{D}_{12}^{(3)}\\ \boldsymbol{D}_{21}^{(3)}, & \boldsymbol{D}_{22}^{(3)}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2/\Delta t)\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_1\\ -\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{k}, & -\boldsymbol{m}^{-1}\boldsymbol{c}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{k}^{-1}\boldsymbol{c}, & -\boldsymbol{k}^{-1}\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{I}_1 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2$＝単位行列

線形応答の場合は，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{k}$ の行列は時間とともに変化しないので，最初に係数行列を作り，次に各時間ステップの演算を行なう手順を考えた。(2.14) 式，(A-2) 式および (A-3) 式について演算回数を比較すると，Table A.1 のようになる。Table A.1 より本法，β 法および Nigam の方法の 3 つを比較すると，微小時間増分 Δt の大きさを同じとれば，演算時間は本法と β 法はほとんど同じであるが，Nigam の方法は本法の 2 倍程度になることが予想される。

Table A.1 The Numbers of Operations Involved in Each Methods

演算の種類		本法 (2.14)式	β 法 (A-2)式	Nigamの方法 (A-3)式
係数行列の作成	スカラーと行列の積	4	4	4Δ+4
	行列の和	4	4	4Δ+4
	行列の積*	1	2	4Δ+8
	逆行列*	1	1	2
各Stepにおける演算	行列とベクトルの積*	3	3	7
	ベクトルの和	6	4	8
	ベクトルとスカラーの積	4	3	0

注) 1) ＊印をつけたものが演算時間が長い。
2) Δ は (A-4) の D_1 の展開項の項数。

付録 2　3 節点要素に基づく数値積分の式

3 節点要素の場合は $\boldsymbol{u}(t)$ および $\boldsymbol{p}(t)$ は t の 2 次式を仮定し，節点番号を Fig. B.1 のように付ければ，本

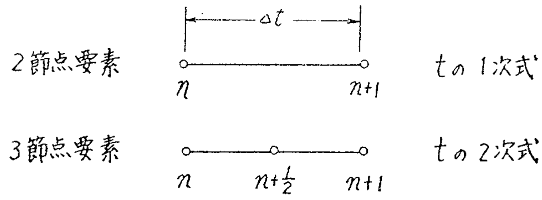


Fig. B.1 Time Elements

文の (2.14) 式と同じ形のものが得られる。(2.14) 式の $\boldsymbol{h}_{12}$，$\boldsymbol{h}_{22}$，$\bar{\boldsymbol{p}}_{n+1}$ は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l}
\boldsymbol{h}_{12}=\boldsymbol{e}_{13}-\boldsymbol{e}_{12}\boldsymbol{e}_{22}^{-1}\boldsymbol{e}_{23}\\
\boldsymbol{h}_{22}=\boldsymbol{e}_{33}-\boldsymbol{e}_{32}\boldsymbol{e}_{22}^{-1}\boldsymbol{e}_{23}\\
\bar{\boldsymbol{p}}_1=\boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{u}}_0+\boldsymbol{r}_1^R-\boldsymbol{e}_{12}\boldsymbol{e}_{22}^{-1}\boldsymbol{r}_{1/2}\\
\bar{\boldsymbol{p}}_{n+1}=\boldsymbol{r}_{n+1}^L+\boldsymbol{r}_{n+1}^R-\boldsymbol{e}_{32}\boldsymbol{e}_{22}^{-1}\boldsymbol{r}_{n+(1/2)}\\
\qquad-\boldsymbol{e}_{12}\boldsymbol{e}_{22}^{-1}\boldsymbol{r}_{n+(3/2)}
\end{array}\right\}\qquad\text{(B-1)}$$

ここに，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_{11} & \boldsymbol{e}_{12} & \boldsymbol{e}_{13}\\ \boldsymbol{e}_{21} & \boldsymbol{e}_{22} & \boldsymbol{e}_{23}\\ \boldsymbol{e}_{31} & \boldsymbol{e}_{32} & \boldsymbol{e}_{33}\end{bmatrix}=\frac{\Delta t}{30}\boldsymbol{k}\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 2 & 16 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}-\frac{1}{3\Delta t}\boldsymbol{m}\begin{bmatrix}7 & -8 & 1\\ -8 & 16 & -8\\ 1 & -8 & 7\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}\begin{bmatrix}-3 & 4 & 1\\ -4 & 0 & 4\\ -1 & -4 & 3\end{bmatrix}\qquad\text{(B-2)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\boldsymbol{r}_{n+1}^L=\left(-\frac{1}{30}\boldsymbol{p}_n+\frac{1}{15}\boldsymbol{p}_{n+(1/2)}+\frac{2}{15}\boldsymbol{p}_{n+1}\right.\\
\qquad\left.-\frac{1}{6}\boldsymbol{f}_n\right)\Delta t\\
\boldsymbol{r}_{n+1}^R=\left(\frac{2}{15}\boldsymbol{p}_n+\frac{1}{15}\boldsymbol{p}_{n+(1/2)}-\frac{1}{30}\boldsymbol{p}_{n+1}\right.\\
\qquad\left.-\frac{1}{6}\boldsymbol{f}_{n+1}\right)\Delta t\\
\boldsymbol{r}_{n+(1/2)}=\left(\frac{1}{15}\boldsymbol{p}_n+\frac{8}{15}\boldsymbol{p}_{n+(1/2)}+\frac{1}{15}\boldsymbol{p}_{n+1}\right.\\
\qquad\left.-\frac{2}{3}\boldsymbol{f}_n\right)\Delta t\\
\boldsymbol{r}_{n+(3/2)}=\left(\frac{1}{15}\boldsymbol{p}_{n+1}+\frac{8}{15}\boldsymbol{p}_{n+(3/2)}\right.\\
\qquad\left.+\frac{1}{15}\boldsymbol{p}_{n+2}-\frac{2}{3}\boldsymbol{f}_{n+1}\right)\Delta t
\end{array}\right\}\qquad\text{(B-3)}$$

ただし，(B-2) 式の $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{c}$ と係数行列の積は次の演算を意味する。たとえば，$\boldsymbol{e}_{11}$ は

$$\boldsymbol{e}_{11}=\frac{4}{30}\Delta t\boldsymbol{k}-\frac{7}{3\Delta t}\boldsymbol{m}-\frac{3}{6}\boldsymbol{c}$$

となる。

(15) から判断して，スペクトルピークが鋭い波では変動漂流力が一層大きくなるのではないでしょうか（港湾技研報告第15巻第3号の拙論「波の連なりの統計的性について」を御参照下さい)。

2) また，三次元物体の係留問題では波の方向スペクトルを S_{FD} にどのように取り入れるかの議論も必要になるのではないでしょうか。

【討】 新井 信一 君 1) 波スペクトルの形状効果について特に所感をもっておりませんが，確かに (15) 式によれば，同じ分散値をもった波スペクトルでもそのピークが鋭いほど，$S_{FD}(\omega)$ は $\omega=0$ でより大きな値をもち急峻かつ集中的なスペクトルとなります。

2) 海洋波として短波頂不規則波を考えねばならぬ場合は，ご指摘のように問題がでてきて，かなり困難なことになります。三次元流体力の計算がかなり面倒であることを考えますと，かりに理論上の合理性を欠いても実用に耐え得るような簡便な取り扱い方を探る必要があると考えております。

パネルの動的非線形応答の計算法について

安 川 度 外

【討】 中尾 好昭 君 1) 著者が提案されている数値積分法の精度について，Δtを同じにした場合のNewmarkの β 法との比較等，データがあれば示していただきたい。

2) 復原力または剛性行列を計算される場合の塑性関節の履歴特性の仮定を示していただきたい。また (2.2) 式で，高次の微小項を省略し，くり返し計算を不要にしておられるが，この場合 ΔU，すなわち Δt をある程度小さくする必要があると思われる。このとき，(2.2) 式による場合と，高次の微小項まで考慮し，くり返し計算を行い Δt をある程度大きくする場合との精度および演算時間の比較データがあれば示していただきたい。また，(2.2) 式を用いた場合でも除荷に入いる際には，くり返し計算が必要になると思われるがいかがか。

【回】 大西登喜夫 君 1) Fig. 2.2 (a) に示す自由度の問題について $\Delta t=-/1000$ 秒として，本法および β 法で計算を実施しました。応答の最大値は厳密解，本法，β 法の場合それぞれ 0.4363，0.4361，0.4359 となり本法と β 法の精度は同程度かと思われます。

2) 弾塑性計算は塑性関節法を用いており材料は完全弾塑性とし，軸力および曲げモーメントを考慮した降伏条件を用いております。なお歪速度の影響による降伏応力の上昇は計算例では考慮しておりません。

3) 御指摘のようにくり返し計算を行わない時は Δt をある程度小さくとる必要があると思われます。また高次の微小項まで考慮した計算は行っていませんので比較したデータはございません。今後御指摘のような検討を実施したいと考えております。

4) 剛性が急激に変化するような場合，厳密には，くり返し計算が必要であると思われますが，Δt をある程度小さくとればパネルの応答計算のような場合では実用上問題はないかと思います。

油槽船の波浪中船体横強度解析について

永 元 隆 一 外

【討】 吉識 恒夫 君 1) 5.4 節において簡易計算法とトータルシステム計算との比較を行なわれていますが，簡易計算法における荷重の負荷方法および構造のモデル化方法に関して，具体的に御説明願います。

2) Fig. 18 において，center tank の横桁の応力に関して，total system と簡易計算による値とに差があるのは相対変位とタンク内変動圧の影響であると述べてありますが，このうちタンク内変動圧の影響に関して，何らかの検討結果があれば，御教示願います。

【回】 末岡 英利 君 簡易計算法については SR 134 研究部会昭和50年度研究報告書にも報告しておりますが，下記のとおりです。

1) 荷重の負荷方法 L. W. L位置，Bilge位置，Bottom位置での3点の波浪変動圧の長期予測値から Trans Ring に作用する変動荷重分布を求め（各点間は直線分布と仮定），静水圧に加算（波の山)，或いは減算（波の谷）することにより得られる荷重を負荷する。但し波の山で Upper Dk. を越える荷重がある場合にはその荷重は無視し負荷しない。

2) 構造のモデル化 Trans Ring Side Shell Longl Bhdをおよび位置で上下方向に支持された平面骨組モデル（片舷モデル）としている。

2) 横強度部材に与える影響についてタンク内変動圧の大きさもさることながら，タンク内変動圧と波浪変動