

(昭和 52 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

軟鋼および高張力鋼の切欠疲労強度に関する一考察

正員 飯 田 國 廣* 正員 高 允 宝**

Fatigue Strength Reduction Factor of Mild and High Strength Steels

by Kunihiro Iida, *Member* Yunbo Kho, *Member*

Summary

A set of load controlled fatigue tests of smooth and notched specimens was conducted in intermediate and high cycle fatigue ranges in order to re-evaluate the applicability of a predicting formula of fatigue strength reduction factor of crack initiation basis, that was proposed in a previous paper.

Materials tested were electro-gas welded metal of a mild steel and base metals of 50kg/mm² class and 70kg/mm² class high strength steels. Notch geometries investigated ranged over elastic stress concentration factors of approximately 2.2 to 8.6. An FEM analysis of cyclic elasto-plastic strains distributed in the notched net section was also made and discussed in comparison with experimental results measured by strain gauges during a fatigue test.

Results indicated that the fatigue strength reduction factor of crack initiation basis in high cycle range will become approximately 0.8 to 1.0 times as great as the elastic stress concentration factor of a notch. A formula presented in this paper will be available in estimating the fatigue strength reduction factor of crack initiation basis for any stress ratio. In case where the notch root may be subjected to cyclic yielding, the fatigue strength reduction factor is predicted by the proposed formula by applying the fatigue strength of smooth material for the stress ratio of -1. The application of the fatigue strength of smooth material for the stress ratio of zero will provide conservative estimation of the fatigue strength reduction factor.

記 号

S, σ : 実断面公称応力 (kg/mm²), 公称歪
 σ, ϵ : 平滑試験片の疲労強度あるいは切欠試験片における局部応力 (kg/mm²), 局部歪
 σ_Y, σ_Y' : 静的および繰返し降伏応力 (kg/mm²)
 σ_u : 静引張強さ (kg/mm²)
 E : ヤング係数 (kg/mm²)
 E_S, E_N : セカント係数 (kg/mm²)
 K_t : 弾性応力集中係数
 K_t' : Neuber の有効応力集中係数
 K_o, K_e : 静的塑性応力あるいは塑性歪の集中係数
 K_o', K_e' : 繰返し塑性応力あるいは塑性歪の集中係数
 K_f : N_C 基準による疲労強度減少係数
 N_C : 肉眼亀裂 (長さ約 0.5mm の表面亀裂) の発生寿命
 N_f : 試験片が分離破断する寿命
 m, n : σ_a と ϵ_{ta} の関係式における定数と指数 ($\epsilon_{ta} = \sigma_a/E + m(\sigma_a)^{1/n}$)

M : σ_R と ϵ_{tR} の関係式における定数 ($M = 2^{(n-1)/n} \cdot m$)

R : 公称応力比 ($R = S_{\min}/S_{\max}$)

\bar{R} : 局部応力比 ($\bar{R} = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$)

Q : 基準化した応力範囲 ($Q = K_t S_R / 2 \sigma_Y'$)

添 字

a : 振幅, R : 範囲, t : 全歪, p : 塑性歪成分,

\max : 上限値, \min : 下限値

1 ま え が き

不連続部や切欠を有する構造物の疲労寿命のほとんどは切欠底部における疲労亀裂の発生とこの亀裂が臨界長さになるまでの伝播に費やされる。この内疲労亀裂の伝播寿命は初期切欠形状の影響をほとんど受けないことが明らかにされており^{1), 2)}, したがって疲労強度に及ぼす切欠の影響の評価は亀裂の発生寿命 N_C に基づいて行なわれるべきである。この見地から著者らは前報³⁾において中間サイクル域での片振り引張り荷重による疲労強度減少係数 K_f について、切欠底におけるヒステリシスエネルギーに基づいた考察を行ない、 N_C 基準での K_f と弾性応力集中係数 K_t とがほぼ直線関係となる結果を導び

* 東京大学工学部船舶工学科

** 長崎造船大学機械工学科

いた。そして軟鋼を供試材とする6種類の切欠を加工した両側切欠平板試験片の疲労試験を行ない、導びいた理論式の妥当性を検証した。

本報は、前報で提案した K_f の推定式の適用性を材料や切欠形状が異なる場合について検討するとともに、切欠底における局部応力あるいは歪挙動に関するNeuberあるいはStowellの近似式の適用性ならびに K_f - K_t 関係の一般的特性を明らかにすることを目的として行なった。すなわちKDK鋼エレクトロガス溶接継手、HW 50およびHW 70を供試材とする各3種類の形状の試験片に関する荷重制御片振り疲労試験を実施するとともに、各供試材の基礎疲労特性を知るため砂時計型試験片の両振り疲労試験も併せて実施し、疲労強度減少係数を求めた。さらに切欠試験片について局部歪の繰返し挙動の計測あるいは有限要素法による弾塑性解析を行ない、局部応力あるいは歪の挙動と切欠疲労強度との相関について検討した。

2 試験方法

2.1 試験片

供試材はKDK (板厚 35mm), HW 50 (板厚 20mm) および HW 70 (板厚 19mm) の圧延鋼板であり、これら供試材の化学成分および静引張特性を Table 1 に示す。KDK 鋼については、エレクトロガス溶接継手試験片を得るためロール方向と直角方向に Table 2 に示す開先を加工し、同表に示した条件でエレクトロガス溶接を行なった。

試験片は砂時計型および切欠付平板試験片を用いたが、前者は WES-162-1970⁴⁾ の3号試験片 (最小断面部直径 10mm, $K_t=1.06$) である。一方、切欠試験片は

Fig. 1 に示す片側切欠付きおよび Fig. 2 に示す中央切欠付き試験片の2種類とし、前者はKDK鋼溶接継手に、また後者はHW 50 および HW 70 母材に用いた。試験片はいずれも長軸がロール方向に一致するように圧延鋼板の板厚中心部から採取し、所定の形状に機械加工した。なおKDK鋼エレクトロガス溶接継手試験片はいずれもボンド部が試験部 (最小断面部) に位置するように製作した。

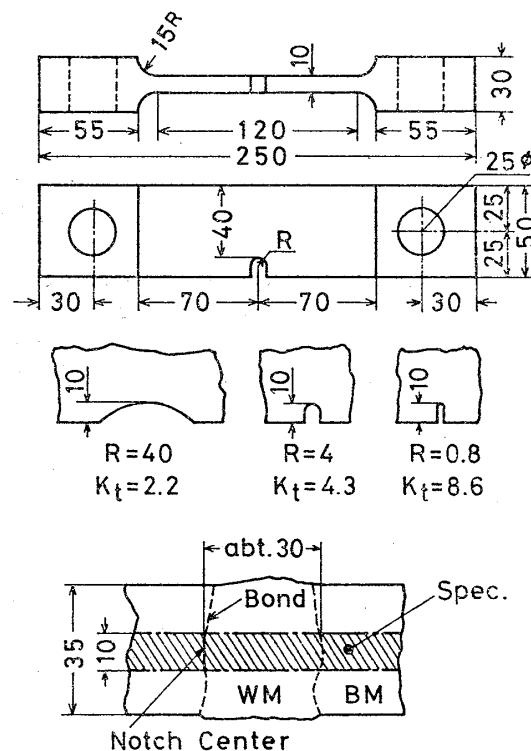


Fig. 1 Single Edge Notched Plate Specimen and Location of Notch Center (KW-Series)

Table 1 Static Tensile Properties and Chemical Compositions

Material		σ_Y (kg/mm ²)	σ_u (kg/mm ²)	RA (%)	ϵ_f	C	Si	Mn	P	S
KDK	BM	26.8	48.6	62	0.97	0.11	0.24	1.01	0.017	0.012
	WM	27.6	48.8	68	1.14	-	-	-	-	-
HW50		61.7	73.6	71	1.24	0.12	0.32	1.24	0.012	0.006
HW70		80.0	95.3	66	1.08	0.10	0.23	0.81	0.012	0.007

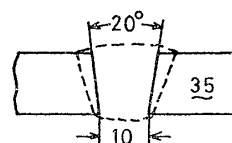
σ_Y : Yield Stress, σ_u : Ultimate Tensile Strength

RA : Reduction in Area, ϵ_f : Static Fracture Ductility

Table 2 Electro-gas Welding Conditions

Wire	HS-42G (3.2mmφ)
Atmosphere	CO ₂ gas 35l/min
Current (A)	650 - 670
Voltage (V)	39 - 41
Speed (cm/min)	6.2 - 6.5
Heat Input (KJ/cm)	243 - 255

Edge Preparation



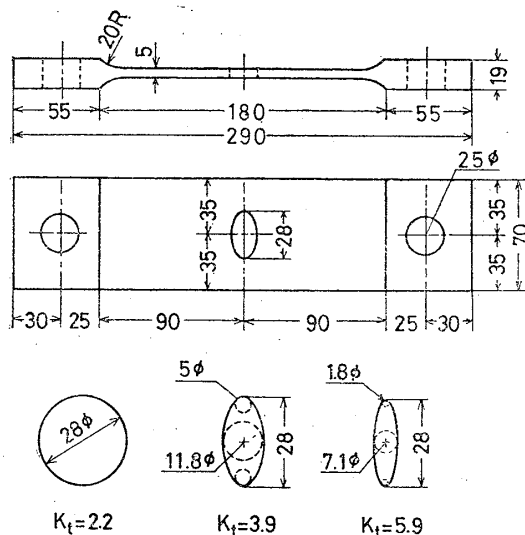


Fig. 2 Center Notched Plate Specimen
(HW 50 and HW 70)

各試験片の K_t を Table 3 に示したが、表中の解析解とは片側切欠試験片に関しては Neuber の解⁵⁾、中央楕円孔試験片については石田の解⁶⁾によるものであり、また実験値とは切欠底に貼付した歪ゲージによる計測値に基づいた値、さらに FEM とは平面応力問題として有限要素法によって求めた切欠底要素の軸方向応力と実断面公称応力の比として得られた値である。以後試験片の K_t としてはこれらの平均値を用いることにする。

2.2 疲労試験

砂時計型および切欠平板試験片いずれも動的容量 20 トンのローゼンハウゼン型万能疲労試験機を用いて、荷重制御条件で疲労試験したが、砂時計型試験片については完全両振り、一方切欠平板試験片は実断面公称応力の下限值が $1\sim 2\text{ kg/mm}^2$ の片振り引張荷重制御で行なった。以下、後者の試験を完全片振りで見做すことにする。試験系列を Table 4 に示す。

砂時計型試験片はロードセルを介してチャックにかま

Table 3 Stress Concentration Factor of Specimens Used

Notch Root Material and Specimen Type		$W^{(1)}$	$w^{(2)}$	$R^{(3)}$	$K_t^{(4)}$			
					Analy.	Exp.	FEM	Mean
KDK, Bond	Side Notch	50	10	40.0	2.1	2.4	2.2	2.2
		50	10	4.0	4.3	4.3	4.4	4.3
		50	10	0.8	8.9	-	8.3	8.6
HW50 & HW70, Base Metal	Center Notch	70	28	14.0	2.25	2.2	2.2	2.2
		70	28	2.5	4.0	4.0	3.8	3.9
		70	28	0.9	6.05	-	5.8	5.9

(1) Specimen Width (mm)

(2) Notch Length (mm)

(3) Notch Root Radius (mm)

(4) Elastic Stress Concentration Factor

Table 4 Test Series and Specimen Code

Material (1)	Hour Glass (2)	Dull Notch (3)	Medium Notch (3)	Sharp Notch (3)
KDK-BM	KBR	-	-	-
KDK-BD	KWR	KWA	KWB	KWC
HW50-BM	5HR	5HA	5HB	5HC
HW70-BM	7HR	7HA	7HB	7HC

(1) BM : Base Metal, BD : Bond

(2) Fully Reversed, Load Controlled

(3) Repeated Tension, Load Controlled
($S_{min} = 1$ to 2 kg/mm^2)

せ、また試験部に歪ゲージを貼付し荷重と歪を適宜の繰返し数で記録した。同様に切欠平板試験片についても、ロードセルを直列につなぐことによって荷重を、そして切欠底あるいは試験片表面の適当な位置に貼付した歪ゲージによって歪を計測した。計測に用いた歪ゲージは、砂時計型試験片では主としてゲージ長 2mm の YF-2b および KEF-2-C1 であり、切欠平板試験片ではゲージ長 0.3mm の KFC-03-C1 である。

疲労試験中 15 倍のルーペを用いて試験部を観察し、疲労亀裂の発見に努めた。本研究では長さ約 0.5mm の疲労亀裂が認められるときまでの繰返し数を亀裂発生寿命 N_c と定義したが、亀裂発見時にすでに規定した長さ以上に亀裂が進展してしまっていた試験片もいくつかあり、このような場合はその後の亀裂進展挙動から逆に N_c を推定した。また亀裂は多くの場合切欠底において表面から $1/3\sim 1/4$ 板厚内部に入った点から発生したが、 N_c は板表面部に認められた亀裂によって規定した。エレクトロガス溶接継手試験片については、発生した亀裂が数 mm の長さに達した段階で試験を中断し、表面エッチングを行なってどの材質に亀裂が発生したかを調べた。

繰返し速度は主として 330 または 500cpm としたが、 N_c が 1×10^4 前後と予想された砂時計型試験片は繰返し速度 20cpm で試験した。またいずれの場合も試験に

先立って手動により数サイクルの繰返しを行なった後試験を開始した。荷重負荷は引張側から開始し、試験はすべて大気環境で行なった。

2.3 有限要素法による局部応力、歪の計算

切欠試験片の疲労特性を評価するためには、切欠底における応力あるいは歪挙動を把握する必要がある。本研究では歪ゲージによる計測を行なったが、その他に平面応力問題として三角形定歪要素を用いた弾塑性解析を行なった。計算は、試験片の N_c が 2×10^4 あるいは 2×10^5 程度であるような荷重条件を対象とし、基本的には通常

の弾塑性解析と同様であり山田ら⁷⁾の方法に従っているが、硬化則は Prager の移動硬化則⁸⁾を用いた。増分荷重は新たに要素を降伏させるに要する最も小さい値として定めたが、計算時間を短縮するために、この荷重増分によって降伏条件の 98% 以上となる要素は降伏したものと判定した。そしてこれら降伏した要素の応力-歪マトリックス $[D^e]$ を塑性応力-歪マトリックス $[D^p]$ に変換して次の荷重増分を与える。こうして所定の荷重に達すると、すべての要素の D マトリックスを $[D^e]$ にして荷重を反転させ指定の荷重サイクルになるまで計算を繰り返した。

切欠部材が繰返し荷重をうける時、切欠底における歪挙動は、とりわけ全面降伏しない場合には、歪制御状態に近いと考えられるので解析に際しては歪制御試験での定常状態におけるヒステリシスループの頂点を結んで得られるいわゆる繰返し応力-歪曲線 (locus curve) を用いるのが妥当であろう。本解析では、歪制御試験で得られた繰返し応力-歪関係⁹⁾を次式⁷⁾で近似して用いた。

$$\sigma = \sigma_Y' (1 + \epsilon_p/a)^b \quad (1)$$

すなわち HW 50, HW 70 に対してそれぞれ $\sigma_Y' = 45.3, 57.9$, $b = 0.235, 0.226$, $a = 7.42 \times 10^{-3}, 6.17 \times 10^{-3}$ とした。ただし KDK 鋼継手材に関しては荷重制御試験における応力-歪関係に基づいた 2 本の折線 ($\sigma_Y' = 27.5$, 歪硬化率 $= 490 \text{ kg/mm}^2$) を用いた。

なお要素分割は試験部と同一板厚の部分についてのみ行なったが、本解析で得られた K_t と解析解との差が 7% 程度 (Table 3) であったので、要素分割は適当なものであったと考える。計算は HITAC 8800/8700 で行なった。

3 試験結果および考察

3.1 平滑および切欠材の $S-N$ 線図

Fig. 3 に完全両振り荷重制御による各供試材の砂時計型試験片の疲労強度線図を示す。横軸は肉眼亀裂発生寿命 N_c であり、縦軸は公称応力振幅 S_a である。各試

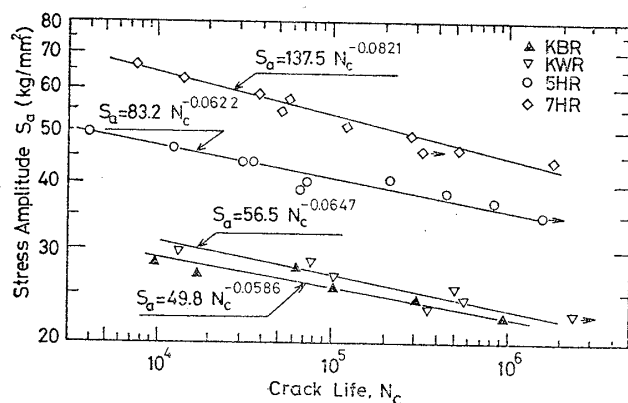


Fig. 3 $S-N$ Curves of Hour Glass Type Specimens ($R=-1$)

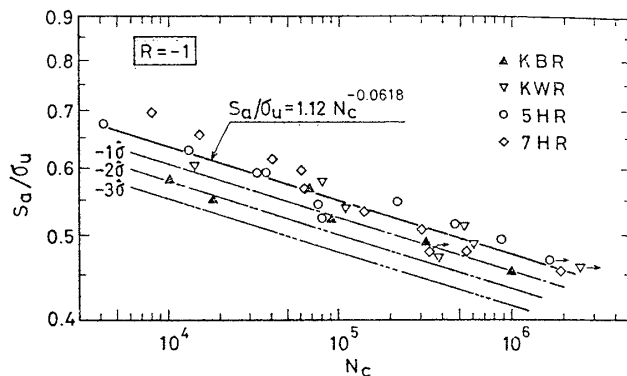


Fig. 4 S_a/s_u vs. N_c

験系列とも若干のばらつきはあるが、ほぼ良好な直線関係が認められ、次式で疲労強度を表示し得ることがわかる。

$$S_a = C_0 N_c^{-k} \quad (2)$$

平滑材の高サイクル疲労強度は材料の引張強さと密接に関係することが知られているが、本供試材も静的な強度レベルの低下に伴って疲労強度は明らかに低下している。KWR 試験片 (KDK 鋼ボンド部) での疲労亀裂はすべて熱影響部から発生したが、KBR 試験片 (KDK 鋼母材) と KWR 試験片の引張強さはほぼ同じであるにもかかわらず、疲労強度はむしろ母材の方が若干低くなる傾向が見られ、少なくともエレクトロガス溶接により継手の疲労強度が著しく低下するような現象は認められなかった。これらのデータを各供試材の引張強さで無次元化すると、Fig. 4 に示すように比較的狭い分散帯に収まり、中央値は次式で表示できた。

$$S_a/s_u = 1.12 N_c^{-0.0618} \quad (3)$$

なお $-i\hat{\theta}$ 曲線 ($i=1, 2, \dots$) も図示してあるが、これは各 $\hat{\theta}$ 曲線と中央曲線 ((3) 式) による強度の比を $10^{-0.02i}$ として求められる。たとえば $-1\hat{\theta}$ 曲線による強度値は (3) 式による値より約 5% 低くなっている。

一方、試験部に貼付した歪ゲージによる疲労試験中の歪挙動の計測によると、HW 50 および HW 70 はほぼ弾性挙動を呈し歪振幅は繰返しに伴ってほとんど変化しないが、KDK 鋼では低サイクル荷重制御試験で観察される挙動¹⁰⁾と良く似た挙動を呈し繰返しに伴う歪振幅の増加が見られたものもあった。この場合には $N \equiv N_c/2$ における歪振幅 ϵ_{ta} を代表値とした。後述する Fig. 10 に、これらの ϵ_{ta} を N_c に対してプロットし、切欠材のデータとの比較に用いた。

切欠試験片に関する $S-N$ 線図を Fig. 5, Fig. 6 に示す。なお縦軸は実断面公称応力 S_R で表わした。Fig. 5 には SM 41 C 母材 ($\sigma_Y = 28.7$, $\sigma_u = 48.3$, $\epsilon_f = 0.85$) を用いた両側切欠平板試験片による軸力片振り荷重制御試験結果⁸⁾も点線で示したが、これは KDK 鋼継手材と静引張特性が類似しており、また試験条件もほぼ等しい

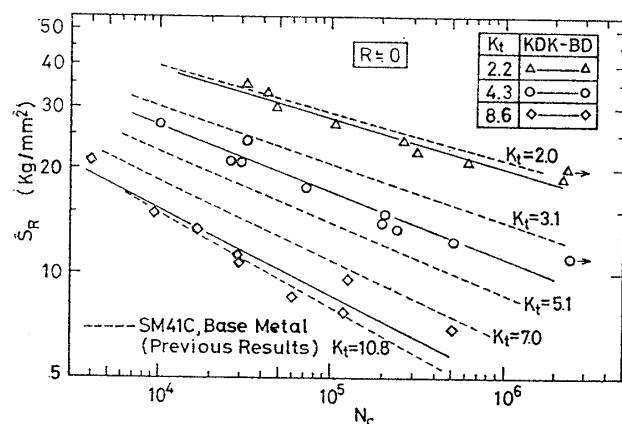


Fig. 5 Fatigue Test Results of Single Edge Notched Specimen

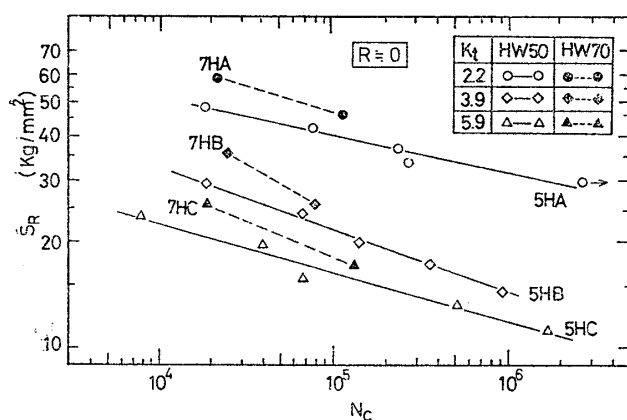


Fig. 6 Fatigue Test Results of Center Notched Specimen

ので両者を比較した。 $K_t=2$ での疲労強度はほとんど同一であるにもかかわらず KWC ($K_t=8.6$)の強度は SM41C 母材の $K_t=10.8$ における強度にほぼ対応しており、従って KDK 鋼エレクトロガス溶接継手は SM41C 母材に比べて若干切欠感度が鋭いと考えられる。一方 Fig. 6 の HW 50 と HW 70 の結果を比較すると、試験範囲内ではいずれの場合も HW 70 の方が強度が高い。HW 70 は 2 応力レベルでの試験しか行っていないので詳細なことは不明であるが、直線の勾配は HW 70 における方が大きくなる傾向が見られる。なお両図中の直線は平滑材におけると同様に、 $\log S_R$ に対し $\log N_c$ を直線回帰して得られたものであり、(2) 式の左辺を S_R と読み代えた場合の表示式の定数を Table 5 にまとめた。同表には平滑材の結果も併記し、また HW 70 の切欠試験片は各系列とも 2 データしかないがこの 2 点を結ぶ直線に関する定数も参考のため記してある。

切欠材の亀裂伝播寿命は、Saai²⁾、著者ら³⁾また低サイクル疲労に関しても大内田ら¹⁾によって、初期切欠形状による影響はほとんどないことが明らかにされているが、本供試材の HW 50, HW 70 においても同様の結果が得られた。

Table 5 Constants in $S_R=(N_c)^{-k}$ and Statistical Parameters

Code	K_t	r	C	k	V
KBR	1.06	-0.927	99.6	0.0586	0.0987
KWR	1.06	-0.933	113.0	0.0647	0.0832
KWA	2.2	-0.968	143.6	0.142	0.0363
KWB	4.3	-0.964	149.6	0.188	0.0414
KWC	8.6	-0.949	147.4	0.246	0.0466
5HR	1.06	-0.942	166.4	0.0622	0.0704
5HA	2.2	-0.963	145.3	0.111	0.0608
5HB	3.9	-0.997	173.1	0.180	0.0032
5HC	5.9	-0.982	83.0	0.141	0.0410
7HR	1.06	-0.987	275.0	0.0821	0.0167
7HA	2.2	-	(232.3)	(0.137)	-
7HB	3.9	-	(659.0)	(0.287)	-
7HC	5.9	-	(194.4)	(0.206)	-

r : Correlation Coefficient

V : Variance

3.2 切欠底における局部歪挙動と近似式の適用性

$K_t=5.9$ および 8.6 の鋭切欠試験片を除いて、歪ゲージにより切欠底の局部歪を計測したが、本試験範囲 ($N_c=10^4 \sim 10^6$) では切欠底での局部歪範囲は荷重繰返しによる顕著な変化を示さなかった。Fig. 7 はこのような試験片 (HW 50, $K_t=3.9$, $N_c=1.9 \times 10^4$) の第 1 サイクルにおける切欠底での局部歪の実測値と平面応力問題とした FEM の計算結果を示したもので、縦軸は実断面公称応力、横軸は切欠底の軸方向歪を表わす。図に見られるように第 1 サイクルの荷重によるピーク歪の実測値と FEM の解はよい一致を示さず、FEM による値の方が大きくなる傾向が一般に認められた。この差異を生じた原因の 1 つは静的な応力歪関係と繰返し応力-歪関係の相異にあると考えられる。すなわち、供試材はいずれも本試験範囲では繰返し軟化挙動を呈するので、FEM の計算に繰返し応力-歪関係を用いたことにより、計算では材料特性を実際よりも柔軟に評価しているためと考えられる。一方、第 2 サイクル以後の歪範囲挙動は

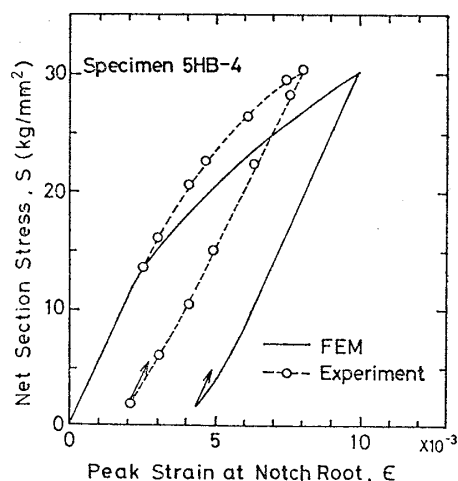


Fig. 7 Peak Strain Behavior at 1st Cycle

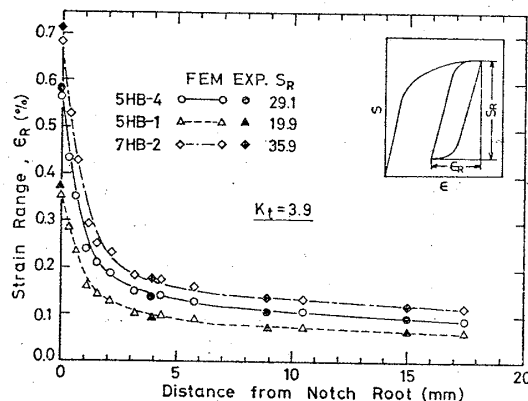


Fig. 8 Strain Distributions in Notch Section

良く一致していると見られる。これを示すため Fig. 8 に $K_t=3.9$ の試験片の切欠中心線上における歪範囲の分布を調べたが、切欠底における歪範囲は計算値の方がごくわずかに低くなる傾向が認められるものの、分布値に関しては両者は良く一致しているといえる。なお図示は割愛したが、比較的鋭い切欠 ($K_t=5.9$) の場合でも、軸方向応力成分の変化幅に対する試験片幅方向応力成分や剪断応力成分の変化幅はせいぜい 8% 程度であり、したがって局部応力の 2 軸性はごくわずかであるといえる。

さて、切欠底が降伏する場合、切欠底の応力あるいは歪集中の程度を表わすためには普通塑性応力集中係数あるいは塑性歪集中係数と呼ばれる値が用いられる。これらの値は荷重様式や切欠形状のみならず荷重の大きさにも依存し一般的に求めることは容易ではないが、疲労問題にしばしば用いられる近似式として Neuber および Stowell の式がある。これらの式に基づいて切欠底での応力あるいは歪を推定するには、材料の応力-歪関係と K_t (もしくは有効形状係数 K_t')⁵⁾ を知れば十分であり、この簡便さのため非常に魅力的な方法といえる。そこで以下に FEM あるいは実験によって得られた結果と上述の近似式による計算値を比較し、その適用性について検討した。

Neuber の式は次式で表わされるが

$$K_\sigma \cdot K_\epsilon = K_t^2 \quad (4)$$

これを書き直して

$$K_\sigma = K_t(E_N/E_S)^{1/2}, \quad K_\epsilon = K_t(E_S/E_N)^{1/2} \quad (5)$$

同様に Stowell の式は

$$K_\sigma = 1 + (K_t - 1) \frac{E_N}{E_S}, \quad K_\epsilon = (K_t - 1) + \frac{E_S}{E_N} \quad (6)$$

ここに E_S は公称応力 S に関するセカント係数、 E_N は切欠底での応力-歪状態に関するセカント係数である。したがって応力-歪関係を知れば (5) あるいは (6) 式から任意の荷重に対する塑性応力あるいは塑性歪の集中係数 K_σ , K_ϵ を求めることができる。たとえば応力-歪関係を次式で表わせば、

$$\epsilon = \sigma/E + m(\sigma)^{1/n} \quad (7)$$

$S \leq \sigma_Y$ の範囲内では $E_S = E$, また $1/E_N = 1/E + m(\sigma)^{(1-n)/n}$ となるので、(5) および (6) 式より K_σ と S の関係はそれぞれ

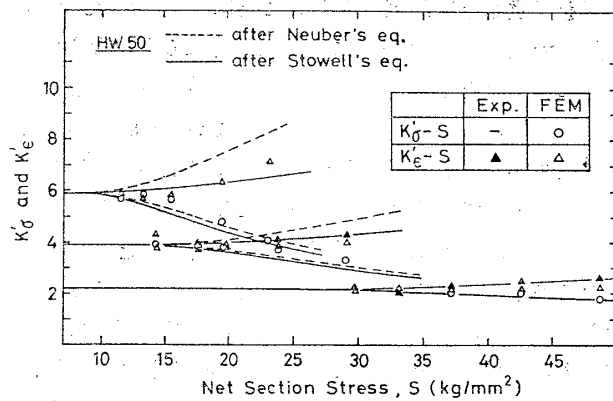
$$S = \{(K_t^2 - K_\sigma^2)/mE(K_\sigma)^{(1+n)/n}\}^{n/(1-n)} \quad (8)$$

および

$$S = \{(K_t - K_\sigma)/mE(K_\sigma)^{(1-n)/n}(K_\sigma - 1)\}^{n/(1-n)} \quad (9)$$

となり、任意の S に対する K_σ を図式的に求めることができる。なお (4)~(6) 式中の K_t の代りに有効形状係数 K_t' を用いるべきであるとする研究¹¹⁾があり、この K_t' は多くの場合疲労限における疲労強度減少係数と同一視されているが、この値は種々の因子の影響をうけ、実験的ばらつきも大きい量であり、この場合研究者の解釈によっては同一の K_t に対して異なった K_t' が定義される可能性がある。たとえば Gowda ら¹²⁾ は $K_t=6.2$ の軟鋼中央切欠平板試験片に対して $K_t'=3.1$ を用いているが、一方 Saal¹²⁾ は St 52 を用いた同様の中央切欠平板試験片 ($K_t=5.5$) に対して $K_t'=5.2$ としている。この差は大きいといわざるを得ない。ただ両者においては材料が異なり、また前者の切欠先端半径 ρ は約 1.0 mm、後者では $\rho=1.5$ mm と寸法も若干異なるが、いずれにせよ K_t を K_t' に換算する際に不確定な要素が含まれる可能性は大きい。一方 K_t の定義は簡明であり、研究者によって著しく異なる値が用いられることはまずないであろう。したがって著者らは K_t' ではなく K_t に基づいて近似式あるいは実験式の適用性を検討する方が実用上有効であると考え、本解析も K_t を用いて行なった。そこで用いるべき応力-歪関係であるが、FEM の計算に際して (1) 式で表示して用いた繰返し応力-歪曲線を、簡単のため (7) 式で近似して用いることにする。すなわち最初の 1/2 サイクルに対しては、むしろ静的な応力-歪関係を用いるべきであろうが、FEM の解析におけると同様に、定常状態での繰返し応力-歪曲線を適用して K_σ , K_ϵ を求め、そしてその後の繰返しに対しては locus curve をレンジ表示した σ_R - ϵ_{tR} 関係を用いて計算される値を動的な塑性応力および塑性歪の集中係数 K_σ' , K_ϵ' とした。

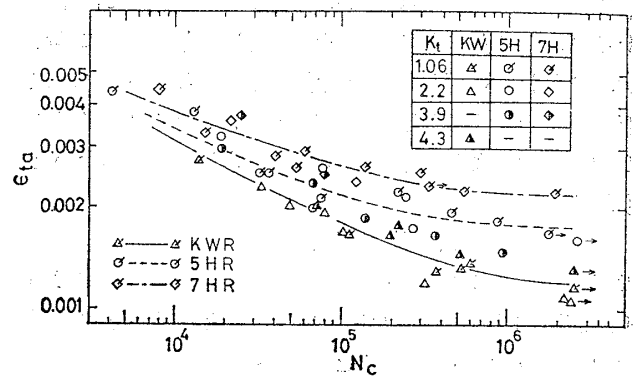
Fig. 9 は 5H 系列の試験片について (5) あるいは (6) 式より求めた K_σ' , K_ϵ' と実験値や FEM による計算値とを比較した図である。 K_σ' について見ると、両近似式による値はほぼ同一であり、また FEM による計算値とも良く一致していることがわかる。ただし FEM に用いた応力-歪曲線と近似式に適用したそれとが弾性限近傍で異なるため、 K_σ' が減少しはじめる S 値は FEM によるものの方が近似式で与えられるものより高くなる傾向が見られる。一方両近似式による K_ϵ' の推定値の間

Fig. 9 K'_σ and K'_ϵ vs. S

には、とくに K'_ϵ が大きな領域でかなりの差があり、Neuber の式による K'_ϵ の方が大きな値となる傾向があるが、実験値あるいは計算値との比較において少なくとも K'_ϵ に関しては、本研究範囲では Stowell の式による推定値の方が良い近似を与えると見られる。なお KW や 7H 系列においても定性的には 5H 系列の場合と同様であり、Stowell の式による K'_ϵ の推定値と実験値との誤差は KW 系列では約 15% 程度、5H あるいは 7H 系列においては 10% 程度の範囲内にあった。また、 K'_σ 、 K'_ϵ に対しても K'_σ 、 K'_ϵ に対するものと同様の結果が得られたが、 K'_ϵ の推定誤差は K'_σ のそれよりも大きくなった。

3.3 切欠疲労特性

切欠底において最も高い応力が負荷される材料要素を考え、この要素は同一の繰返し応力あるいは歪をうける小型平滑試験片と同一寿命で破壊すると仮定する。すなわちこの要素の破壊をもって切欠材の亀裂発生寿命と考える。切欠底の局部応力あるいは局部歪の挙動によって切欠材の N_c が支配されるという仮説は Wetzel¹³⁾、安藤ら¹⁴⁾、西谷ら¹⁵⁾の研究からも妥当な仮定であろう。さて、切欠底材料要素の N_c を支配する破壊基準としては、Topper ら^{12), 13)}により $(\sigma_R \epsilon_{LR} E)^{1/2}$ 、著者ら³⁾によりヒステリシスエネルギーとして $\frac{1-n}{1+n} \sigma_R \epsilon_{PR}$ 、あるいは塑性歪の変化幅 ϵ_{PR} などが採られているが、切欠底における $\sigma_R - \epsilon_{LR}$ 関係が繰返し数や平均歪などに依存せず一義的なものであると仮定する限り、上述の破壊基準に本質的な差異はないと見なすことができる。そこでまず切欠底での ϵ_{LR} と N_c の関係を調べ、切欠疲労強度を支配すると考えられる因子について考察した。なお多軸応力状態を考慮すべき場合には相当応力あるいは相当塑性歪の変化幅などを破壊基準とすることが提案されているが、前述したように FEM の結果によると、本試験片形状および荷重条件下での切欠底要素における応力の 2 軸性はわずかであるので簡単のためこれによる影響は考慮していない。また最初の引張荷重によって切欠底に引張

Fig. 10 ϵ_{ta} vs. N_c

平均歪を生ずるが、数%程度の平均歪が存在することによる影響はほとんどないことが明らかにされている¹⁶⁾ので、この影響も無視し得ると考えた。

さて Fig. 10 は実測した切欠底での歪振幅 ϵ_{ta} と N_c の関係をプロットし、 $R=-1$ での小型平滑材による結果と比較したものである。なお $K_t > 5$ の試験片については ϵ_{ta} を実測できなかったため同図には示されていないが、図に見られるように低寿命領域では、切欠材と平滑材の結果は良く一致しており、切欠強度は切欠底における歪範囲のみによって支配されると仮定し得ようである。一方、高寿命側では、もちろんばらつきはあるが、同一 N_c の下で切欠底での ϵ_{ta} の方が平滑材の ϵ_{ta} より低くなる傾向が認められる。ただ KW 系列の試験片に関しては、この傾向は KWA ($K_t=2.2$) についてのみ認められ、KWB ($K_t=4.3$) では逆に平滑材よりも若干高くなる挙動を呈した。KW 系列におけるこの挙動の相異は K_t が大きい試験片 (KWB, KWC) と鈍切欠 (KWA) あるいは平滑材における亀裂発生位置の相異に関係すると思われる。すなわち KW 系列については、前述したように亀裂が数 mm に成長した段階で試験を中断し亀裂が発生した位置を調べたが、 $K_t > 4$ の場合は切欠による拘束度が高いためか亀裂はボンド部に沿って発生したが、 $K_t=2.2$ の鈍切欠試験片においては主亀裂はボンド部から 2~5mm 程度母材側に入った HAZ に生じる場合がほとんどであった。このように鈍切欠あるいは砂時計型試験片においてほぼ切欠中心にボンド部が位置していたにもかかわらず亀裂が HAZ に生じたことは、ボンド部よりむしろ HAZ の方が亀裂発生強度が低いことを意味する、と考えれば上述の挙動を解釈することができる。したがって KW 系列における $K_t < 3$ と $K_t > 4$ の試験片は厳密には材料特性が異なるグループとして処理すべきであろう。なお $K_t > 4$ の試験片において、亀裂はほぼボンド部に沿って発生したが、その後亀裂が母材側へ湾曲して進展していると見られる試験片もあった。いずれにせよ溶接金属における亀裂の発生あるいは進展は 1 例も認められなかった。

さて切欠材の試験は片振り荷重で行なったので、第1サイクルの負荷により切欠底が降伏しても除荷時に再降伏、すなわち繰返し降伏を生ずるとは限らない。この繰返し降伏を生ずるか否かの判定は、第1サイクル負荷時の塑性変形により初期切欠の形状が著しく変化しないとすれば、

$$Q(\equiv K_t S_R / 2\sigma_Y') > 1 \quad (10)$$

で表わせる。ここに σ_Y' はいわば繰返し降伏応力であり、前出(2.3節)の値を用いて $Q > 1$ となる N_c の上限値を Fig. 5, 6 から求めると、7H 系列では $5 \sim 7 \times 10^4$ 、5H および KW 系列では $7 \sim 15 \times 10^4$ 、 $2 \sim 4 \times 10^5$ となる。換言すればこれらの N_c 以上の寿命域では繰返し降伏を生じないことになる。一方 Fig. 10 において切欠材の切欠底での ϵ_{ta} が同一寿命での平滑材の ϵ_{ta} より低下し始める寿命は材料によって異なり、5H 系列では $N_c \approx 1 \times 10^5$ 、KWA では $N_c \approx 3 \times 10^5$ と見られ、また 7H 系列においては2応力レベルの試験しか行っていないのではっきりしないが $N_c \leq 8 \times 10^4$ 程度であると考えられる。これらの寿命は上述の切欠底要素が繰返し降伏を生ずると考えられる限界寿命にほぼ対応しており、したがって切欠底要素が繰返し降伏する場合には、 N_c は亀裂発生点における歪範囲のみによって支配されることが得ることになる。一方、高寿命域において、平滑材と切欠材の間に ϵ_{ta} の差を生じた力学的因子としては平均応力(応力比)の影響が考えられる。この影響を調べるため、切欠底における局部応力比 $\bar{R} = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ を FEM から求め、これを前述の Q についてプロットして見ると Fig. 11 のようになる。 $Q < 1$ 、すなわち切欠底要素が繰返し降伏しないと考えられる領域では、KW 系列で $-0.4 \sim -0.8$ 、5H 系列で $-0.2 \sim -0.7$ 程度の局部応力比となり、また 7H 系列では $N_c \approx 1 \times 10^5$ で $\bar{R} \approx -0.5$ となっている。したがって切欠底は部分両振り応力状態にあり、両振りの平滑疲労強度との比較の際には平均応力の

影響を考慮しなければならないことになる。ただ FEM の計算では $Q \geq 1$ の場合にも平均応力は 0 とはならず、ゆえに切欠材と平滑材の $\epsilon_{ta} - N_c$ 関係が良い一致を示した低寿命域においても平均応力の影響が現われるべきであったのかも知れない。しかし $Q=1$ のときの \bar{R} は KW, 5H 系列ではそれぞれ約 -0.85 、 -0.75 と両振り状態に近く、これによる影響は無視し得る量となっていたのであろう。さらに平滑材が非対称な塑性歪サイクルを受ける場合、平均応力の緩和現象が生じ繰返しに伴って応力はほぼ両振り状態になることが知られており¹⁶⁾、したがって切欠底要素が歪制御状態にあると仮定できるならば、繰返し開始時に生ずる平均応力は緩和されることになると考えられる。そこで本研究では一応 Fig. 10 の結果を考慮して、切欠底要素が巨視的な意味で塑性歪の繰返しをうけないと考えられる場合にのみ、換言すれば応力制御形式の疲労域でのみ平均応力の影響を考慮すれば十分であると見なした。

平均応力の影響に関しては、Weibull の総説¹⁷⁾にも示されているように種々の実験式が提案されているが、ここでは DIN 15018 に採用されている次式が平滑材および切欠材の切欠底における応力値に対して適用できるものと仮定した。

$$\sigma_{\max}(\bar{R}) = \frac{5}{3-2\bar{R}} \sigma_{\max}(-1) \quad (-1 \leq \bar{R} \leq 0) \quad (11)$$

ここに $\sigma_{\max}(\bar{R})$ 、 $\sigma_{\max}(-1)$ はそれぞれ \bar{R} が \bar{R} および -1 に関する疲労強度である。ところで、上式によると $\sigma_{\max}(0) / \sigma_{\max}(-1)$ は約 1.67 となるが、この値は、寿命域が $1 \times 10^6 \sim 1 \times 10^7$ となる時間強度あるいは疲労限について各種の鋼および溶接継手に関する 175 のデータに基づいて、著者らが行なった整理¹⁸⁾によって得られた 50% 確率値 1.6 にほぼ等しいものである。また八木ら¹⁹⁾は Goodman 線図を直線で近似し、 $N_f = 2 \times 10^6$ に対して $\sigma_R(-1) / \sigma_R(0) = 1.2$ とすることを提案しているが、これは (11) 式とまったく等価なものとなることが導びける。さらに八木ら¹⁹⁾は片振りと両振りの平滑疲労強度の比は寿命に依存し、

$$\sigma_R(-1) / \sigma_R(0) = 2N^{-0.0353} \quad (10^0 \leq N \leq 2 \times 10^6) \quad (12)$$

と表示できることを示したが、本解析で対象とする寿命域での強度比の変化量はわずかであることから、(11)式による評価は妥当なものであると見なし、また簡単のため (11) 式は疲労寿命によらず成立すると仮定した。(11) 式により平均応力の影響を考慮すると Fig. 12 のようになる。同図は 5H および 7H 系列の結果であり、(11) 式による補正は $Q < 1$ となる寿命範囲についてのみ行なった。すなわち切欠底における部分両振り応力を、(11) 式を用いて両振り応力に換算しこれを歪振幅の形で表示したものである。なおこの際実測値がないも

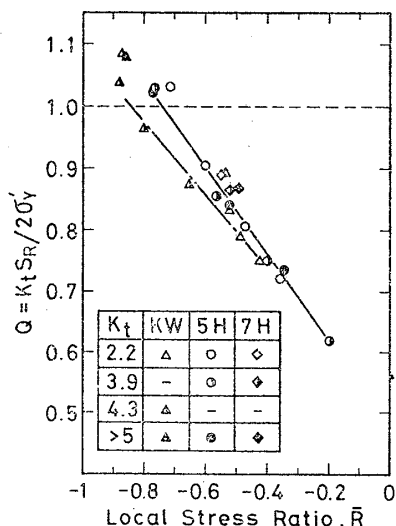
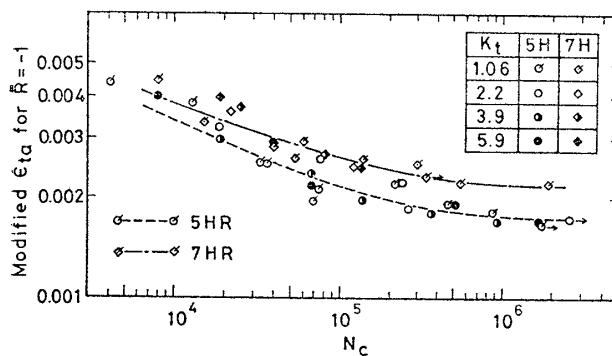


Fig. 11 Stress Ratio at Notch Root

Fig. 12 Modified ϵ_{ta} vs. N_c

のについては FEM による値を用いてある。Fig. 10 と比較して本図では、高寿命域においても切欠材と平滑材の ϵ_{ta} が良く一致しており、したがって切欠底における局部応力振幅および応力比を知ることができれば、この切欠材の寿命は平滑材の疲労強度線図から推定できることになる。

3.4 疲労強度減少係数

高サイクル域における疲労強度減少係数 K_f は通常同一寿命における同一荷重比の平滑材および切欠材の疲労強度（応力範囲） σ_R と S_R の比として、 $K_f = \sigma_R / S_R$ と定義される。本研究においてもこの定義による K_f を用いた。

さて、従来の N_f 基準による疲労強度減少係数 K_F と K_t の関係では、 K_F は K_t の増加に伴って飽和することが知られている。これは、 N_f が初期切欠形状にほとんど依存しない疲労亀裂伝播寿命を含むためであって、 N_c 基準に基づく場合 K_f - K_t 関係はこのような飽和現象を示さないことが著者ら³⁾によって示された。 N_c 基準による高サイクル有限寿命領域での切欠疲労問題に関する研究は Saal²⁾ や Topper らのグループ^{12), 20)}によっても行なわれているが、彼らはいずれも Neuber の式に基づいた次式の妥当性を仮定している。

$$(\sigma_R / S_R) \cdot (\epsilon_{tR} / \epsilon_{tR}) = K_t^2 \quad (13)$$

そして彼らはさらに切欠要素の破壊基準として $(\sigma_R \epsilon_{tR} E)^{1/2}$ を仮定しているの、 $S_R \leq 2\sigma_Y'$ であれば

$$(\sigma_R \epsilon_{tR} E)^{1/2} = K_t S_R \quad (14)$$

と表わすことができる。ただし上式において K_t の代りに K_t' (切欠係数) が用いられているが、いずれにせよ (14) 式は各切欠試験片同士の S - N 曲線が互に平行となることを意味しており、一方、本研究で得られた切欠材の S - N 曲線は互に平行とはならないので、(14) 式は成立しない。なおこれらの研究において K_f についてはほとんど触れられていないが、 K_f は動的な塑性応力集中係数と同一視でき、(7) 式を範囲で表わした繰返し応力-歪曲線

$$\epsilon_{tR} = \sigma_R / E + M(\sigma_R)^{1/n} \quad (15)$$

が平均歪や平均応力に依存しないと仮定できるとすれば

$$K_f = K_t / \{1 + ME(\sigma_R)^{(1-n)/n}\}^{1/2} \quad (16)$$

となる。ここに σ_R は平滑材の疲労強度と見ることができるので、 K_f - K_t 関係は寿命をパラメータとする直線群となる。一方、著者ら³⁾は Stowell の式に基づいて K_f - K_t 関係が次式で表わされる直線となることを導びいた。

$$K_f = 1 + (K_t - 1) / \{1 + ME(\sigma_R)^{(1-n)/n}\} \quad (17)$$

この場合には前報³⁾で示したように各切欠材の S - N 線図の勾配差を説明することができる。なお、すでに述べたように Topper らの研究においては、(14) 式の K_t の代りに K_t' (原論文では K_f) が用いられ、これは材料と試験片形状だけで決まる定数であり疲労寿命には依存しないと仮定できるとされてきたが、最近の研究²¹⁾において彼ら自身が、 K_t' は寿命にも依存することを指摘している。換言すれば、この K_t' は本論文でいう K_f と本質的には同等のものである。

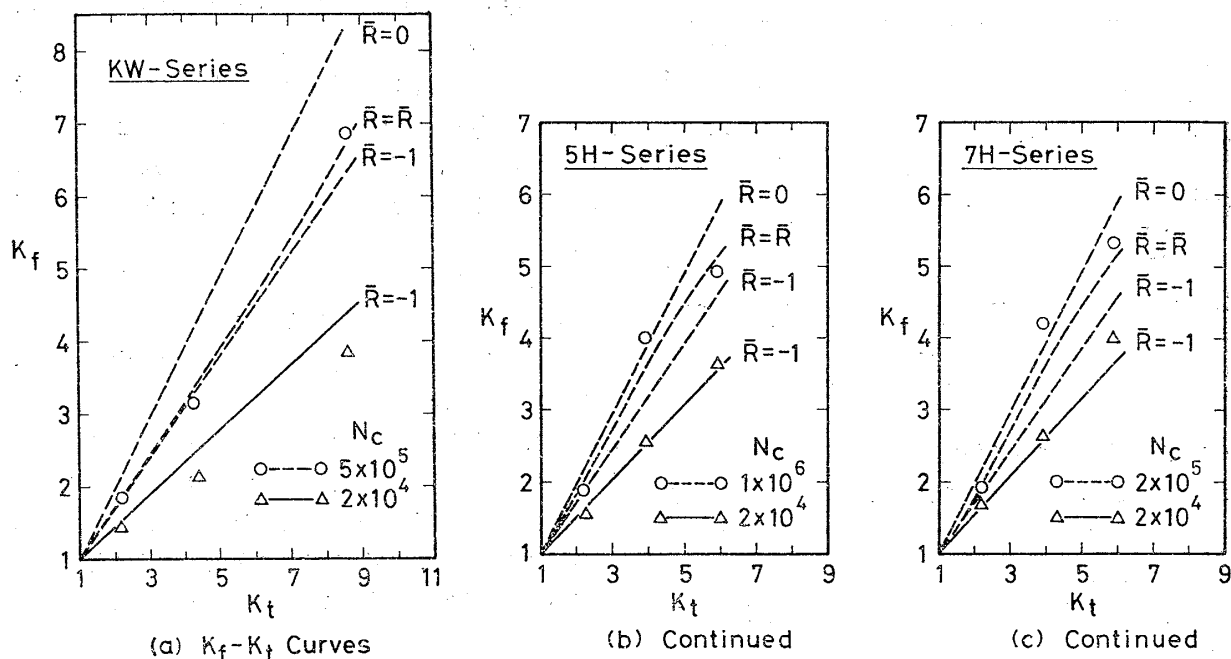
さて (17) 式は破壊基準が応力（あるいは歪）範囲だけで表わし得る場合に適用でき、平均応力の影響は考慮されていない。いま公称応力比 R および \bar{R} の平滑試験片の疲労強度を $\sigma_R(R)$ および $\sigma_R(\bar{R})$ で、また公称応力比が R の切欠試験式の疲労強度を $S_R(R)$ 、このときの切欠底における局部応力比を \bar{R} で表わすと、(17) 式は同一寿命における $\sigma_R(\bar{R})$ と $S_R(R)$ の比を意味することになる。これを $K_f(\bar{R})$ と書くと、(17) 式を導いた概念は本質的には次式で表わされる。

$$K_f(\bar{R}) = \frac{\sigma_R(\bar{R})}{S_R(R)} = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + ME(\sigma_R(\bar{R}))^{(1-n)/n}} \quad (18)$$

したがって、もし $\bar{R} = R$ であれば $K_f(\bar{R})$ は通常の疲労強度減少係数 K_f に一致するが、一般には $\bar{R} \neq R$ であるので $K_f(\bar{R}) \neq K_f$ であり、

$$K_f = \sigma_R(R) / S_R(R) = K_f(\bar{R}) \cdot \{\sigma_R(R) / \sigma_R(\bar{R})\} \quad (19)$$

となる。(18), (19) 式より K_f を評価できるが、そのためには何らかの方法で \bar{R} を $S_R(R)$ の関数として求めておかねばならない。ただ前節の考察によると切欠底要素が繰返し降伏する場合 ($Q \geq 1$) には $\bar{R} = -1$ と見なせるので、(19) 式より容易に K_f を求めることができる。一方 $Q < 1$ の範囲では寿命や切欠形状によって \bar{R} は異なるが、 $\bar{R} > R$ とはならないので、安全側の評価を与えるという意味では $\bar{R} = R$ として K_f を求めれば良いであろう。そこで $\bar{R} = -1$, \bar{R} , 0 として求めた $K_f(-1)$, $K_f(\bar{R})$, $K_f(0)$ を (19) 式に適用して得られる K_f の推定値と実験値の比較を行なった。なお本研究においては、繰返し応力-歪曲線における定数を求め、また切欠底での応力状態が両振りに近い場合の切欠強度との相関を調べるため、平滑材の疲労試験は完全両振りで行なったため、片振りあるいはその他の応力比に関する

Fig. 13 K_f - K_t Curves

平滑強度は得ていないので、(19) 式における $\sigma_R(R)$, $\sigma_R(\bar{R})$ は (11) 式を用いて評価した。

Fig. 13 は $\bar{R} = -1$, \bar{R} , 0 として求めた K_f の推定値と実験値を比較したものである。いずれの場合も低、高寿命域での 2 つの寿命に関する K_f - K_t 関係を求めているが、前述の理由から低寿命域 ($N_c = 2 \times 10^4$) では $\bar{R} = -1$ とした場合のみ示した。低寿命域について見ると、KW 系列 ((a) 図) では前節に述べた亀裂発生位置の相異による影響のため K_t が大きい領域で推定値の方が 15% 程度大きくなっているが、いずれの場合も $K_f(-1)$ に基づいて K_f を十分評価できると考える。一方、高寿命域に関しては、切欠底における局部応力比を考慮した $K_f(\bar{R})$ に基づく K_f - K_t 曲線を求めれば、妥当な推定値を得ることができる。この曲線は $\bar{R} = 0$ および -1 として求めた 2 つの K_f の間にあるが、KW 系列では $\bar{R} = -1$ の K_f に近く、5H および 7H 系列においては逆に $\bar{R} = 0$ として得られた K_f に近い値となっている。したがって \bar{R} が不明の場合には、高張力鋼については $\bar{R} = 0$ 、軟鋼では $\bar{R} = -1$ として得られる K_f を推定値として用いれば約 20% 程度の誤差範囲内で評価できそうである。

なお HW 50 や HW 70 の高寿命域では $K_f \approx K_t$ となっており、これらの材料の切欠感度はかなり高いことがわかる。また KW 系列のような溶接継手材の場合、平均応力という意味からは溶接残留応力の影響を考えなければならないであろうが、平滑材および切欠材に同一の残留応力 (平均応力) が存在すれば、これが双方の疲労強度に及ぼす影響も同程度のものであると考えられるので、両者の相対的な強度差には影響しないであろう。

4 結 論

KDK 鋼エレクトロガス溶接継手、HW 50 および HW 70 鋼母材の砂時計型試験片の荷重制御両振り疲労試験および各 3 条件の切欠平板試験片の荷重制御片振り疲労試験を実施し、そして切欠底における応力、歪挙動の解析を行ない次のような結論が得られた。

1. KDK 鋼エレクトロガス溶接継手の疲労強度減少係数 K_f は肉眼亀裂発生寿命 $N_c = 5 \times 10^5$ で弾性応力集中係数 K_t の 80% 程度であり、一方 HW 50 および HW 70 母材はそれぞれ $N_c = 1 \times 10^6$, 2×10^5 で $K_f \approx K_t$ となった。

2. 切欠材の疲労強度が切欠底における応力範囲のみによって支配されると考えられる場合、すなわち切欠底要素が繰返し降伏する寿命域では K_f - K_t 曲線は、応力比 $R = -1$ の平滑疲労強度に基づいて (19) 式により評価できる。それ以上の寿命域での K_f は切欠底における局部応力比 \bar{R} の影響を考慮して評価した方がよい。しかし簡便法として、高寿命域での K_f を $\bar{R} = 0$ とし求めれば少なくとも安全側の予測値を与える。

3. 平面応力問題とした FEM による弾塑性解析の結果は少なくとも歪の変化幅に関する限り実測値と良く一致した。またこれから求まる塑性応力および塑性歪の集中係数と、 K_t を用いて表わした Neuber や Stowell の近似式から求まる値を比較すると、概して Stowell の式による方がよい近似を与え少なくとも繰返し応力と歪の集中係数は Stowell の式で十分評価できる。

4. 実測した切欠底の局部歪振幅 ϵ_{ta} と $R = -1$ の平滑材の全歪振幅 $\epsilon_{ta}-N_c$ 曲線とを比較した結果、低寿

命域で両者は良く一致したが、高寿命域では切欠材の ϵ_{ta} の方が低くなる傾向が見られた。高寿命域でのこの差は平均応力の影響を考慮することによって評価できる。

5. KDK 鋼エレクトロガス溶接継手の平滑試験片では、疲労亀裂は HAZ から発生したが、母材と差違のない疲労強度を示した。

謝 辞

本研究の一部は(社)日本造船研究協会 SR 153 委員会の研究の一部として行なわれたものであり、金沢武委員長をはじめ各委員の方々に有益な助言を賜った。また本研究の供試材は川崎製鉄(株)および新日本製鉄(株)より提供され、溶接継手材の溶接は神戸製鋼(株)溶接棒事業部で行なわれた。さらに弾塑性応力解析に関しては東京大学大学院石川邦照、乾泰司両氏の助言をうけ、また疲労試験その他について東京大学船舶工学科永井英晴技官の助力をいただいた。ここにこれらの御好意に厚く謝意を表するしだいである。

参 考 文 献

- 1) 大内田久, 安藤司文: 低合金鋼の切欠およびき裂材の静的強度と低サイクル疲労強度, 材料, 第18巻, 第192号 (1969).
- 2) H. Saal: Der Einfluß von Formzahl und Spannungsverhältnis auf die Zeit- und Dauerfestigkeiten und Rißfortschreitungen bei Flachstäben aus St 52, Veröffentlichungen des Institutes für Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt, Heft 17 (1971).
- 3) 飯田國廣, 高 允宝: ヒステリシスエネルギーに基づいた疲労強度減少係数の一考察, 日本造船学会論文集, 第134号 (1973).
- 4) WES-162-1970: 溶接構造用金属材料に対するひずみ制御方式による低サイクル疲れ試験方法, 日本溶接協会.
- 5) H. Neuber 著, 磯辺茂夫訳: 切欠応力論, コロナ社.
- 6) 石田 誠: だ円孔を有する帯板の引張 (第1報), 日本機械学会論文集, Vol. 21, No. 107 (1955).
- 7) 山田嘉昭: 塑性, 粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館.

- 8) R. T. Shield and H. Ziegler: On Prager's Hardening Rule, ZAMP, Vol. IXa (1958).
- 9) 飯田國廣, 松本善朗, 永井英晴: 撓み制御平面曲げおよび径歪制御軸力による低サイクル疲労強度の比について, 日本造船学会論文集, 第137号 (1975).
- 10) たとえば, 渡辺正紀, 松野 博: 鋼の低サイクル疲労特性ならびに寿命推定則に関する研究, 日本造船学会論文集, 第131号 (1972).
- 11) たとえば, S. S. Manson and M. H. Hirschberg: Crack Initiation and Propagation in Notched Fatigue Specimen, NACA, TMX-52126 (1965).
- 12) C. V. B. Gowda, T. H. Topper and B. N. Leis: Crack Initiation and Propagation in Notched Plates Subjected to Cyclic Inelastic Strains, Proc. Intern. Conf. on Mechanical Behavior of Materials, Vol. II (1972).
- 13) R. M. Wetzel: Smooth Specimen Simulation of Fatigue Behavior of Notches, J. of Materials, Vol. 3, No. 3 (1968).
- 14) 安藤良夫, 飯田國廣, 征矢勇夫: 低サイクル疲労亀裂の発生, 伝播と歪の繰返し挙動, 日本造船学会論文集, 第128号 (1970).
- 15) 西谷弘信, 鹿毛正治: 切欠材の低サイクル疲れにおけるひずみ集中, 日本機械学会論文集, Vol. 41 No. 344 (1975).
- 16) たとえば, 飯田國廣, 井上 肇, 小林佑規, 宮本武: 歪制御低サイクル疲労における平均歪の影響, 日本造船学会論文集, 第127号 (1970).
- 17) W. Weibull: Fatigue Testing and Analysis of Results, Pergamon Press (1961).
- 18) 飯田國廣, 高 允宝: 片振りと両振り強度の比について, 未発表 (1971).
- 19) 八木順吉, 富田康光: 鋼材の低サイクル疲労に関する研究 (第4報), 日本造船学会論文集, 第138号 (1975).
- 20) T. H. Topper, R. M. Wetzel and JoDean Morrow: Neuber's Rule Applied to Fatigue of Notch Factors, J. of Materials, Vol. 4, No. 1 (1969).
- 21) たとえば, B. N. Leis, C. V. B. Gowda and T. H. Topper: Cyclic Inelastic Deformation and the Fatigue Notch Factor, ASTM, STP 519 (1973).