

(昭和 52 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

幅広平板の圧壊強度の研究

正員 大坪 英 臣* 正員 山 本 善 之*

正員 李 雅 栄**

Ultimate Compressive Strength of Wide Rectangular Plates

by Hideomi Ohtsubo, *Member* Yoshiyuki Yamamoto, *Member*
Ya-Jung Lee, *Member*

Summary

It is reported that several cargo ships have suffered from buckling failures of deck or bottom plates stiffened transversely. The ultimate compressive strength of rectangular plates is studied by analyzing a simplified model which clarifies the effects of yielding on the strength.

Approximate formulas for prediction of the buckling strength are proposed in terms of the aspect ratio and the ratios of yield stress to elastic buckling stress and initial deflection to thickness. The accuracy of the formulas is verified by the detailed analysis using the combined technique of the finite-element and energy methods.

1 はじめに

船体は薄板によって構成されているので、構造設計上の重要事項の一つは薄板局部構造の最終強度を明確に把握することである。本報においては、周辺支持の長方形板の最終挙動について報告する。すでに長方形板に関しては、弾性座屈・座屈後問題・塑性座屈の各問題に対し、多くの研究がなされている。最近では有限要素法を用いて、大たわみ問題と塑性域の進展を追跡することによって、詳細な解析がなされている¹⁾。したがって個々の問題に対しては十分な知見が得られていると考えてもよいが、長方形板の最終強度を決定するパラメータ、板の縦横比、降伏応力と弾性座屈応力の比、また初期たわみ量の影響についての統一的な理解はいまだ不十分と思われる。最終強度に対する略算法としての代表例は、凹側表面の中央が降伏するときの荷重²⁾、あるいは荷重方向と平行な辺の応力が降伏応力に達したときの荷重を最終強度の目安とする方法³⁾があり、実験と比較することにより、低目の近似値として使えることが示されている。しかしながら、それらの真の最終強度との関連はどのようになるのか、の明確な説明は得られていない。その他、塑性関節線を仮定した略算法⁴⁾も提案されているが、適用できる構造物に限界があるようである。

ここでは、一軸圧縮を受ける長方形板の最終強度に対

するパラメータの影響をある程度明らかにすることを目的とした。長方形板の弾塑性大たわみの詳細解析を最初に実施し、代表的な長方形板の塑性域進展等の挙動を調べ、これに基づいていくつかの仮定を導入して、解析モデルを作り、各パラメータの影響を検討する。

最近、工作上および船倉空間を大きく取れる利点により、一部横肋骨形式とする貨物船があり、これらに座屈損傷例が報告⁵⁾されているので、とくに横幅の広い長方形板の最終強度について検討する。

記号表

a, b : 長方形板の長さと幅。

t : 板厚。

E, ν, σ_Y : ヤング率, ポアソン比, 降伏応力。

p : x 方向の平均圧縮応力。

$p_E = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2$: 弾性座屈応力。

p_u : 最高平均応力。

$p_0 = \frac{\pi^2 E}{8} \left(\frac{t}{a}\right)^2$

$p_1 = \frac{\pi^2 E}{16} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{a^4}{b^4}\right)$

$p_2 = \frac{\pi^2 E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left(1 + \nu \frac{a^2}{b^2}\right)$

$p_3 = \frac{\pi^2 E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \nu\right)$

$p_4 = \frac{\pi^2 E}{2(1+\nu)} \frac{t^2}{ab}$

* 東京大学工学部

** 東京大学大学院

f, f_0 : 板の中央におけるたわみと初期たわみ。

$$\phi = f/t$$

$$\phi_0 = f_0/t$$

$\eta_0 t$: 板の中央における塑性域の厚さ。

βb : 荷重方向に平行な a 辺に沿っての塑性域の幅。

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: 応力, 通常と逆方向を正と定義する。

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$: ひずみ, 同上。

$$p^e = p_E \frac{\phi}{\phi + \phi_0} + p_1 (\phi^2 + 2\phi\phi_0)$$

2 圧縮座屈問題

薄板構造の代表的なものが, Fig.1 に示されるような縦横の防撓材で支持される平板である。ここでは, この防撓板を一軸圧縮した場合の最終強度について検討する。この構造の変形様式は, Fig.2 あるいは Fig.3 に示されたいずれかであると考えられる。Fig.2 の場合は, 横肋骨方式において初期たわみが小さいとか不同性がある場合で, 隣り合うパネルが反対方向にたわむ場合に見られる^{6), 7)}。また縦肋骨方式の長いパネルに数半波の座屈波形ができるときも, 半波をとって考えるとこれに対

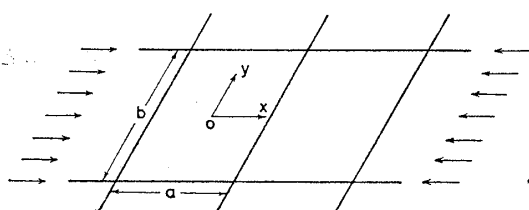


Fig.1 Stiffened Plate under Compression



Fig.2 Plate Subjected to Compressive Force

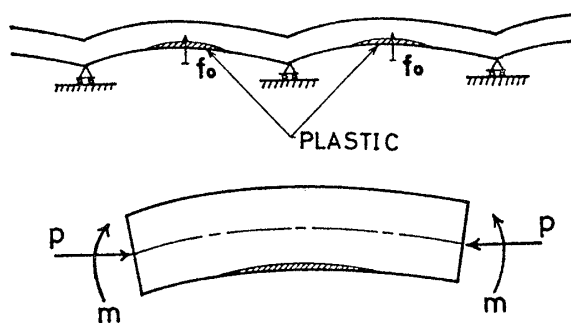


Fig.3 Plate Subjected to Compressive Force and Moment

応する。Fig.3 の場合はやせ馬現象に見られるような同じ方向の大きな初期たわみ, または水圧による変形がある場合で, 隣り合うパネルのたわみが同じ方向に生じる。Fig.2 と Fig.3 においては各パネル間に作用する内力が異なる。Fig.2 の場合には変形の反対称性により内力は中央面上に作用する軸圧縮力のみである。Fig.3 においては圧縮力以外に耐力を増加させる方向にモーメントが作用する。このモーメントは圧縮力あるいは水圧によって生じるが, 降伏条件を考えると, 圧縮力が大きくなるほど, 小さなモーメントでパネル固定端は降伏関節を形成する。また降伏関節になった後も, 圧縮力の増加につれて, 関節の保持するモーメントは小さくなる。圧縮耐力が降伏荷重に近いときは, このモーメントは零と考えてよく, パネル間は単純支持と考えてよい。つまり Fig.2 の場合とほぼ同じ耐力を有する。圧縮耐力が小さいときは, このモーメントは無視できず, このモーメントの存在によって耐力は Fig.2 の場合よりも高い値を示すことになる。単独の長方形板の圧縮実験では, 荷重は Fig.3 の場合に近く, 高めの耐力を与える可能性があり, この耐力値で Fig.2 の耐力を推定すると不安全側となるときもあろう。

3 弾塑性大たわみ詳細解析

次章において長方形板の圧縮挙動についてモデル化を行なうが, このモデル化を適切にするために, 厳密な挙動を知っておく必要がある。平板の弾塑性大たわみ問題に対する解析法としては, 有限要素法, 有限帯板法等が挙げられるが, ここでは著者の1人が報告した平面応力場有限要素法とエネルギー法を併用した方法⁸⁾によって詳細解析を行なう。以前の報告における方法は修正され, 精度向上が計られているが, 主な点を列挙すると,

1. 前荷重ステップの不均衡力の修正
2. 応力増分, ひずみ増分は Gauss の積分点で求めている。
3. 平面応力場の有限要素法を定ひずみ三角形要素の代りに, 4つの定ひずみ要素を組み合わせた四辺形要素を用いている。

ここでは, これ以上解法に触れずに結果のみを示すことにする。

解析される板は, Fig.4 に示される周辺単純支持の長方形板であり, $b/a=1, 2, 3$ と形状を変えて計算を実行した。境界条件は同図に示されるように各辺の面内変位は一樣に保ったまま, b 辺にのみ x 方向の圧縮荷重を作用させ, a 辺には荷重は加わらないとする。計算において, b 辺に強制面内変位を与え, 圧縮荷重 pbt は, b 辺上の応力を積分することによって求めた。ここで用いた解析法では, 横たわみ w を関数展開するが, この解析法

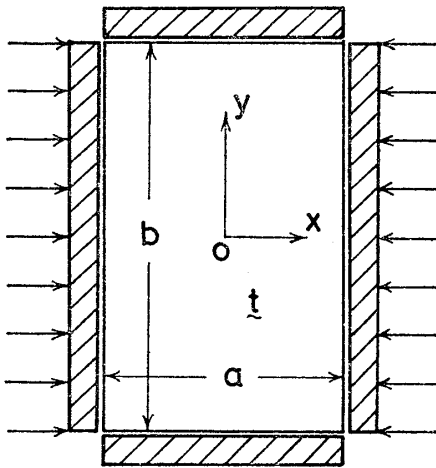


Fig. 4 Simply Supported Rectangular Plate Subjected to Uni-Axial Compression

の精度を知る目的で、 $b/a=1$ の板に対し、たわみと初期たわみを次の 1 項近似を用いた。

$$w = f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b},$$

$$w_0 = f_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \quad (1)$$

Fig. 5 に $p_E/\sigma_Y=0.304$ の場合の平均圧縮応力 $\bar{p}$ と中央点のたわみ f との結果を示し、弾性解析解（次章(3)式）と比べた。弾性範囲では、完全に解析解と一致していることがわかる。なお塑性域の進展を Fig. 6 に示す。 $b/a=1$ の場合、長方形の隅の両表面から曲げ変形によって降伏し始め、たわみが増すと凹側表面の中央からも塑性域が薄く進展して、隅部からの塑性域と合流していくことがわかる。また、最高荷重近傍においては、 a 辺は板厚方向にも塑性域が進展していることがわかる。

以上の例によって、解析法の精度が確かめられたので、

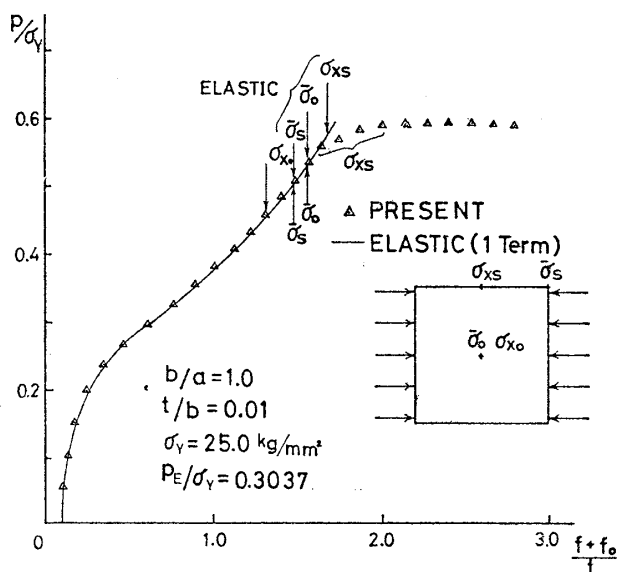


Fig. 5 Mean Stress vs. Maximum Deflection ($b/a=1$, 1 term approximation)

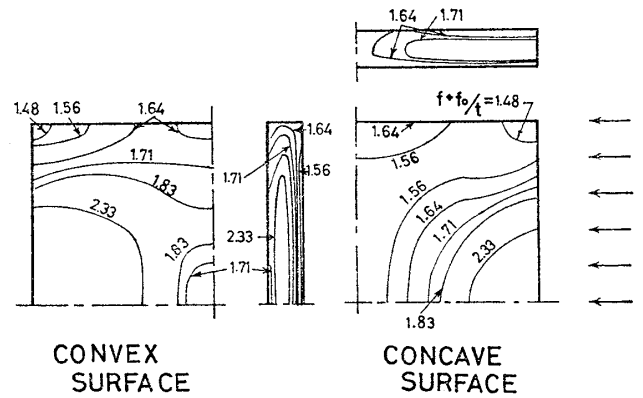


Fig. 6 Plastic Front Lines ($b/a=1$, $p_E/\sigma_Y=0.304$, 1 term approximation)

以下のすべての解析においては、たわみは次の 4 項で近似する。

$$w = \alpha_1 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \alpha_2 \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \alpha_3 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + \alpha_4 \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} \quad (2)$$

ただし $f = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

初期たわみは (1) 式を用いる。

Fig. 7 と Fig. 8 に $p_E/\sigma_Y=0.304$, $b/a=1$ の 4 項近似計算結果を示し、1 項近似と比較すると、 $p-f$ 関係に関しては殆んど差はないが、応力分布が多少異なるため、塑性域の進展は若干の違いが見られる。凹側表面は、中央点よりずれた点から降伏している。しかし、板厚方向は薄く進み、また同時に a 辺に沿っては板厚全体に広がることは同じである。

Fig. 9~Fig. 12 に $b/a=2$, $p_E/\sigma_Y=0.475$, および $b/a=3$, $p_E/\sigma_Y=0.844$ の解析結果を示す。 b/a が大きくな

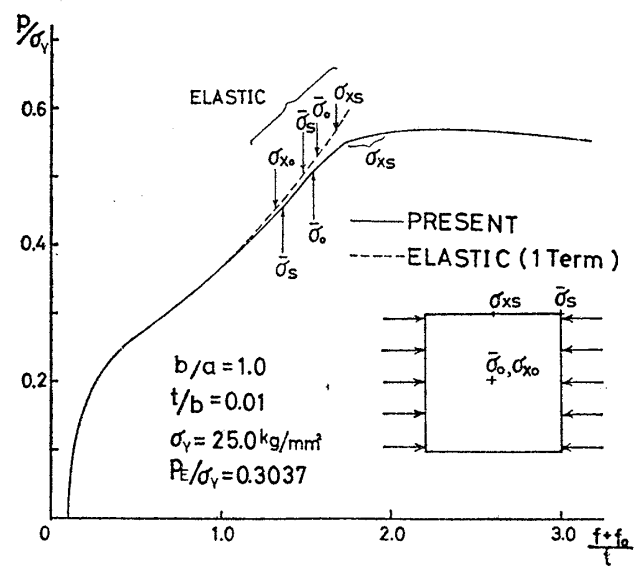


Fig. 7 Mean Stress vs. Maximum Deflection ($b/a=1$, 4 term approximation)

ると、 $b/a=1$ の場合と異なり、凹側表面の中央から塑性域が発生し、凹側表面に薄く、長手方向に比べて横方向に広く進展する。また板厚方向にも降伏が進む。 $b/a=2$ で

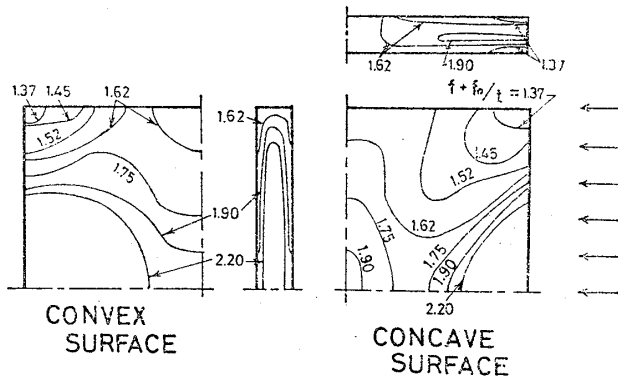


Fig. 8 Plastic Front Lines ($b/a=1$, $p_E/\sigma_Y=0.304$, 4 term approximation)

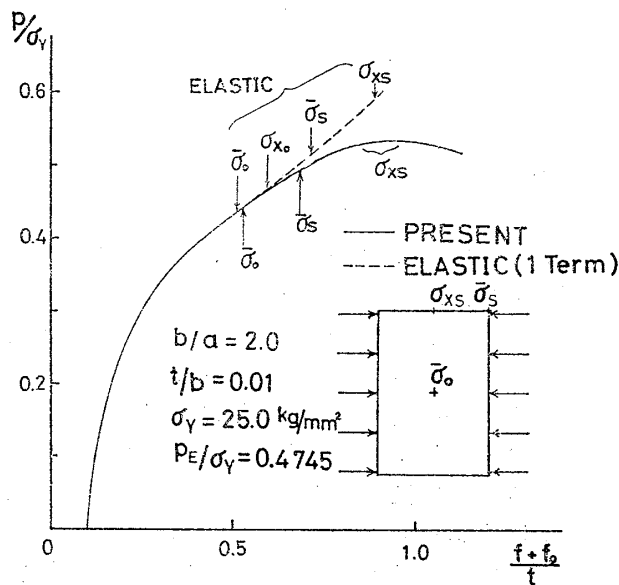


Fig. 9 Mean Stress vs. Maximum Deflection ($b/a=2$)

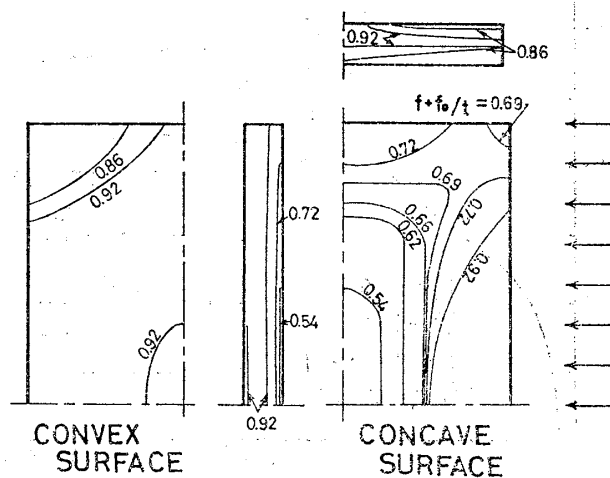


Fig. 10 Plastic Front Lines ($b/a=2$, $p_E/\sigma_Y=0.4745$)

圧縮表面の半分ほど、 $b/a=3$ で $2/3$ ほど塑性域が広がってから、隅部の両表面が降伏し、凹側表面では中央からの塑性域と一体化する。ほぼこの時点で最高荷重に達する。正方形板 ($b/a=1$) の場合と $b/a \geq 2$ の長方形板の塑性域の広がる傾向は異なっている。これを $\sigma_Y/p_E, f_0/t$ によってどのように異なるかの概要を知るには弾性解をもとに調べるのが有効であり、これを付録に示している。 $b/a=1$ の場合について Fig. A-2 によって調べると、 p_E/σ_Y が大きいときは凹側中央の相当応力 $\bar{\sigma}_0$ が降伏応力に達し ($\bar{\sigma}_0=\sigma_Y$)、その後隅部が曲げにより降伏し

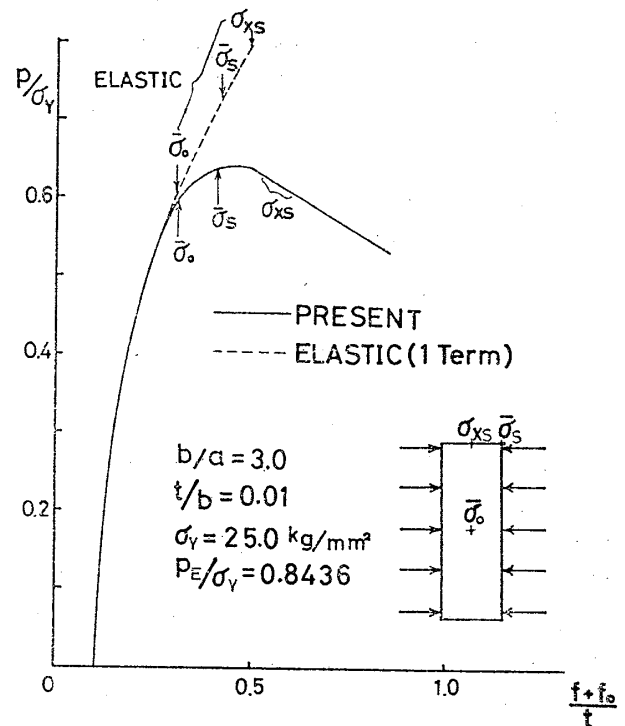


Fig. 11 Mean Stress vs. Maximum Deflection ($b/a=3$)

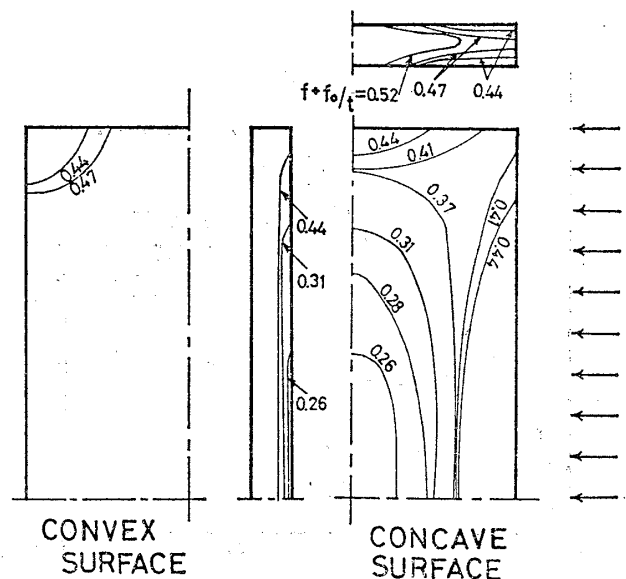


Fig. 12 Plastic Front Lines ($b/a=3$, $p_E/\sigma_Y=0.8436$)

($\bar{\sigma}_s = \sigma_Y$), その後変形が大分進んでから a 辺に沿って降伏する ($\sigma_{xs} = \sigma_Y$) ことが Fig. A-1 よりわかる。 p_E/σ_Y が $1/2 \sim 1/3$ と小さくなると, 隅が曲げにより降伏し ($\bar{\sigma}_s = \sigma_Y$), その後に凹側中央の降伏 ($\bar{\sigma}_0 = \sigma_Y$) となっている。

Fig. 9~Fig. 12 には, これらの結果を詳細計算結果と比較している。 $b/a \geq 2$ の場合は f_0/t が 0.5 程度より小さいならば, 凹側中央から降伏が始まると考えてよい。また $b/a \geq 2$ のとき, 相当応力においては σ_x が支配的となるので, σ_x で降伏の判定を行なっても, 大きな誤差とならない。

Fig. 7, Fig. 9, Fig. 11 からわかるように, b/a が 1 より大きくなるほど, 最初の塑性化が始まってからの余剰強度が小さくなる。

4 弾塑性大たわみ簡略解析

長方形板の最高耐力を b/a , 弾性座屈値と降伏応力の比 p_E/σ_Y , 初期たわみ f_0/t をパラメータとして推定するために, ここでは解析モデルを作り, その挙動を追うことにする。前述の詳細な計算によって塑性域の進展は, $b/a \geq 2$ の場合 2 つの形が組み合わさっていることがわかった。つまり凹側表面の中央から表面に沿って広がる塑性域と, 荷重方向に平行な a 辺に沿って板厚方向にはば貫通するように広がる塑性域である。ただし, p_E/σ_Y が小さいとき, 前述のように, 上の仮定と多少異なり, 隅部より両表面に薄く広がる塑性域と凸側表面の塑性域があるが, ここでは, これを無視して, Fig. 13 のような塑性域を仮定する。つまり板厚方向に一樣な厚さ ηt , また a 辺からはおのおの $\beta(b/2)$ の塑性域を仮定する。

平板のたわみは (1) 式のように 1 項近似する。このとき弾性状態における平均圧縮応力 p^e と最大たわみ f との関係は次式のように求められる^{4), 9), 10)}。

$$\frac{p^e}{p_E} = \frac{\phi}{\phi + \phi_0} + \frac{p_1}{p_E} (\phi^2 + 2\phi\phi_0) \quad (3)$$

ここで $\phi = f/t$, $\phi_0 = f_0/t$ であり, p_E は弾性座屈値であり,

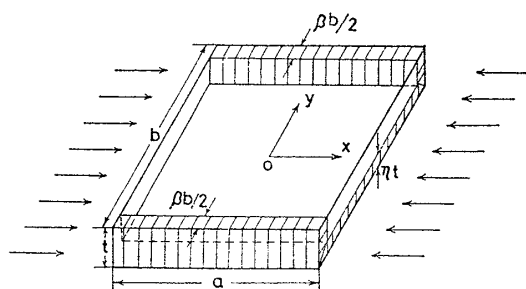


Fig. 13 Assumed Yielding Pattern

$$p_E = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right),$$

$$\text{また } p_1 = \frac{\pi^2 E}{16} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{a^4}{b^4} \right).$$

なお, 中央面における応力分布は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= p^e - p_0 (\phi^2 + 2\phi\phi_0) \cos \frac{2\pi y}{b}, \\ \bar{\sigma}_y &= -p_0 \frac{a^2}{b^2} (\phi^2 + 2\phi\phi_0) \cos \frac{2\pi x}{a}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{ここで } p_0 = \frac{\pi^2 E}{8} \left(\frac{t}{a} \right)^2$$

(4) 式および以下の記述においては, 応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ とひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ は通常と逆符号にとり, 直応力と直ひずみに関しては圧縮を正とする。

ひずみと変位の関係は次のようになる。

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \quad = \bar{\varepsilon}_x + \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y = -\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \quad = \bar{\varepsilon}_y + \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\ \quad \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \bar{\gamma}_{xy} + 2\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases} \quad (5)$$

ここで, $\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}$ は中央面のひずみである。

応力とひずみの関係式は弾性領域では,

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y), \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}. \end{cases} \quad (6)$$

4.1 板厚方向の塑性化の影響

最初に板厚方向に凹側表面に, 一樣な厚さ ηt の塑性域が存在する場合について考えてみる。

塑性域の応力分布は次のように仮定する。

$$\sigma_x = \sigma_Y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (7)$$

このとき, 平均応力は近似的に次式のように与えられる。

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_x = \frac{1}{t} \int_{\eta t - (t/2)}^{t/2} \sigma_x d\zeta + \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{\eta t - (t/2)} \sigma_Y d\zeta \\ \quad = \frac{E(1-\eta)}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu\bar{\varepsilon}_y) + \eta\sigma_Y - \frac{\eta}{2} (1-\eta) p_2 \frac{4}{\pi^2} \phi \\ \bar{\sigma}_y = \frac{1}{t} \int_{\eta t - (t/2)}^{t/2} \sigma_y d\zeta = \frac{E(1-\eta)}{1-\nu^2} (\nu\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y) \\ \quad - \frac{\eta}{2} (1-\eta) p_3 \frac{4}{\pi^2} \phi \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{t} \int_{\eta t - (t/2)}^{t/2} \tau_{xy} d\zeta = \frac{E(1-\eta)}{2(1+\nu)} \bar{\tau}_{xy} \\ &+ \eta(1-\eta) p_4 \frac{4}{\pi^2} \phi \end{aligned} \right. \quad (8)$$

ここで

$$p_2 = \frac{\pi^2 E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \left(1 + \nu \frac{a^2}{b^2} \right), \quad p_3 = \frac{\pi^2 E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \nu \right),$$

$$p_4 = \frac{\pi^2 E}{2(1+\nu)} \frac{t^2}{ab}$$

(7) 式の仮定は、降伏直後では σ_y, τ_{xy} は弾性応力状態に近いと考えられるので妥当とはいえないが、変形が進行すると (7) 式の状態に近づくものと考えられる。したがって (8) 式における σ_y, τ_{xy} の係数 $(1-\eta)$ も最初はほぼ1であり、後に $(1-\eta)$ に近づくと思われる。このように応力が表現できるとき、弾性の場合の (4) 式を求めたのと同様に、Airy の応力関数を用いて適合条件を満すことにより、応力分布は次のように得られる。つまり

$$\left\{ \begin{aligned} -\bar{\sigma}_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ -\bar{\sigma}_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} e_x &= -\frac{1}{a} \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{p-\eta\sigma_y}{E(1-\eta)} + \frac{p_0}{E} (\phi^2 + 2\phi\phi_0) + \frac{\eta}{2} \frac{p_0}{E} \frac{32}{\pi^2} \phi \\ e_y &= -\frac{1}{b} \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{-\nu(p-\eta\sigma_y)}{E(1-\eta)} + \frac{p_0}{E} \left(\frac{a}{b} \right)^2 (\phi^2 + 2\phi\phi_0) + \frac{\eta}{2} \frac{p_0}{E} \frac{32}{\pi^2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \phi \end{aligned} \right. \quad (13)$$

弾性範囲の応力は、(6), (8), (12), (13) 式より、 e_x, e_y, ϕ で表現すると、

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= Ee_x - p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \frac{\eta}{2} \nu p_3 \frac{4}{\pi^2} \phi - \frac{\zeta}{t} \phi p_2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ \sigma_y &= -p_0 \left(\frac{a}{b} \right)^2 (\phi^2 + 2\phi\phi_0) \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{\eta}{2} p_3 \frac{4}{\pi^2} \phi - \frac{\zeta}{t} \phi p_3 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ \tau_{xy} &= \frac{2\zeta}{t} \phi p_4 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

また、ひずみ変分も $\delta e_x, \delta e_y, \delta \phi$ で表現すると、(8), (12), (13) 式より、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta e_x - \frac{2p_0}{E} (\phi + \phi_0) \delta \phi \left\{ \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - \nu \frac{a^2}{b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \right\} - \frac{\zeta}{t} \frac{8p_0}{E} \delta \phi \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ \delta \varepsilon_y &= \delta e_y - \frac{2p_0}{E} (\phi + \phi_0) \delta \phi \left\{ \frac{a^2}{b^2} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) - \nu \cos \frac{2\pi y}{b} \right\} - \frac{\zeta}{t} \frac{8p_0}{E} \frac{a^2}{b^2} \delta \phi \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ \delta \gamma_{xy} &= \frac{\zeta}{t} \delta \phi \frac{16p_0}{E} \frac{a}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right. \quad (15)$$

仮想仕事の原理を考える。

$$\delta II = \delta U - \delta W = 0 \quad (16)$$

ここで、

$$\delta U = \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \quad (17)$$

また、外力項 δW は、荷重が中央面に作用するとき

$$\delta W = \int_{-b/2}^{b/2} p t a \delta e_x dy \quad (18)$$

(16) 式における δe_x の係数より、

とおき、(5) 式と (8) 式より u と v を消去すると

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E(1-\eta) \times \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] \quad (10)$$

板の周辺は直線に保たれ、また周辺で $\int \bar{\sigma}_y dx = 0$, $\bar{\tau}_{xy} = 0$ であることを考えて、(10) 式を積分すると

$$F = -\frac{1}{2} p y^2 - \frac{E(1-\eta) t^2 (\phi^2 + 2\phi\phi_0)}{32} \times \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \quad (11)$$

を得られる。したがって平均応力は、次のように得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= p - p_0(1-\eta)(\phi^2 + 2\phi\phi_0) \cos \frac{2\pi y}{b} \\ \bar{\sigma}_y &= -p_0 \left(\frac{a}{b} \right)^2 (1-\eta)(\phi^2 + 2\phi\phi_0) \cos \frac{2\pi x}{a} \\ \bar{\tau}_{xy} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

次に、仮想仕事の原理を用いるために、応力とひずみを板の平均縮み e_x, e_y とたわみ ϕ で表現することを考える。平均縮み e_x, e_y は、(5), (8), (12) 式を用いて

$$p = (1-\eta)[Ee_x - p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0)] + \eta\sigma_Y - \frac{\eta}{2}(1-\eta)\frac{32p_0}{\pi^2}\phi \quad (19)$$

上式は (13) 式と一致している。また $\delta\phi$ の係数より次式が得られる。

$$p \left\{ 1 + \frac{\eta}{2} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{\phi + \phi_0} \right\} = (1-\eta)p_1(\phi^2 + 2\phi\phi_0) + \left[\frac{1}{2} - 4\left(\eta - \frac{1}{2}\right)^3 \right] p_E \frac{\phi}{\phi + \phi_0} + \frac{\eta}{2}(1-\eta)\frac{16}{\pi^2} \left(2p_1\phi + \frac{4}{3}p_1 \frac{\phi\phi_0}{\phi + \phi_0} + \frac{1}{\phi + \phi_0} \frac{\sigma_Y}{1-\eta} - \frac{\eta}{2} \frac{32}{\pi^2} p_0 \frac{\phi}{\phi + \phi_0} \right) \quad (20)$$

なお, Fig. 3 におけるように, $x = \pm \frac{a}{2}$ でモーメント m が作用するときの外力の仮想仕事項は次のようになる。

$$\delta W = \int_{-b/2}^{b/2} p t a \delta e_x dy + 2 \int_{-b/2}^{b/2} m \frac{\partial \delta w}{\partial x} \left(\frac{a}{2} \right) dy \quad (18-1)$$

すでに水圧等によって, $x = \pm \frac{a}{2}$ は塑性関節が生じているならば, 降伏条件より

$$m = \sigma_Y \frac{t^2}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{\sigma_Y} \right)^2 \right\} \quad (21)$$

p が σ_Y に近づくと, Fig. 3 の問題も周辺支持の長方形板の挙動に近くなる。(20) 式の左辺に, 次の項が付加される。

$$\frac{4}{\pi^2} \sigma_Y \left\{ 1 - \left(\frac{p}{\sigma_Y} \right)^2 \right\} \frac{1}{\phi + \phi_0}$$

さて, 塑性域の厚さ ηt を, 板の中央点 ($x=0, y=0$) における塑性域の厚さと等しいとして決めることにする。しかも, この塑性域は $a \times b$ 全域に広がるとする。これは厳しい仮定で, p_E/σ_Y が小さい範囲を除き, この方法によって得られた耐力は実際より低目を与えることになる。板の変位 e_x, e_y, ϕ に対応する ϵ_x が降伏ひずみ以上になる領域を降伏領域とする。つまり弾性であると仮定した応力 $\sigma_{x_0}^e = \sigma_x^e (x=0, y=0)$

$$\sigma_{x_0}^e = p^e - p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0) - \frac{\xi}{t} p_2 \phi$$

が, $\frac{\xi}{t} = \eta - \frac{1}{2}$ で, σ_Y に達するとして,

$$\eta = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_Y - p^e + p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0)}{p_2 \phi} \quad (22)$$

以上の議論に基づいて, 板厚方向の塑性域の影響による耐力減少の計算結果を Fig. 14~Fig. 16 に示す。図中 $\beta=0$ とした曲線がそれである。板厚方向の塑性域が存在しても, 耐力はたわみが大きくなるとともに増大し, 耐力は最大値を取らないことがわかる。実際は次節に述べる a 辺に沿っての塑性域の発生によって, 耐力はあるたわみに達すると減少し始める。詳細解析結果と比較す

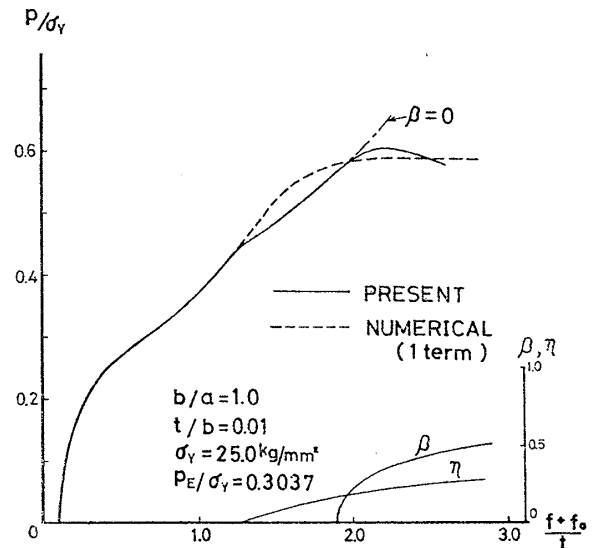


Fig. 14 Mean Stress vs. Maximum Deflection by Simplified Analysis ($b/a=1$)

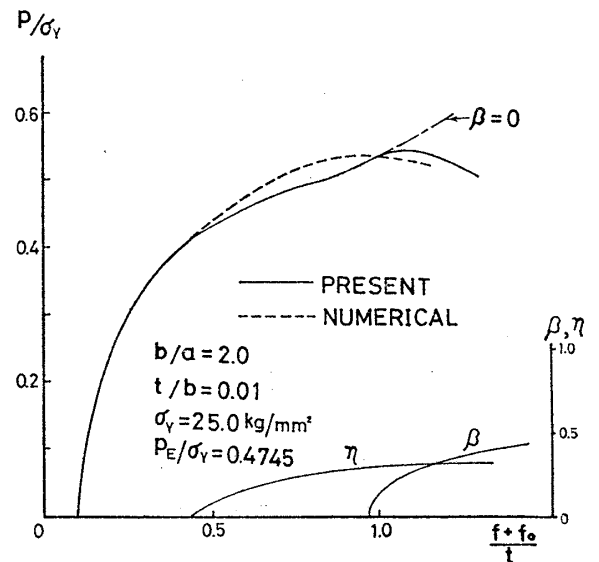


Fig. 15 Mean Stress vs. Maximum Deflection by Simplified Analysis ($b/a=2$)

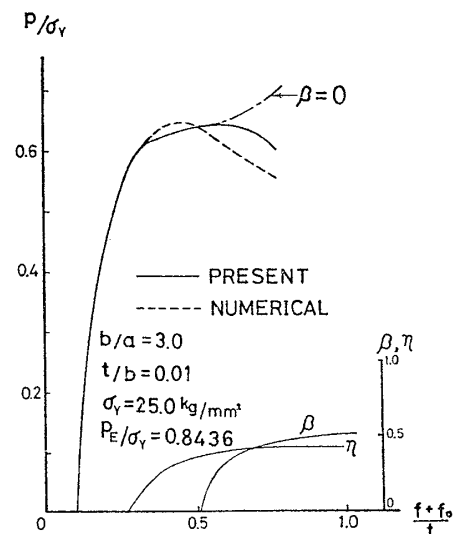


Fig. 16 Mean Stress vs. Maximum Deflection by Simplified Analysis ($b/a=3$)

ると、降伏が始まった直後の耐力の落ち込みが略算結果では多少大きい、これは曲げ剛性の塑性域 ηt による低下を、1から $\left\{1 - \left(\frac{1}{2} + 4\left(\eta - \frac{1}{2}\right)^3\right)\right\}$ としていることに帰因する。つまり、塑性域内の応力を(7)式のように仮定し、塑性域の曲げ剛性の寄与を0としているために、実際は組み合わせ応力のためにある程度の曲げ剛性があるのと比べ、厳しすぎる条件となっているためと思われる。

4.2 荷重方向の辺に沿っての塑性域の影響

荷重方向に平行な a 辺に沿っての塑性域が生じる場合の影響を検討する。すでに板厚方向の塑性域 ηt は存在しているとし、新たに塑性域 βb が発生すると考える。 βb によって、平均応力 p は減少するが、(12) 式より

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{b} \int_{-b(1-\beta)/2}^{b(1-\beta)/2} \bar{\sigma}_x dy + \beta \sigma_Y \\ &= (1-\beta) p_{\beta=0} \\ &\quad - p_0(1-\eta) (\phi^2 + 2\phi\phi_0) \frac{1}{\pi} \sin \pi(1-\beta) + \beta \sigma_Y \\ &\approx (1-\beta) p_{\beta=0} - p_0(1-\eta) (\phi^2 + 2\phi\phi_0) \beta + \beta \sigma_Y \\ &= p_{\beta=0} - \beta \{ p_{\beta=0} + p_0(1-\eta) (\phi^2 + 2\phi\phi_0) - \sigma_Y \} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $p_{\beta=0}$ は板厚方向の塑性域 ηt のみを考えたときの平均圧縮応力である。(23) 式の第2項が、 a 辺に沿っての塑性域による耐力の減少量である。この項は負となる可能性があるが、このときはこの項を無視することにする。

塑性領域 βb を決めるときは、変位 e_x, e_y, ϕ に対応するひずみが、降伏ひずみに達したか否かで判定する。つまり、次の完全弾性と仮定したときの応力分布を用い、 $y = \pm \frac{b(1-\beta)}{2}$ で、弾性応力解 $\bar{\sigma}_x^e$ が σ_Y となるとする。

$$\bar{\sigma}_x^e = p^e - p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0) \cos \pi(1-\beta) = \sigma_Y \quad (24)$$

ただし、 p^e は(3)式で表わされる ϕ の関数である。

(24) 式から

$$\cos \pi \beta = \frac{\sigma_Y - p^e}{p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0)} \quad (25)$$

あるいは近似的に

$$\beta \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{2 \left[1 - \frac{\sigma_Y - p^e}{p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0)} \right]}$$

また、 a 辺の降伏が始まる時のたわみ ϕ は次式より決定される。

$$p^e + p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0) = \sigma_Y \quad (26)$$

(23) 式で表わされる β による耐力減少も含めた計算結果を Fig. 14~Fig. 16 に示す。 $p \leq \sigma_Y$ ならば、 a 辺の塑性化が始まるたわみ ϕ が、ほぼ最高荷重を与えることがわかる。

4.3 最高荷重の推定法

前節の簡略計算法によって、 p - ϕ 関係を求め、 p の

最大値 p_u を、 $\sqrt{\frac{\sigma_Y}{p_E}}$ に対して整理したのが、Fig. 17~Fig. 20 である。 $b/a=1$ と $b/a=2$ に対しては文献¹⁾ の有限要素法による計算結果を示す。(20) 式において、板中央点の塑性域の厚さを板全体の厚さとし、しかも塑性域が $a \times b$ 全域に広がっているとしているので、簡略計算結果は厳密な解より一般には低目を与える。ただし、 p_E/σ_Y が小さくなると、簡略計算で仮定した塑性域以外に隅からの曲げによる塑性域あるいは凸側中央から

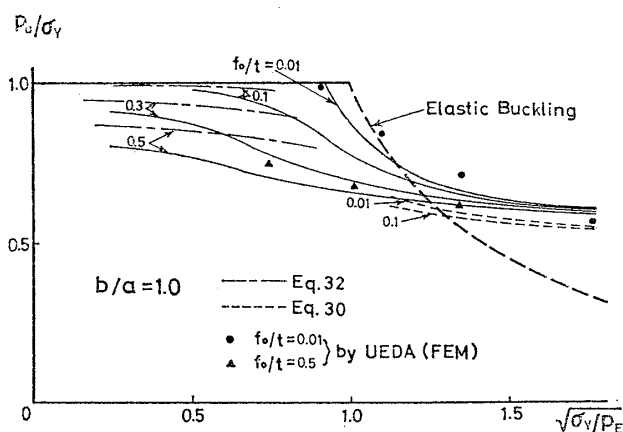


Fig. 17 Ultimate Mean Stress of Square Plates

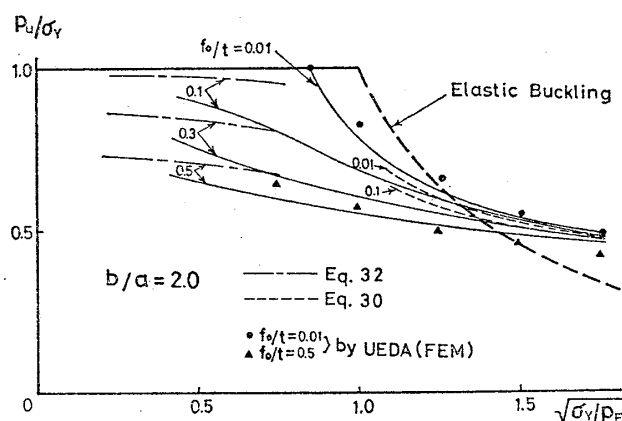


Fig. 18 Ultimate Mean Stress of Rectangular Plates ($b/a=2$)

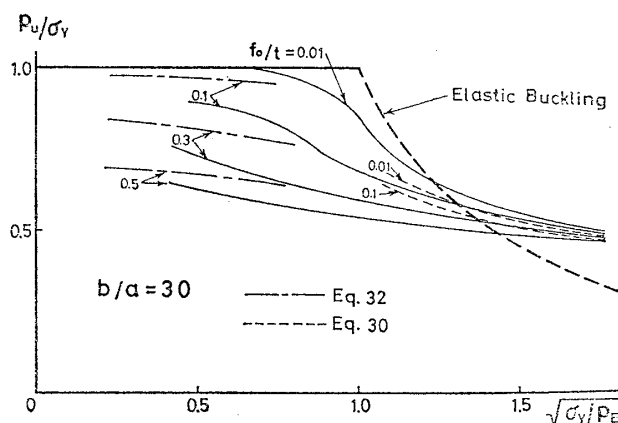


Fig. 19 Ultimate Mean Stress of Rectangular Plates ($b/a=3$)

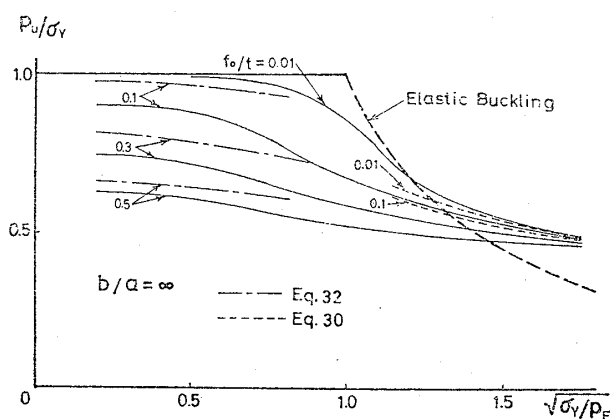


Fig. 20 Ultimate Mean Stress of Rectangular Plates ($b/a=\infty$)

の塑性域が存在するために耐力は下り、簡略計算は高目を与えることがわかる。また $b/a=3$ と $b/a=\infty$ の p_u はほとんど差はないことが観察される。なお凹側中央が降伏するときの平均応力より p_u はかなり高いことに注意する。

a) $p_E < \sigma_Y$ に対する最高荷重近似式

さらに p_u を直接与える近似式を考えてみる。簡略計算の結果、 $p_E < \sigma_Y$ の場合、 a 辺に沿っての塑性域が生じた時点で、最高耐力に達したとしてよいことがわかった。このときのたわみ ϕ は (3) 式と (26) 式によって決定できる。またこの ϕ 値を (22) 式に代入して $\eta = \eta_0$ が得られ、さらに (20) 式に代入すると p_u の近似値が決定される。さらに、これを簡単にすることを考える。 $\phi_0 \ll \phi$ と仮定すると、(3) 式と (26) 式より、 p_u の粗い高目の近似として

$$p_u \approx p^e \approx \sigma_Y - p_0 \frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1} = \frac{1 + \frac{p_1}{p_0} \frac{\sigma_Y}{p_E}}{1 + \frac{p_1}{p_0}} p_E \quad (27)$$

(26) 式と (27) 式によって、このときのたわみは

$$\phi = -\phi_0 + \sqrt{\frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1}} \approx \sqrt{\frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1}} \quad (28)$$

また、 η は (22) 式、(27) 式および (28) 式より

$$\eta \approx \frac{1}{2} - \frac{2p_0}{p_2} \sqrt{\frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1}} \quad (29)$$

(28) 式を (20) 式に代入し、小さな項を無視すると、

$$\begin{aligned} p_u & \left(1 + \frac{\eta}{2} \frac{16}{\pi^2} \sqrt{\frac{p_0 + p_1}{\sigma_Y - p_E}} \right) \\ & \approx \sigma_Y - p_0 \left(\frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1} \right) - \frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1}}} \frac{p_E p_0}{p_0 + p_1} \\ & \quad - \eta p_1 \frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1} - \left(\frac{1}{2} + 4 \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^3 \right) \\ & \quad \times p_E \left(1 - \frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\eta}{2} (1 - \eta) \frac{16}{\pi^2} \left(2p_1 \sqrt{\frac{\sigma_Y - p_E}{p_0 + p_1}} + \frac{4}{3} p_1 \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_Y}{1 - \eta} \sqrt{\frac{p_0 + p_1}{\sigma_Y - p_E}} - \frac{\eta}{2} \frac{32}{\pi^2} p_0 \right) \quad (30) \end{aligned}$$

(19) 式を用いて、(30) 式より $p_E < \sigma_Y$ の場合の p_u の近似値が得られる。

b) $p_E > \sigma_Y$ に対する最高荷重近似式

p_E が σ_Y より大きいとき、 a 辺に沿っての塑性域 βt が生じて、しばらく後に最高荷重に達し、その値 p_u は、 β が発生したときの (20) 式による p よりも高く、そのときの p^e に近くなっていることが簡略計算結果からわかった。

p_E が σ_Y に比べてかなり大きい場合、塑性域 βt の発生するときのたわみ ϕ は非常に小さく、(3) 式と (26) 式より、 ϕ の高次項を無視すると

$$\phi \approx \frac{-\left(2\phi_0^2 + \frac{p_E - \sigma_Y}{p_0 + p_1} \right) + \sqrt{\left(2\phi_0^2 + \frac{p_E - \sigma_Y}{p_0 + p_1} \right)^2 + \frac{12\sigma_Y\phi_0^2}{p_0 + p_1}}}{6\phi_0} \quad (31)$$

したがって、改善された p_u は (31) 式とともに次式から得られる。

$$p_u \approx p^e = p_E \frac{\phi}{\phi + \phi_0} + p_1 (\phi^2 + 2\phi\phi_0) \quad (32)$$

(30) 式および (32) 式を Fig. 17~Fig. 20 に併せて載せている。

最後に、Fig. 21 に示すように変形する縦肋骨方式と横肋骨方式の最終強度を比較してみる。ここでは縦肋骨方式における幅と横肋骨方式の長さを共通の c とし、おのおの他の辺は充分長いとす。両者の座屈応力は

$$p_{EL} = 4 \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{c} \right)^2, \quad p_{ET} = \frac{1}{4} p_{EL} \quad (33)$$

ここで添字 L と T はおのおの縦肋骨方式と横肋骨方式を表す。

$p_{EL} < \sigma_Y$ のとき、(27) 式において $b/a=1$ とおくと

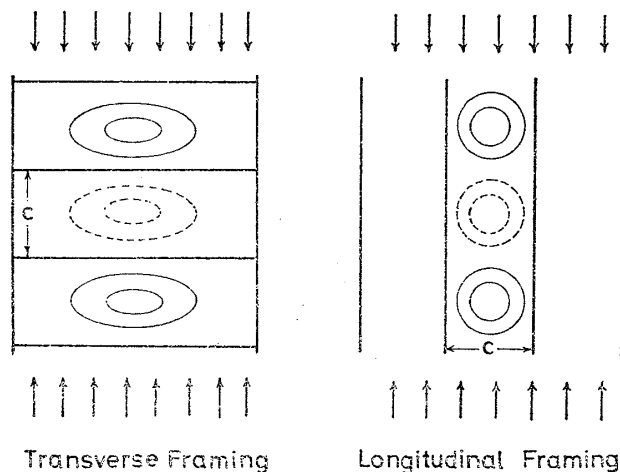


Fig. 21 Transverse and Longitudinal Framing

$$\frac{p_{uL}}{p_{EL}} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_Y}{p_{EL}} \right), \quad \frac{p_{uT}}{p_{ET}} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_Y}{p_{ET}} \right)$$

したがって

$$\frac{p_{uT}}{p_{uL}} \approx \frac{\frac{1}{4} p_{EL} + \sigma_Y}{p_{EL} + \sigma_Y} \quad (p_{EL} < \sigma_Y) \quad (34)$$

同様にして

$$\frac{p_{uT}}{p_{uL}} \approx \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} p_{EL} + \sigma_Y \right)}{\sigma_Y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{p_{EL}}{\sigma_Y} \quad \left(\frac{1}{4} p_{EL} < \sigma_Y < p_{EL} \right) \quad (35)$$

5 結 論

一軸圧縮荷重を受ける縦横に補強された防撓板の最終強度を推定するため、周辺支持の長方形板の最終強度を検討し、次の結論を得た。

長方形板に生じる塑性領域は、主なものとして凹側表面中央から広がるもの、荷重に平行な辺に沿って進行するものがあり、その他として p_E/σ_Y が小さい場合には、隅から曲げ変形によって両表面に広がる領域と凸側表面中央から引張りによって生じる領域がある。

凹側表面からの塑性化と辺に沿っての塑性化を考慮した簡易解析モデルの挙動を解析した結果、辺に沿っての塑性化が、耐力を大幅に減少させて最高値を与えることがわかった。

簡易モデルによる最高耐力の計算は非常に容易であり、長方形板のアスペクト比 b/a 、降伏応力と弾性座屈応力 σ_Y/p_E 、初期たわみ f_0/t をパラメータとして最高耐力を与えた。これは従来の解とも比較的良好な一致を見た。

また最高耐力値は荷重に平行な辺に沿っての降伏が開始するときのたわみに、大きく依存することがわかったので、これを利用して最高耐力を推定するための式を提案した。

以上のように周辺支持の長方形板の最高耐力に対するある程度統一的な知見が得られたと考える。

謝 辞

本論文を書くに先立ち、御討論いただいた住友重機械工業の服部堅一氏に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 上田, 安川, 矢尾, 池上, 大南: 圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究(第2報), 日本造船学会論文集, 第140号, 昭和51年12月。
- 2) 安藤文隆: 永久座屈(凹損)より見た船底外板の圧縮強度について, 造船協会論文集, 第97号, 昭和30年8月。
- 3) Th. von Kármán, E.E. Sechler, L.H. Don-

nell: The Strength of Thin Plate in Compression, Trans. ASME, Vol. 54, 1932.

- 4) 藤田, 野本, 仁保: 防撓板の圧縮強度について, 日本造船学会論文集, 第141号, 昭和52年6月。
- 5) J. McCallum: The Strength of Fast Cargo Ships, The Royal Institution of Naval Architects, 1974, pp. 1~18.
- 6) 吉識, 秋田, 安藤: 初期撓みをもつ連続パネルの座屈強度と凹損, 造船協会論文集, 第101号, 昭和32年8月。
- 7) 秋田, 吉本: 荷馬が船底の凹入に及ぼす影響, 同上, 第97号, 昭和29年8月。
- 8) 大坪英臣: 平板の弾塑性大たわみ問題の一解法, 日本造船学会論文集, 第130号, 昭和46年12月。
- 9) 吉識, 山本: 弾性安定論, 共立出版, 昭和40年。
- 10) 寺沢一雄: 船体構造力学, 海文堂, 昭和51年。

付録 長方形板の弾性大たわみ解析結果

一軸圧縮を受ける長方形板の弾性挙動を考えると、応力分布は次のように与えられる。

$$\begin{cases} \sigma_x = p - p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0)\cos\frac{2\pi y}{b} \\ \quad - \frac{\zeta}{t}\phi p_2\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} \\ \sigma_y = -p_0(\phi^2 + 2\phi\phi_0)\cos\frac{2\pi x}{a} \\ \quad - \frac{\zeta}{t}\phi p_3\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} \\ \tau_{xy} = \frac{2\zeta}{t}\phi p_4\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \end{cases} \quad (A-1)$$

また相当応力 $\bar{\sigma}$ は次のように示される。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (A-2)$$

Fig. A-1 から Fig. A-4 に b/a を換えて、平均圧縮応力 p とたわみ f の関係を示す。同じ図に特定応力の点の応力あるいは相当応力を示す。 $\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_s$ は凹側表面の中央点および隅部の相当応力を示し、 σ_{x0}, σ_{xs} は凹側表面の中央点および a 辺の x 方向の応力を示す。以上の図により、 $\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_s, \bar{\sigma}_{x0}, \sigma_{xs}$ のいずれかが σ_Y に達したときのたわみ ϕ が求まり、対応する平均圧縮応力 p が得られる。この結果が本文 Fig. 5, Fig. 7, Fig. 9, Fig. 11 に弾性解析結果として示されている。またこれらの図により b/a が異なるときの塑性化の違いが読みとれる。

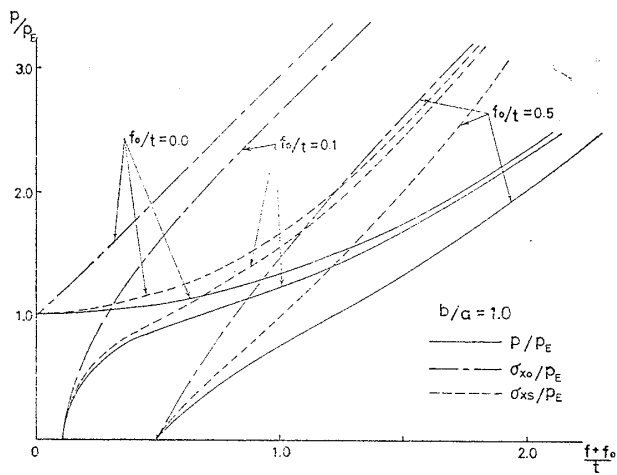


Fig. A-1 Stresses σ_x and p vs. Maximum Deflection ($b/a=1$)

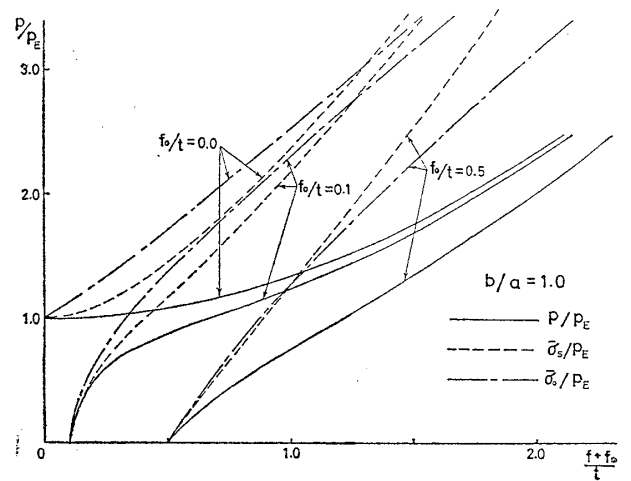


Fig. A-2 Stresses $\bar{\sigma}$ and p vs. Maximum Deflection ($b/a=1$)

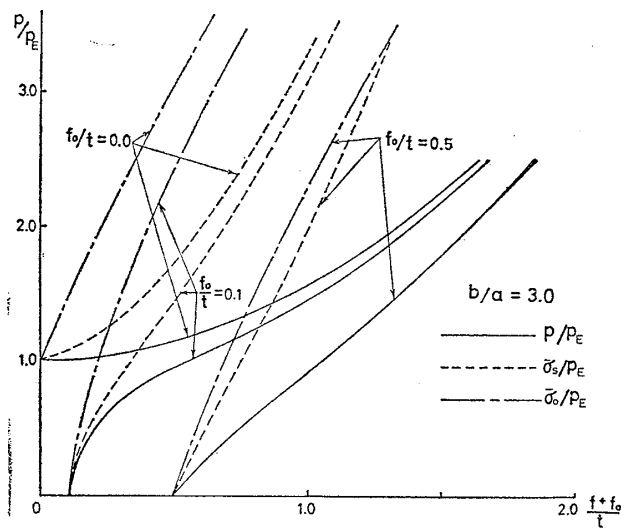


Fig. A-3 Stresses $\bar{\sigma}$ and p vs. Maximum Deflection ($b/a=2$)

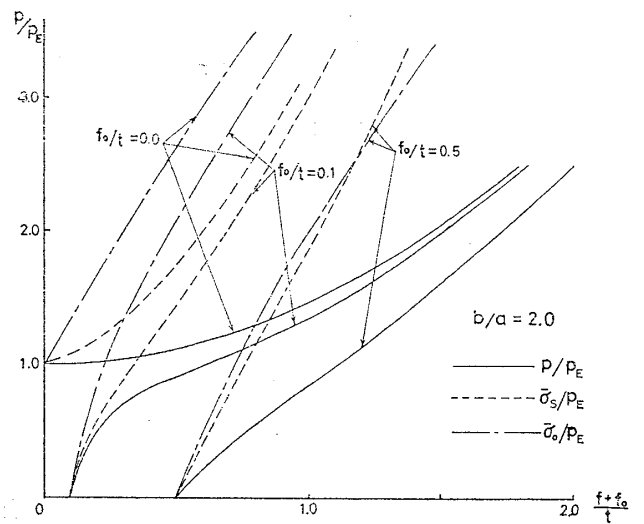


Fig. A-4 Stresses $\bar{\sigma}$ and p vs. Maximum Deflection ($b/a=3$)