(昭和 53 年5月　日本造船学会春季講演会において講演)

縦渦対を伴う円筒噴流の安定性

正員　松　村　清　重*　　正員　田　中　一　朗**

Stability of Inviscid Axisymmetric Jet with a Pair of Longitudinal Vortices

by Kiyoshige Matsumura, *Member*　Ichiro Tanaka, *Member*

Summary

Stability of wake field with a pair of longitudinal vortices is discussed by a simplified inviscid flow model. The model is composed of an axisymmetric jet, a vortex doublet inside it as the limiting configuration of a pair of vortices, and a cross flow to keep the vortex doublet inside the jet. The theoretical analysis based on the linear instability theory shows that the whole flow field is unstable and the flow due to vortices weakens the instability of jet at the side of the cylindrical jet surface facing the cross flow but magnifies it at the back side of the surface.

1　緒　　言

船尾流場は，船の肥大化に伴い船尾縦渦が顕著に現われるため非常に複雑な様相を呈しており，この流場の構造，特性を把握することは，粘性抵抗，推進性能等を知る上で極めて重要である。本論は，縦渦を伴う船尾流場の流体力学的特性について，安定論的見地から考察を試みるものである。

種子田ら[1),2)]は，裸殻船尾流場において，その流脈の様子から，レイノルズ数が 10^4～10^6 の範囲で鎖状進行波が形成され，10^6～10^7 の範囲では後流は安定であると述べている。鎖状進行波の形成は流場の不安定性によるものと考えられるが，その機構は未だ明らかにされておらず，抵抗分離の見地からも，進行波の形成は必然的に一つの抵抗成分を生じるから問題の解明が望まれるところである。

著者らは，船尾流場での現象とは別に，点火したタバコを斜めに保つと，その煙がやはり鎖状進行波を形成することを認めた。これらの進行波が形成される現象はいずれも層流から乱流への遷移現象であると考えられるが，船尾流場のような乱流においても大きなスケールの乱れについて考えるならば同様の不安定性を有するものと思われるので[3),4)]，この場合でも遷移現象とは関連づけずに流場の不安定性について論ずることが可能と考えられる。

そこで著者らは，船尾流場およびタバコの周りの流場の不安定性について統一的に扱いうるものと仮定し，流場観測の容易さからタバコの周りの流場をあらためて詳細に観察した。また現象を理論的に説明するために，基礎流場を円筒噴流と縦渦対から成るものとし，この基礎流場にどのような進行波が存在し，どのような安定特性を有するかを，3次元に拡張した線型安定理論の立場から近似的にではあるが若干の考察を行なった。折から自航不安定現象[5)]あるいは操縦性異常現象などの非定常的現象が見い出されていることでもあり，関連現象として，ここに実験と計算の結果を報告し，御批判を仰ぐしだいである。

2　流　場　観　測

点火したタバコを斜めに保つと煙は鎖状進行波を形成する。この現象は日常でも経験できることではあるが，本論では船尾流場で起こる鎖状進行波との対応を明らかにするために，流場観測を実施しその挙動を調べた。

実験は観測窓を持った暗箱の中で行ない，点火したタバコを支持棒によって約 45° に傾けて取りつけ，その煙を写真撮影した。Fig. 1 は煙全体を横からステレオカメラで撮影したものでステレオ・ビュアーにより立体的に見ることができる。この写真は比較的よく形の整ったもので，タバコの先端から 10 cm 程度の高さまでは定常で層流を保ち，煙の層は断面が半円形の雨樋を立てたような形をしている。その内部では流速は速く外部ではほぼ静止し，自然熱対流の様子を示している。10～20 cm の高さでは，流場は遷移域で煙は鎖状の波動を示す。すなわち煙の濃い場所と煙のない場所が，1～2 cm 間隔で 3～5 個交互に続き，その位置関係を変えずに上向きに上昇して行く。一つの鎖を構成する部分が先端から 20 cm

* 大阪大学大学院
** 大阪大学工学部

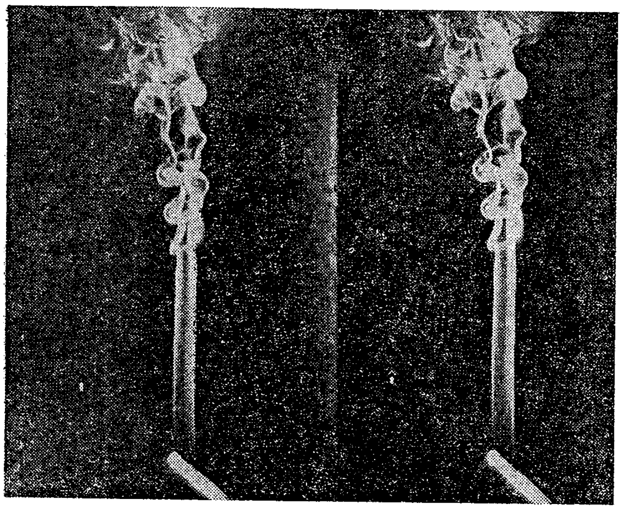

Fig. 1 Chain-like traveling waves of smoke of a cigarette (stereo-photo.)

位の高さに達すると乱れてもはや波動は示さないが，下からも次々と現われてくるので，鎖状進行波の存在する高さはそれほど変化しない。この周波数はストロボ・スコープで調べると 8～12 Hz 程度であり，位相速度は 15 cm/s 程度である。鎖の一つ一つを作る煙の濃い部分の形は左右対称であり，“雨樋”を水平に横切る半円形の部分と，その両端から伸びて上の鎖に巻きつく部分を持つ。両端の部分だけを見ていると，二つのらせんが互に反対方向に回転しながら上昇するように見える。この部分は次に述べるように縦渦で，らせんは縦渦ベクトルの方向に置いた右ねじの回転する方向に回転する。なお，タバコの煙自身は流脈であるから，非定常の場合，実験解釈には注意を要し[6]，この程度の簡単な実験からはこれ以上詳しいことを結論できない。

Fig. 2 は層流状態の部分の水平断面の流線写真である。可視化粒子にはアルミニウム微粉末とベビーパウダーを混合したものを使った。半円形の白い部分が煙の層の断面であり，棒状の白い部分は上から撮影したために

Fig. 2 Horizontal section of flow field around a cigarette smoke

写ったタバコで，区別のために線を引いた。煙の層からも縦渦対の存在がうかがえるが，半円形の内部の流線には二つの同心円状に回転する部分が存在し，一対の縦渦が確認される。

上に述べたことは，縦渦を伴う裸殻船尾流場で起こる鎖状進行波と極めて良く似ている。両者を比べると上流から下流へ向う変化の状況には差があるが，これは本質的なものではなく，空間固定座標から見れば同種の流場と考えることができる。もっとも層流と乱流との違いもあるが，平均流的にみれば統一的に論じうると思われるので，次章以下でその理論を考える。

3 理論

3.1 基礎流場モデルの設定

前章でタバコの周りの流場には，船尾流場で見られるのとよく似た鎖状進行波が形成されることが知れたので，その挙動を明らかにするため，本章で線型安定理論[7]に基づき解析を行なう。最初に定常な基礎流場を設定する必要がある。

両流場を統一的に論ずるに当り，その流場構成要素を考えると縦渦対と自由剪断流に分けることができる。それぞれは単独に自己誘導作用による不安定性を内蔵し，縦渦同志の安定性は Crow[8] により，また，自由剪断流の安定性は軸対称流の場合 Batchelor-Gill[9] ほか多数の人々により論じられている。しかし，全体の流場は両者が混在したものであるから，自己誘導，相互誘導の両作用に基づく不安定性を有している。実際，実験結果もそれぞれの単独の不安定性としては解釈できないが，ただ自由剪断流の持つ横渦の集積が非常に目につくように思われる。このことから自由剪断流の不安定性が支配的であり，それが縦渦対の作用により変形されたと考えるのが適当と思われる。そこで問題を自由剪断流の安定性が縦渦対によってどのような影響を受けるかということにし，それを簡単なモデルにより検討する。

まず一番単純には粘性を無視し，縦渦を渦糸で，自由剪断流を渦面で置き換えればよい。この種の流れで定常性を保ちうる基礎流場として次のものが考えられる。すなわち，流体中に直交 x, y, z 軸をとり，循環が $\pm K$，間隔 a の一対の無限長渦糸が x 方向に続き，その進行を妨げるような y 方向の一様流と釣り合わせる。この時 y-z 面の閉じた流線はケルビンの卵形であり，この内部を x 方向に一様流速 U の噴流が貫き，外部で x 方向の速度が 0 とした流れを考える。y 方向の一様流の存在は，船尾流場では縦渦に固定した座標系から見れば明らかであり，また，タバコの場合は，実験からみると不安定流場が形成されるために不可欠と思われる。

しかし，このモデルはケルビンの卵形という陽に表わ

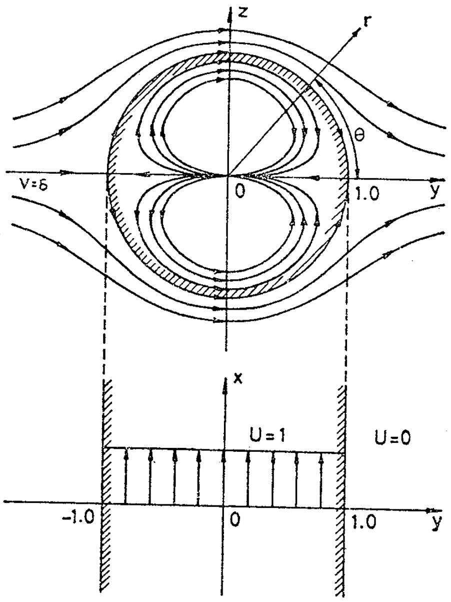

Fig. 3 Basic flow model and coordinate system

せない境界を持つので解析には不便である。そこで，縦渦対を二重渦に縮退させれば，境界は半径 a の円柱となるから，縦渦対の影響を残しながらさらに流場モデルは簡単になる (Fig. 3 参照)。以後の解析の便利のため長さは a，速度は U で無次元化し，その他の次元を持つものは，a, U の組み合わせで無次元化することにする。

基礎流場モデルは，円筒座標系で速度ポテンシャルの形で次のように表示される。

$$\bar{\Phi}_i = x + \delta(r+1/r)\cos\theta \quad (r<1) \tag{1}$$

$$\bar{\Phi}_e = \quad \delta(r+1/r)\cos\theta \quad (r>1) \tag{2}$$

ただし，δ は

$$\delta \equiv (K/2\pi a)/U \tag{3}$$

と定義し，下添字 i, e はそれぞれ $r=1$ の円筒の内部，外部を示すが，以後区別が必要なときのみ明示する。

$\bar{\Phi}_i$, $\bar{\Phi}_e$ はそれぞれの領域でラプラスの式を満足し，$r=1$ の円筒面上で一様な横渦面による特異性，$r=0$ で二重渦による特異性をもつ。

3.2 支配方程式

基礎仮定として(i)流体は一様密度の完全流体，(ii)攪乱の大きさは微小，の二つを設ける。(i)からはケルビンの循環定理あるいはヘルムホルツの渦定理が成立し，円筒面上の横渦は攪乱を受けて変形した面に移動し，その循環は保持される。

まず，微小攪乱を受けたときの円筒渦層の挙動に着目し円筒渦層が

$$S \equiv r - \{1+\tilde{f}(x, \theta, t)\} = 0 \tag{4}$$

で表わされる面に移動したとする。ただし $\tilde{f}$ は $r=1$ の円筒面からの変位量である。

次に(i)の仮定より，攪乱を受けた後も変形した渦面の内部，外部でそれぞれ速度ポテンシャル Φ が存在する。攪乱が存在する時の $\Phi(x, r, \theta, t)$ を

$$\Phi(x, r, \theta, t) = \bar{\Phi}(x, r, \theta) + \tilde{\Phi}(x, r, \theta, t) \tag{5}$$

のように基礎流場の定常ポテンシャル $\bar{\Phi}$ と攪乱ポテンシャル $\tilde{\Phi}$ の線型結合で表示する。

以後(ii)の仮定から $\tilde{f}$, $\tilde{\Phi}$ に関して最低次の項のみを取り，方程式系を線型化してゆく。まず Φ はラプラスの式

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{6}$$

をそれぞれの領域で満足しなければならないが，$r \leqq 1$ で $\bar{\Phi}$ は(6)式をすでに満たしているから，線型理論の範囲内では $\tilde{\Phi}$ は

$$[L] \quad \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\theta^2} = 0 \quad (r \leqq 1) \tag{7}$$

を満足しなければならない。

次に $S=0$ の面上で攪乱の形に適合するために，運動学的条件 $[K]$ および圧力条件 $[D]$ を満たす必要がある。

$[K]$ は渦面の内外で

$$[K]\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{\Phi}_i}{\partial r} - \dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial t} - \dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x} \\ \quad = -2\delta\left(\sin\theta\cdot\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta} + \cos\theta\cdot\tilde{f}\right) \quad (r=1) & (8) \\ \dfrac{\partial\tilde{\Phi}_e}{\partial r} - \dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial t} \\ \quad = -2\delta\left(\sin\theta\cdot\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta} + \cos\theta\cdot\tilde{f}\right) \quad (r=1) & (9) \end{cases}$$

また，$[D]$ は

$$[D] \quad \frac{\partial\tilde{\Phi}_i}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\Phi}_i}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\Phi}_e}{\partial t} = 2\delta\sin\theta\cdot\left(\frac{\partial\tilde{\Phi}_i}{\partial\theta} - \frac{\partial\tilde{\Phi}_e}{\partial\theta}\right) \quad (r=1) \tag{10}$$

さらに $\tilde{\Phi}$ には $r=1$ の円筒面上での跳びを許すだけで新たな特異性がつけ加わることなく有界でなければならず，

$$[B] \qquad \tilde{\Phi} < \infty \tag{11}$$

また $r\to\infty$ では攪乱は消えなければならないから

$$[\infty] \qquad \lim_{r\to\infty}\tilde{\Phi}_e = 0 \tag{12}$$

を得る。ただし $(x^2+r^2)^{1/2}\to\infty$ ではなく，$r\to\infty$ としたのは，r が有限のとき $x\to\pm\infty$ で進行波解を許すためである。

以上，問題は $[L]$, $[K]$, $[D]$, $[B]$ および $[\infty]$ を満足する $\tilde{\Phi}_i$, $\tilde{\Phi}_e$, $\tilde{f}$ を求めることに帰着された。な

お，(7)～(10)式は同次方程式であるので固有関数としては $\tilde{f}, \tilde{\Phi}=O(1)$ とする。

3.3 解

支配方程式は x, r, θ, t に関する線型偏微分方程式系であるが，係数関数は θ の関数であるので通常のようにθに関しフーリエ展開しても無駄である。しかし係数関数は x, t に依存せず，かつ $[L]$ が t の偏導関数を含まないから，x に関する周期解を仮定し，その一つのフーリエ成分を考え $\tilde{f}, \tilde{\Phi}$ を次のように仮定する。

$$\tilde{f}=\mathrm{Re}\{\hat{f}(\theta, t)\exp(i\alpha x)\} \qquad (13)$$

$$\tilde{\Phi}=\mathrm{Re}\{\hat{\Phi}(r, \theta, t)\exp(i\alpha x)\} \qquad (14)$$

ここで $\hat{f}, \hat{\Phi}$ は複素振幅関数で，α は x 方向の無次元波数である。

さて $\hat{f}, \hat{\Phi}$ を解くためにはまだ複雑であるのでさらに次のように考える。$\delta \ll 1$ とすれば第0近似的には二重渦の影響を無視でき，$\delta=0$ では Batchelor-Gill により解析された円筒噴流の安定問題に帰する。δ の値は船尾流場ではたかだか0.1程度と考えられるから δ に関し摂動展開可能とし，第1近似において二重渦の影響を取り入れることにする。

ところで，$\delta=0$ のとき，その解には $\exp(in\theta+i\alpha x)$，$(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ のようにθに依存しない軸対称攪乱だけでなく，無限に多くの高次らせん状攪乱が存在し，粘性を考慮したときには $n=\pm1$ のらせん状攪乱が最も不安定であるといわれている。ただ煙の実験では流脈は x-y 平面に関し対称であるから，ここでも対称モードの攪乱を考えることにすると，第0近似解として $\cos(n\theta)\cdot\exp(i\alpha x)$，$(n=0, 1, 2, \cdots)$ のような対称複合攪乱を考えることになるが，$n=0$ 以外では第1近似解がうまく求まらず，結局第0近似解は軸対称攪乱($n=0$)のみに限られるように思われる。$n=0$ の場合，$n=1$ の時と比べて円筒噴流としては不安定性はやや弱いが，$\alpha=O(1)$ 程度では増幅率はほとんど変らないから，渦の影響により第0近似のモードが安定側のモードに変わることは受け入れにくいことではない。

結局，以下では次の仮定

(i) $\delta \ll 1$ で δ に関し摂動展開可能。

(ii) 第0近似解は軸対称。高次近似解は x-y 平面に対称な攪乱。

を採用する。そこで $\hat{f}, \hat{\Phi}$ を PLK 法[10]的に，

$$\hat{f}(\theta, t)=\hat{f}^{(0)}(\tau)+\delta\hat{f}^{(1)}(\theta, \tau)+\cdots \qquad (15)$$

$$\hat{\Phi}(r, \theta, t)=\hat{\Phi}^{(0)}(r, \tau)+\delta\hat{\Phi}^{(1)}(r, \theta, \tau)+\cdots \qquad (16)$$

ただし

$$\tau\equiv(c/c^{(0)})t \qquad (17)$$

$$c=c^{(0)}+\delta c^{(1)}+\cdots \qquad (18)$$

と展開する。c は複素位相速度で

$$c=c_r+ic_i \qquad (19)$$

と実部，虚部に分けると，c_r は x 方向無次元位相速度で，αc_i は攪乱の増幅率である。$c_i>0$ の時攪乱は増幅し，$c_i<0$ の時減衰する。

(15)，(16) 式を (7)～(10) 式に代入し $\hat{f}, \hat{\Phi}, \alpha, c$ は $O(1)$ かつ $\delta/\alpha \ll 1$ としてオーダー順に解く。

(1) $\hat{f}^{(0)}, \hat{\Phi}^{(0)}$ について

支配方程式は

$$[L] \quad \frac{\partial^2\hat{\Phi}^{(0)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\Phi}^{(0)}}{\partial r}-\alpha^2\hat{\Phi}^{(0)}=0 \qquad (20)$$

$$[K] \quad \frac{\partial\hat{\Phi}_i^{(0)}}{\partial r}-\frac{d\hat{f}^{(0)}}{d\tau}-i\alpha\hat{f}^{(0)}=0 \qquad (21)$$

$$\frac{\partial\hat{\Phi}_e^{(0)}}{\partial r}-\frac{d\hat{f}^{(0)}}{d\tau}=0 \qquad (22)$$

$$[D] \quad \frac{\partial\hat{\Phi}_i^{(0)}}{\partial\tau}+i\alpha\hat{\Phi}_i^{(0)}-\frac{\partial\hat{\Phi}_e^{(0)}}{\partial\tau}=0 \qquad (23)$$

ただし $[B]$，$[\infty]$ は (11)，(12) 式と同様であり，成立領域も同じであるので省略した。

増幅攪乱に対応する固有関数は $\hat{f}^{(0)}(0)$ を基準として1にとれば，

$$\hat{f}^{(0)}=\exp[-i\alpha c^{(0)}\tau] \qquad (24)$$

$$\hat{\Phi}_i^{(0)}=\frac{i(1-c^{(0)})}{I_1(\alpha)}I_0(\alpha r)\exp[-i\alpha c^{(0)}\tau] \qquad (25)$$

$$\hat{\Phi}_e^{(0)}=-\frac{ic^{(0)}}{K_1(\alpha)}K_0(\alpha r)\exp[-i\alpha c^{(0)}\tau] \qquad (26)$$

のように，また，第0近似固有値 $c^{(0)}$ は

$$c^{(0)}=(1+i\sqrt{L})/(1+L) \qquad (27)$$

と求まる。ただし

$$L\equiv\{I_1(\alpha)\cdot K_0(\alpha)\}/\{I_0(\alpha)\cdot K_1(\alpha)\} \qquad (28)$$

と定義し，I_0, K_0, I_1, K_1 はそれぞれ0次，1次の変形ベッセル関数である。これらの解は Batchelor-Gill[9] の解と同等のものである。

(2) $\hat{f}^{(1)}, \hat{\Phi}^{(1)}$ について

支配方程式は

$$[L] \quad \frac{\partial^2\hat{\Phi}^{(1)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{\Phi}^{(1)}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\hat{\Phi}^{(1)}}{\partial\theta^2}-\alpha^2\hat{\Phi}^{(1)}=0 \qquad (29)$$

$$[K] \quad \frac{\partial\hat{\Phi}_i^{(1)}}{\partial r}-\frac{\partial\hat{f}^{(1)}}{\partial\tau}-i\alpha\hat{f}^{(1)} =\frac{c^{(1)}}{c^{(0)}}\frac{d\hat{f}^{(0)}}{d\tau}-2\cos\theta\cdot\hat{f}^{(0)} \qquad (30)$$

$$\frac{\partial\hat{\Phi}_e^{(1)}}{\partial r}-\frac{\partial\hat{f}^{(1)}}{\partial\tau}=\frac{c^{(1)}}{c^{(0)}}\frac{d\hat{f}^{(0)}}{d\tau}-2\cos\theta\cdot\hat{f}^{(0)} \qquad (31)$$

$$[D] \quad \frac{\partial\hat{\Phi}_i^{(1)}}{\partial\tau}+i\alpha\hat{\Phi}_i^{(1)}-\frac{\partial\hat{\Phi}_e^{(1)}}{\partial\tau} =-\frac{c^{(1)}}{c^{(0)}}\left(\frac{\partial\hat{\Phi}_i^{(0)}}{\partial\tau}-\frac{\partial\hat{\Phi}_e^{(0)}}{\partial\tau}\right) \qquad (32)$$

(29)～(32)式は非同次連立方程式であって無限個の同次解が存在するが，第0近似が属する固有値に対応する固有関数の近似解を求めるという観点から，一切の同次解を無視し非同次解のみを求める。

非同次解は (30)，(31) 式右辺の $\cos\theta\cdot\hat{f}^{(0)}$ の項の存在により，$\hat{f}^{(1)}$，$\hat{\Phi}^{(1)}$ をそれに比例すると仮定するのが妥当である。このことは第0近似解には θ に関し攪乱波面に位相差はないから，第1近似では θ に関し位相差を有する解を考えることになる。一般的に攪乱波面に位相差を有する方が，ない場合と比べてより不安定であるから，ここでも $\cos\theta\cdot\hat{f}^{(0)}$ に比例する解を考えればより不安定になると期待される。そこで

$$\hat{f}^{(1)}=F\cos\theta\cdot\hat{f}^{(0)}(\tau) \tag{33}$$

$$\hat{\Phi}_i^{(1)}=A\cos\theta\cdot I_1(\alpha r)\cdot\hat{f}^{(0)}(\tau) \tag{34}$$

$$\hat{\Phi}_e^{(1)}=B\cos\theta\cdot K_1(\alpha r)\cdot\hat{f}^{(0)}(\tau) \tag{35}$$

とすれば $\hat{\Phi}_i^{(1)}$，$\hat{\Phi}_e^{(1)}$ は [L]，[B]，[∞] を満足する。ただし，F, A, B は複素定数であり，F は第0近似の攪乱波面の位相差を補正するものである。上の形を仮定すると $c^{(1)}$ は

$$c^{(1)}=C\cos\theta \tag{36}$$

のように θ に依存しなければならない。(33)～(36)式を(30)～(32)式に代入すると次の連立方程式を得る。

$$\left\{\begin{aligned}&\alpha I_1'A-i\alpha(1-c^{(0)})F=-i\alpha C-2 && (37)\\&\alpha K_1'B+i\alpha c^{(0)}F=-i\alpha C-2 && (38)\\&i\alpha(1-c^{(0)})I_1A+i\alpha c^{(0)}K_1B\\&\quad=i\alpha C\{i(1-c^{(0)})I_0/I_1-ic^{(0)}K_0/K_1\} && (39)\end{aligned}\right.$$

ただし (′) は α に関する微分を表わす。これは変数が4個で式が3個であるから解き得ない。普通，固有値の第1近似 C は F, A, B に独立に求め得るが，今の場合それができないのは，非同次項の形から $\hat{f}^{(1)}$，$\hat{\Phi}^{(1)}$ を $\cos\theta$ に比例させたことで，固有関数の第1近似の係数と考えるべき関数形が，第0近似の $I_0(\alpha r)$，$K_0(\alpha r)$ から $I_1(\alpha r)$，$K_1(\alpha r)$ に変わり，(37)～(39) 式左辺の行列式の値が0でなくなったことによる。ここでは C, A, B を F をパラメータとして求めることにすると，それらは簡単に求められ F に依存しない部分と依存する部分に分けて

$$C=C_1+C_2\cdot F \tag{40}$$

のように表わすことができる。A, B も同様であり関数形を陽に表わすことができるが煩雑であるので省略する。

以上で第1近似まで求められたことになるが，ここに一つの問題がある。それは (36) 式のように $c^{(1)}$ が θ の関数となっていることである。このため (17) 式で表わされる τ が t だけでなく θ にも依存することになり，θ に関する偏微分 $\partial/\partial\theta$ は $\{\partial/\partial\theta+(\partial\tau/\partial\theta)\cdot\partial/\partial\tau\}$ のように変更されなければならない。この影響は第1近似まででは (29) 式 [L] のみに現われ，t に依存する非同次項を伴うようになる。しかし t が大きいときにはもはや線型安定理論は成立しないから，今のように t の小さい間を論ずるのであれば，この非同次項は無視しうるものと考える。

3.4 結果および考察

3.3 で得られた結果を複素表示のまま列記する。

$$\tilde{f}=\{1+\delta\cos\theta\cdot F\}\exp[i\alpha(x-ct)] \tag{41}$$

$$\tilde{\Phi}_i=\{i(1-c^{(0)})I_0(\alpha r)/I_1(\alpha)+\delta\cos\theta\cdot A\cdot I_1(\alpha r)\}\exp[i\alpha(x-ct)] \tag{42}$$

$$\tilde{\Phi}_e=\{ic^{(0)}\cdot K_0(\alpha r)/K_1(\alpha)+\delta\cos\theta\cdot B\cdot K_1(\alpha r)\}\exp[i\alpha(x-ct)] \tag{43}$$

$$c=c^{(0)}+\delta\cos\theta\{C_1+C_2\cdot F\} \tag{44}$$

(1) 複素位相速度 c について

Fig. 4 に c を $c^{(0)}$, C_1, C_2 の成分ごとに実部，虚部に分けて示し，それぞれに考察を加える。なお，解析は $\delta/\alpha\ll 1$ と仮定しているので α の小さいところは無意味であり，後に示す理由からここでは $\alpha\geqq 2$ の範囲を考える。

$c^{(0)}$ は第0近似固有値であるから，円筒噴流の軸対称攪乱に対する複素位相速度と同じで，Im$\{c^{(0)}\}$ は α の全域で正であるからこの流れはまったく不安定である。増幅率が最大となる波数 α は Im$\{\alpha c^{(0)}\}\underset{\alpha\to\infty}{\sim}\alpha/2$ であるから α が無限大のときであり，この事情は第1近似まで考慮しても変わらない。これは基礎流場モデルを渦面により近似したため粘性による減衰作用がないからである。

次に Re$\{c^{(0)}\}$ は α のいかんにかかわらず 1/2 より大きく，攪乱波面の位相速度は渦面の実質速度（平均流速）より常に速い。また，付録とも関連することであるが，渦面の曲率が小さくなれば α の全域で 1/2 になる。

$c^{(1)}$ は $\cos\theta$ に比例するから θ によって安定特性は異なる。まず，F に依存しない部分 C_1 は α の全域で Im$\{C_1\}$ は正となっている。$-\pi/2<\theta<\pi/2$ の範囲（以後背面と呼ぶ）では $\cos\theta>0$ であるから二重渦の影響がない時より流れは不安定となる。また，逆に $\pi/2<\theta<3\pi/2$ の範囲（以後前面と呼ぶ）では $\cos\theta<0$ となるから二重

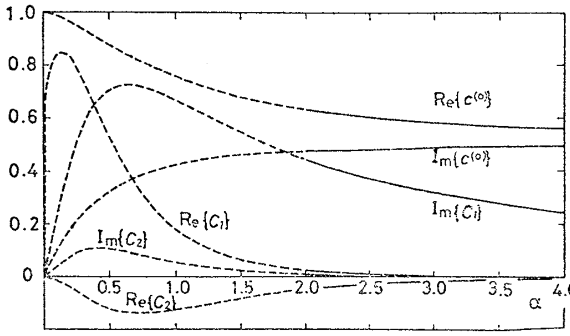

Fig. 4 Complex phase velocity c, where $c=c^{(0)}+\delta\cos\theta\cdot\{C_1+C_2\cdot F\}$

渦の影響によって流れの不安定性は円筒噴流の場合より弱まる。このことは物理的には次のように説明できる。すなわち前面，とくに $\theta=\pi$ の近傍では，Fig. 3 で明らかなように二重渦と y 方向の一様流が釣合い，もし噴流がなければこの釣合いは安定釣合である。したがって渦面が変位しても常に引き戻され安定であるが，噴流の不安定性が優越するから流れの不安定性が緩和されるだけである。一方，背面，とくに $\theta=0$ の近傍では流れは渦面に対し発散流となっているから前面とは逆に不安定釣合で，噴流の不安定性はさらに助長される。

$\mathrm{Re}\{C_1\}$ も α の全域にわたって正で，0にはならない。このことは θ によって位相速度が異なることを意味し，攪乱波面の位相差は時間の経過とともに増大するので不都合である。しかし α が2程度より大きい時を考えれば $\mathrm{Re}\{C_1\}\fallingdotseq 0$ であるから，$\delta/\alpha\ll 1$ の仮定からも大きな問題はない。

Fを0とすると (44) 式より α が大きい時の c の漸近特性は

$$c \underset{\alpha\to\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\alpha}\right)+i\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{\alpha}\cos\theta\right) \qquad (45)$$

となり，実部に δ は含まれないから位相速度には二重渦の影響は現われない。増幅率に関しては先に述べたように $\delta\cos\theta/\alpha$ の形で二重渦の影響が現われる。この形は別の観点から調べた結果と一致し，それを付録に示した。

$F=0$ とした解は θ に関して攪乱波面に位相差はないが，ここで前面と背面に位相差があればさらに不安定になると期待される。実際 C_2 を見れば α の大きい所では $|\mathrm{Re}\{C_2\}|>|\mathrm{Im}\{C_2\}|$ でオーダーに差があり，c への寄与は $C_2F\cos\theta$ となるから F を $O(1)$ の範囲で例えば $F=-i$ と選ぶと $\mathrm{Im}\{C_2F\}>0$ となり，量的には小さいが位相差のないときに比べて前面で安定，背面でさらに不安定になる。このモードは (41) 式でわかるように前面では位相進み，背面では位相遅れとなっている。この位相関係は実験でも見られるものでよく対応するように思われる。以上Fの本質については若干不明な所があるが物理的には考え得るものと思われる。

（2） 渦面の強さおよび実質速度について

不安定機構は渦面の強さ密度 $\boldsymbol{\Gamma}$ と，渦面の実質速度 $\boldsymbol{q}$ との位相関係により説明することができる[11]。いま

$$\chi(x,\theta,t)\equiv\Phi_i(x,1,\theta,t)-\Phi_e(x,1,\theta,t) \qquad (46)$$

のような関数を定義すると，χ は「渦線関数」の意味を持ち，$\chi=$一定の線は渦線である[12]。この時 $\boldsymbol{\Gamma}$ は

$$\boldsymbol{\Gamma}=-(e_r\times\nabla)\chi \qquad (47)$$

のように表わされるから，流線関数と同様に渦線の間隔が密なほど $\boldsymbol{\Gamma}$ の大きさは大きく，粗なほど小さい。$\boldsymbol{q}$ は

$$\Phi_v\equiv\{\Phi_i(x,1,\theta,t)+\Phi_e(x,1,\theta,t)\}/2 \qquad (48)$$

のようなポテンシャル関数から求められる。

以下，関数表示のままでは見にくいので具体的な数値をあげて考察する。まず，α は増幅率が最大となる波数 α を用いれば適当であるが，そのような値は存在しないので実験で得られる程度の $\alpha=2.0$ とする。Fは $(-i)$ とし，δ はその効果を強調するために0.3とする。

Fig. 5 は θ に関し偶関数であるので，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲に等波高線，$\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲に攪乱成分の渦線を示したものである。$\tilde{f}$ は値が正のとき渦面は円筒より外側，負のとき内側にある。図からわかるように渦線の間隔が狭い所，すなわち，渦面の強さが強い所は $\tilde{f}\fallingdotseq 0$ の線に沿っている。渦線ベクトルの方向は，$\tilde{f}$ の値を見れば攪乱波面がさらに回転する方向であるから，時間の経過に従って波面はどんどん回転する。Fig. 6 は左側に攪乱成分の等ポテンシャル線を示し，右側に渦線を再掲した。等ポテンシャル線中の矢印は渦面の実質速度を示す。実質速度の様子から，Fig. 5 に示した2本の $\tilde{f}=0$ の線のうち上側の線では渦面の対流効果により渦度が集積し，下側の線では発散することがうかがえる。渦線図において，渦線ベクトルの向きが反転しているのは攪乱成分のみを表示しているためで，右向きは渦度の増加，

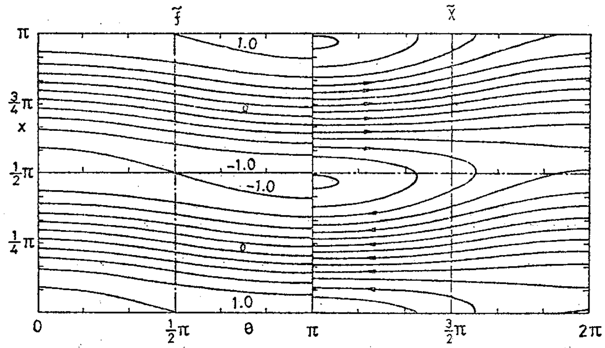

Fig. 5 Equi-$\tilde{f}$ (wave height) lines for $0\leqq\theta\leqq\pi$, and equi-$\tilde{\chi}$ (vortex function) lines for $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$, when $\alpha=2.0$, $\delta=0.3$, $F=-i$, $t=0$

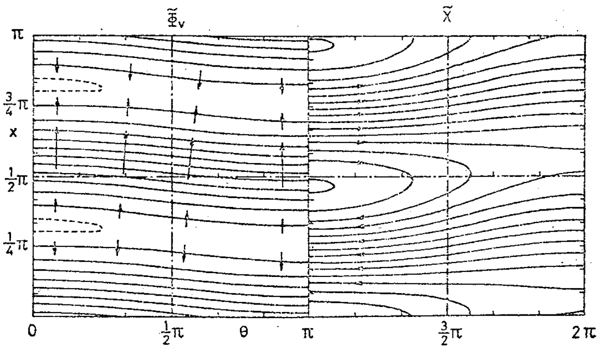

Fig. 6 Equi-$\tilde{\Phi}_v$ (potential function) lines for $0\leqq\theta\leqq\pi$, and equi-$\tilde{\chi}$ (vortex function) lines for $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$, when $\alpha=2.0$, $\delta=0.3$, $F=-i$, $t=0$

左向きは減少に対応し，一方で増加すると他方では減少する様子が見られる。ここで基礎流場の一様渦面と攪乱成分による渦面を重ね合わせると，実験で見られたような流脈が周期的に集まる現象を理解できる。不安定特性のθによる変化は等ポテンシャル線の密度に現われている。すなわち，$\theta=0$と$\theta=\pi$の所では，$\theta=0$の方が密度は高く実質速度は速いから渦度の集積が速やかに進み流れはより不安定となる。なお，より不安定であるべき$\theta=2\pi$の所で$\theta=\pi$の所より渦面の強さが弱いのは，単に相対的なもので，強さを等しくすると$\theta=2\pi$の所の方が波高が高くなる。

また，渦線図から明らかなように，渦面は縦渦成分を持ち，渦度が集積する図の上方の$\tilde{f}=0$の線の近傍では，縦渦ベクトルはxの正の方向を向き，流脈が上方に伸びる事実とよく対応するように思われる。

Fig. 7は上記の結果を立体的に表現したものである。渦面の一部に切目を入れ渦面の強さを厚さで表わし，渦面上に描いた矢印は渦面の実質速度の攪乱成分である。太い実線が大きな渦度を持つ部分で水平面より上を向く。

(3) 攪乱ポテンシャル$\tilde{\Phi}_e$の意味について

円筒外部での攪乱ポテンシャルは (43) 式のように求められている。そのうち

$$\phi_0(x, r)\equiv K_0(\alpha r)\exp(i\alpha x) \tag{49}$$

$$\phi_1(x, r, \theta)\equiv\cos\theta\cdot K_1(\alpha r)\exp(i\alpha x) \tag{50}$$

なる項の意味について考える。ϕ_0, ϕ_1はそれぞれ

$$\phi_0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x'}}{2i\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+r^2}}\right)dx' \tag{51}$$

$$\phi_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x'}}{-2\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+r^2}}\right)dx' \tag{52}$$

のようにフーリエ積分表示できる。ϕ_0は強さ$\mathrm{Re}\{2\pi e^{i\alpha x}/i\alpha\}$のダブレットが$x$方向に軸を向けて$x$軸上に並び，$\phi_1$は強さ$\mathrm{Re}\{2\pi e^{i\alpha x}/(-\alpha)\}$のダブレットが$y$方向に軸を向け$x$軸上に分布した流れの速度ポテンシャルである。一方，基礎流場はx方向に中心軸を持つ渦輪分布と，x軸上の二重渦から成る。

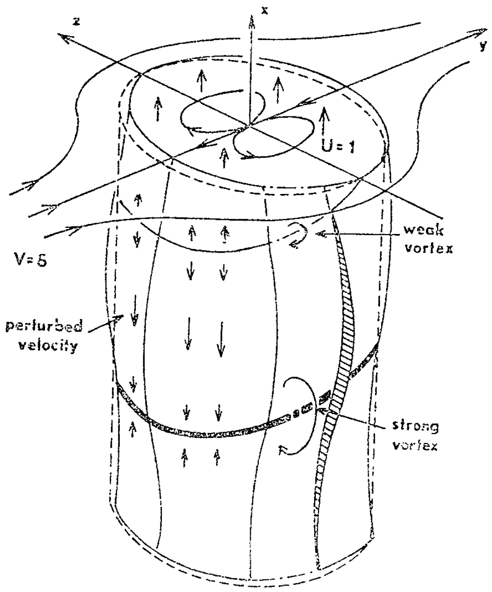

Fig. 7 Perspective view of calculated results

ところで，ダブレットはその軸と同じ方向に中心軸を持つ無限小渦輪とも解釈できるから，ϕ_0は遠場ではx方向に中心軸を持つ渦輪が波長$2\pi/\alpha$で循環を正負に変動させている流れとみなしうる。したがって，この流れと基礎流場の渦輪を重ね合わせると，(2)で述べたように循環の大きい所と小さい所ができ，実験で見られる現象は外部攪乱ポテンシャルの遠場での挙動から推察できる。

次に，二重渦とϕ_1による流れを重ね合わせる。二重渦はyの負の方向に中心軸を持つ無限小渦輪がx軸上に分布していると考えられるから，ϕ_1の重ね合わせによってy方向に中心軸を持つ無限小渦輪の循環が大小に変化しているとみることができる。あるいは，二重渦を有限間隔の一対の縦渦を遠場から見たものと解釈することにすると，この場合，攪乱成分を重ね合わせても渦糸の循環は変化してはならない。このことは縦渦の間隔が変化すると考えれば解決でき，無限小渦輪の循環の大きい所は縦渦の間隔が広い所，小さい所は狭い所に対応する。またx-y平面に関し，対称攪乱であるから縦渦も対称に変形すると考えられ，Crow[8]が縦渦対の安定性を解析した結果と縦渦対が対称に変形するとき不安定であるという点で一致する。実験では縦渦の部分の煙はらせん状に見えるから，煙の濃い部分を渦度の大きい所と考えると縦渦対の間隔が広い部分と狭い部分ができ，理論において二重渦には触れずに解析したにもかかわらず第1近似のモードは実験と同様のモードとなっている。もちろん，この考察は遠場の挙動から近場の様子を推測したものであるから縦渦の局所的構造までは把握できない。

4 結　　言

船尾流場あるいは斜めに保たれたタバコの周りの流場の安定性に関し，基礎流場を円筒噴流と二重渦によって構成し，二重渦が小さいとして非粘性線型安定理論を摂動論的に適用した結果，次のようなことが得られた。

(1) 線型理論の範囲では全く不安定な流れである。その不安定性は，二重渦を伴わない時と比べて，渦の背面ではより不安定，前面では二重渦の強さに応じて不安定性は弱まる。攪乱進行波の位相速度は波数が適当に大きければ円筒噴流のそれとほぼ一致する。また，これらの解析は円筒渦面近傍の部分領域で得られる厳密解のパッチングによる解と一致する。

(2) 攪乱波のモードは，二重渦の強さが有限の時

第0近似的には軸対称のものに限り，ねじれるようなことはない。第1近似では，渦の前面で位相進み，背面で位相遅れの攪乱波を仮定すると，位相差がない時に比べて不安定特性はさらに顕著になり，全体としてはより不安定となる。

（3） 二重渦を一対の縦渦を遠場から見たものと考えると，縦渦対は波長 $2\pi/\alpha$ で対称にその間隔を広げたり狭めたりすると解釈でき，対称攪乱のモードという点で Crow の解析と一致する。

（4） 裸殼船尾流場とタバコの周りの流場とでは，乱流と層流，後流と自然熱対流など若干の違いがあるにもかかわらず，よく似た鎖状進行波が形成され，その形状は上記の非粘性的な理論から推測されるものとよく一致する。

本稿を終わるにあたり，有益な御討論をいただいた本学講師 鈴木敏夫氏に深く感謝いたします。また，当時技官であった志賀信明氏の写真撮影に関する御努力に御礼申し上げます。なお，本研究には科学試験研究費の補助を受けたこと，また，数値計算には大阪大学大型計算機センター NEAC-2200 モデル 700 を使用したことを付記し，関係各位に感謝するしだいである。

参 考 文 献

1) 種子田定俊，天本 肇：船の剥離渦（I），九州大学応用力学研究所所報，第 27 号 (1967).
2) 種子田定俊，天本 肇：船の剥離渦（II）：九州大学応用力学研究所所報，第 29 号 (1968).
3) A. A. Townsend : The mechanism of entrainment in free turbulent flows, J. Fluid. Mech. Vol. 26 (1966).
4) W. C. Reynolds : Large-scale instabilities of turbulent wakes, J. Fluid. Mech. Vol. 54 (1972).
5) SR 159 研究部会：新経済船型開発のための肥大船船尾まわりの流場に関する研究，日本造船研究協会報告 (1976).
6) F. R. Hama : Streak line in a perturbed shear flow, Phys. Fluids, Vol. 5, 6 (1962).
7) 巽 友正，後藤金英：流れの安定性理論，産業図書 (1976).
8) S. C. Crow : Stability theory for a pair of trailing vortices, AIAA Journal, Vol. 8, 12 (1970).
9) G. K. Batchelor and A. E. Gill : Analysis of the stability of axisymmetric jets, J. Fluid. Mech. Vol. 14 (1962).
10) J. D. Cole : Perturbation methods in applied mathematics, Blaisdell Publishing Company (1968).
11) Batchelor（橋本，松信 他訳）：入門流体力学，東京電機大学出版会 (1974).
12) J. C. Maxwell : A treatise on electricity and magnetism, Vol. 2, Dover Publications (1954).

付 録

本論の近似の程度を知るために本文で提案した基礎流場モデルを別の方法で考えてみる。$\theta=\theta_0$ で円筒渦面の近傍を取り扱うものとし

$$\rho\equiv r-1 \tag{1}$$

$$\varphi\equiv\theta-\theta_0 \tag{2}$$

と新たな変数 ρ, φ を定義する。θ_0 を定数とし本文の基礎流場モデルを ρ, φ の2次の項まで考慮すると，新たな基礎流場モデルとして

$$\bar{\Phi}_i=x+\delta\{(\rho^2-\varphi^2)\cos\theta_0-2\varphi\sin\theta_0\} \tag{3}$$

$$\bar{\Phi}_e=\quad\delta\{(\rho^2-\varphi^2)\cos\theta_0-2\varphi\sin\theta_0\} \tag{4}$$

を得る。これは円筒渦面の曲率を0と考えたことと同等である (Fig. 8)。x, ρ, φ を直交座標とし，本文と同様に $\tilde{f}$, $\tilde{\Phi}_i$, $\tilde{\Phi}_e$ に対する支配方程式を導けば，増幅攪乱に対応する厳密な固有関数は次のように求められる。

$$\tilde{f}=\exp[i\alpha(x-ct)] \tag{5}$$

$$\tilde{\Phi}_i=\{i(1-c)-(2\delta\cos\theta_0/\alpha)\}\times\exp[i\alpha(x-ct)] \tag{6}$$

$$\tilde{\Phi}_e=\{ic+(2\delta\cos\theta_0/\alpha)\}\times\exp[i\alpha(x-ct)] \tag{7}$$

$$c=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\left\{\frac{2\delta\cos\theta_0}{\alpha}+\sqrt{1+\left(\frac{2\delta\cos\theta_0}{\alpha}\right)^2}\right\} \tag{8}$$

（5）～（7）式は本文 (41)～(43) とよく似た形をしている。また，（8）式を $\delta/\alpha\ll1$ として展開すると

$$c=\frac{1}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta\cos\theta_0}{\alpha}\right)+O\left(\frac{\delta^2}{\alpha^2}\right) \tag{9}$$

となり，本文 (45) 式と実部を除き1次の項まで一致する。実部の不一致は円筒渦面の曲率を0としたためであるから度外視すれば，本文で $F=0$ とした解はこの章で行なった部分領域のパッチングによる解と考えられる。

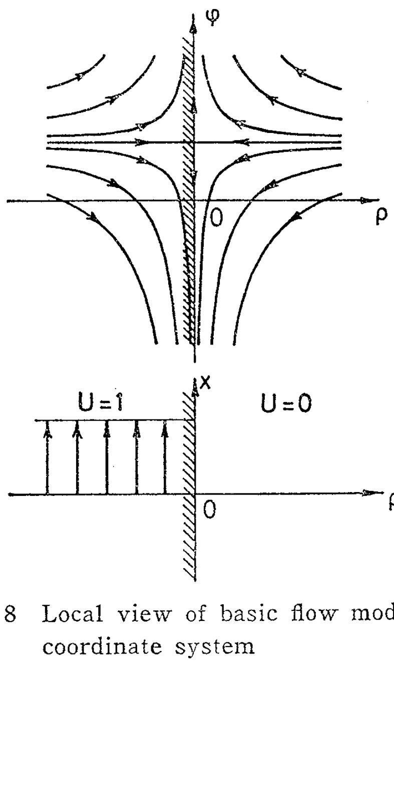

Fig. 8 Local view of basic flow model and coordinate system