（昭和54年11月　日本造船学会秋季講演会において講演）

内部・外部解接続法による粘性流場の解析

正員　山本善之*　正員　大和裕幸**

A Method of Analysis for Steady Viscous Flow in an Infinite Domain

by Yoshiyuki Yamamoto, *Member*　Hiroyuki Yamato, *Member*

Summary

In this paper, a method of analysis for steady viscous flow past a body in an infinite domain is proposed on a matching method of inner and outer solutions which may be regarded as an extension of the method of superposition proposed by the present authors.

Viscous flow under consideration are described by the Navier-Stokes equations and the equation of continuity together with appropriate boundary conditions on the body surface and at infinity. It is, however, difficult to solve this nonlinear boundary value problem in an infinite domain, although the finite-element and finite-difference methods are effective tools for solving the Navier-Stokes equations in a restricted domain. If the far field solutions of the governing equations are given properly, the domain of numerical analysis for the Navier-Stokes equations is reduced to the finite one by the use of the method of matching inner and outer solutions.

Assuming that the disturbance caused by an obstacle is small, Oseen linearized the Navier-Stokes equations, and the resulting equations can be solved in an analytical form. Oseen's approximation becomes highly accurate at a far distance from the body. Moreover, in the case of two-dimensions, Imai proposed an asymptotic solution on the basis of the Navier-Stokes equations by the successive approximation.

In the present method, the infinite domain of analysis is divided into the inner and outer domain by introducing a fictitious surface. Oseen and Imai's approximate solutions can be used for the outer domain. The inner solution is given by solving the Navier-Stokes equations by the finite-element method and is matched on a fictitious surface with the outer solution. The present method is applied to two-dimensional and axi-symmetric problems including the practical analysis of the force acting on the mushroom anchor in the mud which can be regarded as viscous fluid. The validity of the present method is illustrated by numerical studies on the flows past a circular cylinder and a sphere whose results are in fairly good agreement with experiments by the previous authors.

1 はじめに

無限流体中におかれた物体のまわりの粘性流場の解析は流体力学の基本的な問題であり，その工学的応用範囲も広く，古くから多くの研究が行なわれている。しかしながら，この問題は無限領域で定義された非線形の Navier-Stokes の方程式（以下，N.S. の式と略記する）を物体表面と無限遠方での条件を満たすように解かねばならず，解析は非常に困難である。そのため，N.S. の式を線形化した近似方程式，すなわち Stokes, Oseen の式が提案されている[1),3)]。これらは，いずれも解析的に解を求めることができるが，Stokes の式は物体から離れた所では成立せず，また逆に Oseen の式[3),4)]は流れの物体から遠く距った所での漸近的な挙動はよく表わしうるが，物体近傍での流場を正しく表わすことができない。数値的な解法としては，N.S. の式を差分法[8)~10)]，有限要素法[5),6)]等によって解くことができるが，解析領域が有限な大きさであるため，無限遠方での条件をどのようにするかが困難な問題となる。そこで，無限領域を内部領域と外部領域に分割して，各々に対して適した支配方程式を採用して，その両者の解を接続する方法が考えられる。Proudman & Pearson[7)]は内部に Stokes 展開，外部に Oseen 展開用いる，いわゆる特異摂動法によって形式的に接続することを考えた。さらに，Kawaguti ら[8)~10)]は，外部解として Oseen の解や今井[11)]の漸近解を用い，内部領域では差分法により N.S. の式を

* 東京大学工学部船舶工学科

** 東京大学工学系大学院

解き外部解を一つの仮想境界上で接続して解を求めた。本研究では，同じく内部・外部解法によって解析を行なうが，内部領域では，粘性流体力学の分野でも盛んに用いられるようになった有限要素法を用い，任意の形状の物体のまわりの流れを解析しうるものとなっている。本解析法は，既にクラックの応力解析[12]や波動問題[13]に適用され良好な結果の得られている重ね合わせ法の非線形問題への拡張となっている。数値計算例としては，円柱，角柱，平板，球，円柱のまわりの流れの解析を行ない，円柱と球については Taneda ら[14)~16)]の実験値とよく一致した解が得られた。さらに一つの応用として，海底泥中のマッシュルームアンカーの流れの解析を，海底泥を粘性流体とみなして行ない，その把駐力については一つの実用公式を求めた。

2 解析法

本研究で用いた解析法は以下の手続きによる。

1. Fig. 1 に示されるように無限領域を物体Bを取り囲む適当な大きさの仮想境界Cによって内部領域 D_I と外部領域 D_O とに分割する。

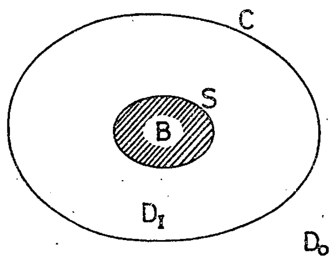

Fig. 1 Method of analysis

2. D_O では物体から充分離れた流れを表わす解析解を未知パラメータを含む形で求め，これを外部解とする。ここでは Oseen の解，あるいは今井の漸近解も採用した。

3. D_I では有限要素法により N.S. の式の解を外部解と連続になるように定める。

4. 応力に関する C 上での連続条件によって外部解の未知パラメータを定めるが，ここでは合力（抵抗と揚力とに相当する）の平衡条件を用いる。

3 非圧縮定常粘性流体の基礎方程式と外部解

ここでは適宜デカルト座標 (x, y, z)，円筒座標 (x, r, φ)，極座標 (r, θ) を用いる。まず流場の方程式として N.S. の式

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p+\nu\Delta\boldsymbol{u} \tag{1}$$

連続の式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

ρ：密度，ν：動粘性係数，D/Dt は物質微分を表わす。

二次元流の場合（2）式より流れ関数 ψ と，渦度 ω とを導入し，N.S. の式（1）は

$$\frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)}=-\nu\Delta\omega \tag{3}$$

となり，ψ と ω の間には

$$\omega=-\Delta\psi \tag{4}$$

が成立する。軸対称流の場合も二次元流と同様にして Stokes の流れ関数 ψ と渦度 ω を用いて，N.S. の式は

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, r)}-\frac{\omega}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\nu\left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)\omega \tag{5}$$

となり，ψ と ω の内には

$$\omega=-\frac{1}{r}\Delta\psi \tag{6}$$

が成立する。

次に N.S の式のうち慣性項が粘性項に比して十分小さいとして，Stokes の式（7）が得られる。

$$\operatorname{grad} p=\mu\Delta\boldsymbol{u} \tag{7}$$

μ は粘性係数である。Stokes の式（7）は慣性項を全く無視しているため物体から離れた所での流れを表わすことができない。これに対して Oseen は N.S. の式（1）の慣性項のうち，主流方向の慣性のみを近似的に残し，次のような Oseen の式（8）を提案した。

$$U_\infty\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p+\nu\Delta\boldsymbol{u} \tag{8}$$

主流は x 軸の正の方向で，U_∞ は無限遠方での一般流の速度である。（8）式は物体から遠い所での流れを正しく表わすものと考えられる。さらに（8）式は解析的に解くことができる。その代表的な解が，原点におかれた Oseenlet による流れであって，その Oseenlet の強さを C として，二次元流では複素速度 $W=u-iv$ が，軸対称流では流れ関数 ψ が，それぞれ簡単な形で与えられ，(9), (10) 式のようになる。

$$W=C\left[e^{kx}\{K_0(kr)+K_1(kr)e^{-i\theta}\}-\frac{1}{kz}\right] \tag{9}$$

$k=U_\infty/(2\nu)$，$K_n(kr)$ は n 次の第二種変形 Bessel 関数

$$\psi=C(1+\cos\theta)(1-e^{-k(r-x)}) \tag{10}$$

(10) 式において

$$r^2=x^2+y^2+z^2,\ \cos\theta=x/r$$

(9), (10) 式は原点で特異となっており，原点に加わる力を求めると，それぞれ $4\pi\mu C$，$4\pi\rho U_\infty C$ と求まる。

二次元流の場合，今井[11]は Oseen の式（8）をもとに，N.S. の式の漸近解を求めた。これを今井の漸近解といい，流れ関数 ψ は対称流の場合

$$\psi=U_\infty y+\psi_1+\psi_2+\cdots\cdots \tag{11}$$

$$\psi_1=\frac{m}{2\pi}\theta-\frac{m}{2}\operatorname{erf}\eta \tag{12}$$

$$\psi_2=-\frac{km^2}{4\sqrt{\pi}U_\infty}\frac{1}{\xi}\{\sqrt{2}\operatorname{erf}(\sqrt{2}\eta)-e^{-\eta^2}\operatorname{erf}\eta\} \tag{13}$$

$\xi=\sqrt{2kr}\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\eta=\sqrt{2kr}\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\mathrm{erf}\,\eta=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-x^2}dx$
と表わされ，ここで抵抗は $X=\rho U_\infty m$ で与えられる。(9), (10), (11) 式を外部解として用いる。

4　内部領域での有限要素解析

二次元流についてまず説明する。未知数としては，流れ関数 ψ と渦度 ω を用いる。通常，変分原理によって有限要素法の定式化がなされるが，N.S. の式には汎関数が存在しないので，ここでは Galerkin 法を用いる。ψ, ω それぞれの重み関数 Ψ, Ω を導入し，N.S. の式 (3) と渦度の定義式 (4) にそれぞれ Ψ, Ω を乗じ積分し，さらに部分積分して

$$\iint\left\{\frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,y)}\Psi-\nu\nabla\omega\cdot\nabla\Psi\right\}dx\,dy+\nu\int\frac{\partial\omega}{\partial n}\Psi\,dS=0 \tag{14}$$

$$\iint(\omega\Omega-\nabla\psi\cdot\nabla\Omega)\,dx\,dy+\int\frac{\partial\psi}{\partial n}\Omega\,dS=0 \tag{15}$$

を得る。周回積分の項を0とおけば境界条件は強制条件となる。したがって離散化すべき方程式は

$$\iint\left\{\frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,y)}\Psi-\nu\nabla\omega\nabla\Psi\right\}dx\,dy=0 \tag{16}$$

$$\iint(\omega\Omega-\nabla\psi\cdot\nabla\Omega)\,dx\,dy=0 \tag{17}$$

となる。これに対して線形三角形要素を用いて離散化を行なう。非線形項の処理には Newton-Raphson 法を用いた。

同様にして軸対称流では (5), (6) 式より

$$\iint\left\{\frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,r)}\Psi-\frac{\omega}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\nu(\nabla\omega\cdot\nabla\Psi)\,r-\frac{\nu}{r}\omega\Psi\right\}dx\,dr=0 \tag{18}$$

$$\iint\left(r^2\omega\Omega-r\nabla\psi\cdot\nabla\Omega-2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Omega\right)dx\,dr=0 \tag{19}$$

軸対称流に対しては，Fig. 2 に示すようなリング状要素を用い，変数はすべて線形内挿する。Fig. 1 の C の内面に作用する合力の算出には，これと同等な積分路を D_I 内に適当に選び，運動量流ベクトルを積分する。

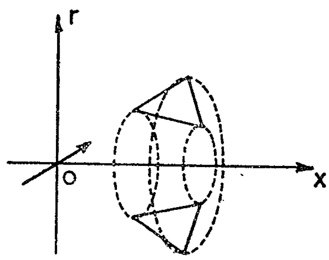

Fig. 2　Ring element

5　二次元問題

本研究においては，他の解析結果[8)~10)] や実験値[14),15)] との比較のため，二次元流としては円柱，角柱，流れに垂直におかれた平板のまわりの流れを解析した。いずれも対称流であるので，解析は半平面について行なう。

A. 円柱まわりの流れ

円柱まわりの流れは，理論的，実験的に多くの研究があり，本研究においても，以下に述べる三つの解析法を試みた。

1) 外部解：Oseenlet による流れ，内部解：Stokes の式の解 (Oseen-Stokes)
2) 外部解：Oseenlet による流れ，内部解：N.S. の式の解 (Oseen-N.S.)
3) 外部解：今井の漸近解，内部解：N.S. の式の解 (Imai-N.S.)

1) は二つの線形方程式の通常の重ね合わせ法で，簡単に解の接続が行なえ，慣性力の影響の小さい低 Reynolds 数（以下 Reynolds 数を Re 数と略記する）の流れの解析にはよい。2), 3) はそれぞれ，線形-非線形，非線形-非線形の解の接続となり，内・外部解の接続に際しても繰り返し計算が必要である。Fig. 3 に内部領域と有限要素分割の様子を示した。Fig. 3 を用いて得られた $Re(=U_\infty d/\nu)=15$ の場合の解を Fig. 4(a) に流線，Fig. 4(b) に等渦度線図を示した。各図の左肩の Oseen-Stokes 等は外部解と内部解の対応を示している。Fig. 4 (a), (b) において，最下段の図は Keller & Takami[9)] によるもので，その解法は本法の 2) と同じで，数値計算には差分法を用いている。流れの様子は，内部領域で N.S. の式を用いているものは三者ともよく似たものとなっているが，Stokes の式を用いたものは物体の直後の双子渦ができない。Fig. 5 には抵抗係数を Re 数に対してプロットした。線で結んだものが本法によるものであるが Oseen-Stokes は Re 数の小さい範囲で実験と一致し，逆に Imai-N.S. は比較的大きい Re 数で実験と一致し，Oseen-N.S. はやや大きめではあるが，Re 数の広い範囲にわたり，よい結果が得られている。Fig. 6 には Oseen-N.S. によって得られた流れの双子渦の大きさを種子田[14)]による実測値などと共に示した。本解析法による計算値はよく実測値と一致している。Oseen-

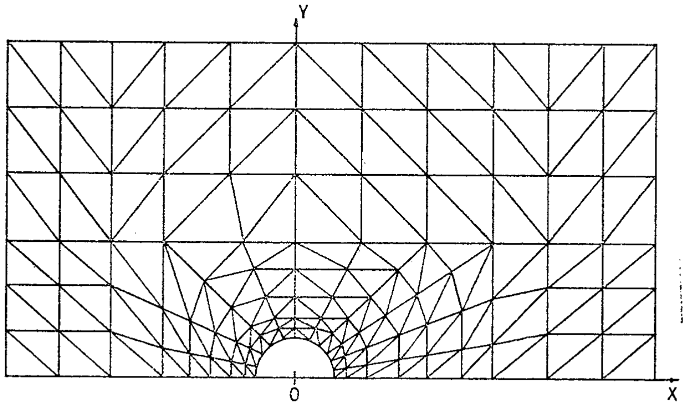

Fig. 3　Inner domain and mesh subdivision for a circular cylinder

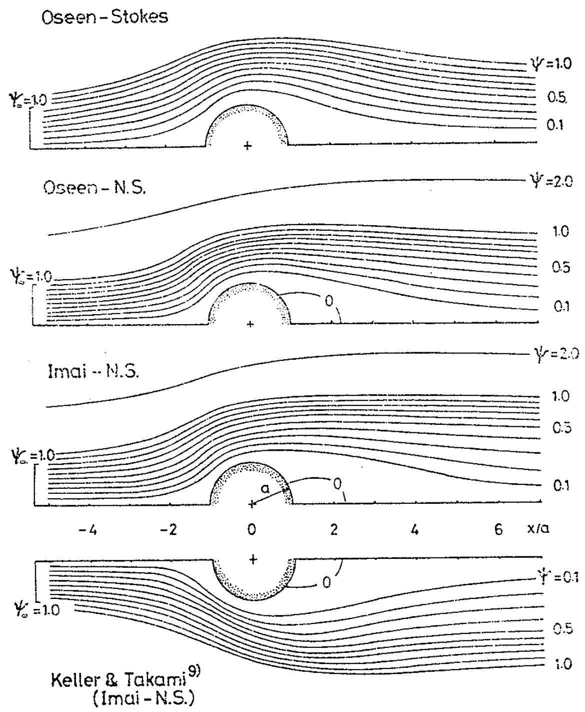

Fig. 4 (a) Flow past a circular cylinder at $Re=15$: Stream line

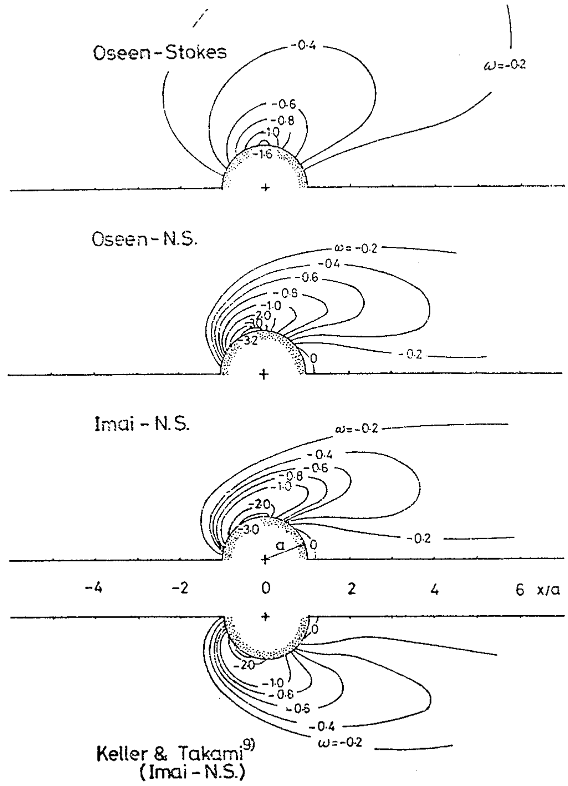

Fig. 4 (b) Flow past a circular cylinder at $Re=15$: Equi-vorticity line

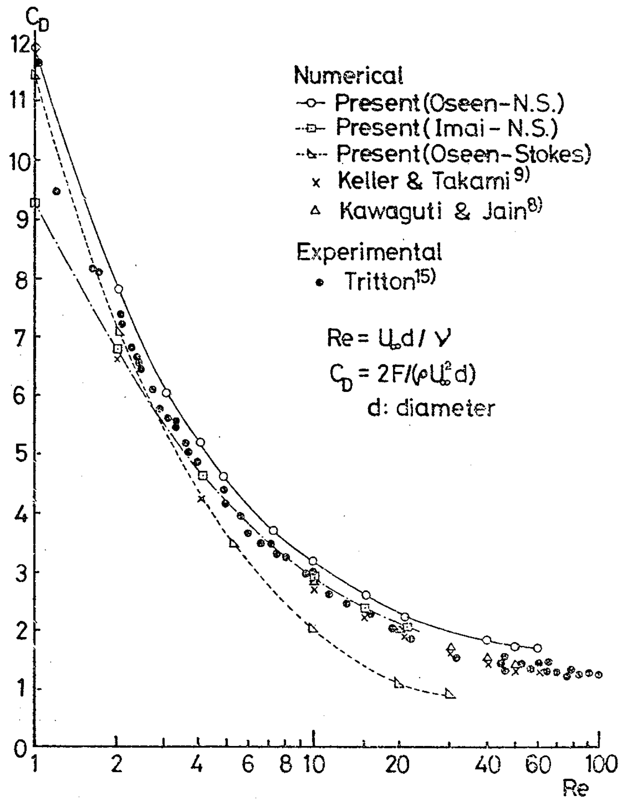

Fig. 5 Drag coefficient of a circular cylinder

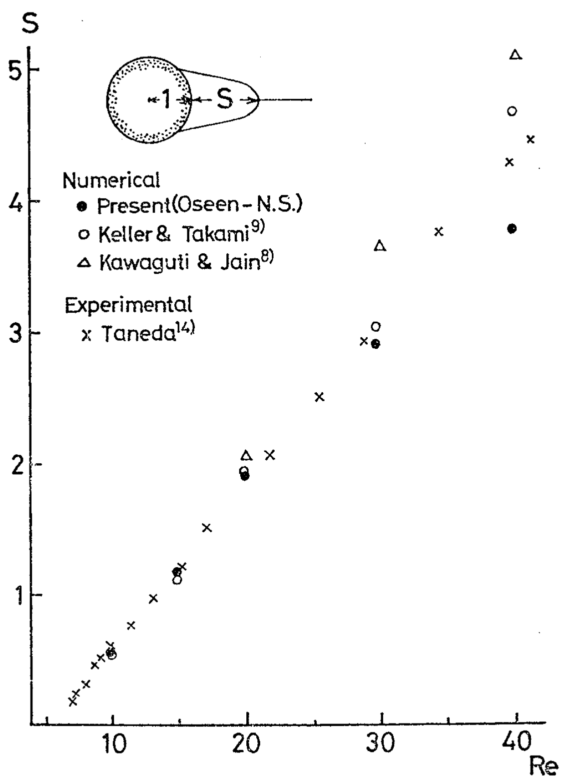

Fig. 6 Length of twin vortices

N.S. では Re 数が100程度まで解の求まることを確かめてあるが，現実の流れでは，円柱の場合 Re 数が 35 あたりから流れは定常ではなくなってくる。したがって，Re 数が40以上の流れの解析には特別な考慮が必要となり，今後の課題である。

B. 正方形柱まわりの流れ

正方形柱のまわりの流れの解析を行なった。以下の数値計算例はすべて外部解として Oseenlet による流れ，内部に N.S. の式の解を用いた。Fig. 7 に Re 数が 10 の流れの様子を示した。内部領域は，正方形の中心を原点にして，正方形の長さを a として，$-3.5a<x<5.5a$, $-4a<y<4a$ の矩形領域である。円柱に比べて双子渦

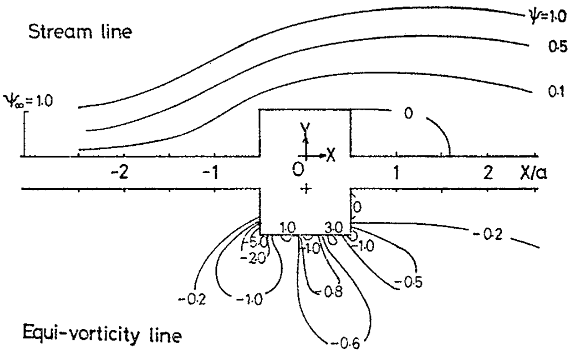

Fig. 7 Flow past a square cylinder at $Re=10$ (Oseen-N.S.)

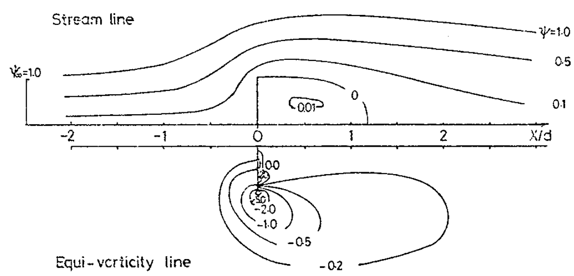

Fig. 8 Flow past a flat plate of breadth d at $Re=6$ (Oseen-N.S.)

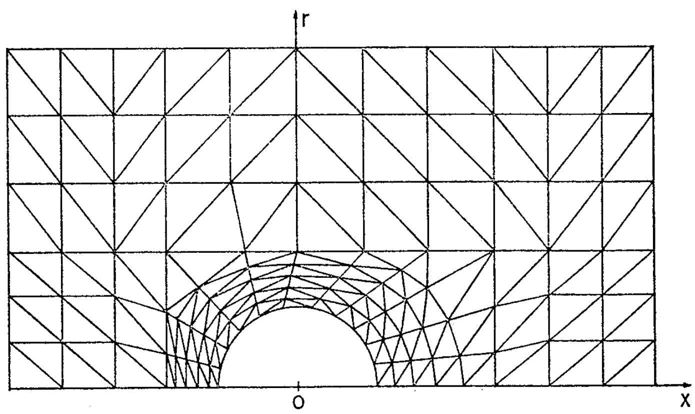

Fig. 9 Typical inner domain and mesh subdivision for a sphere

が Re 数の低いところから出ており，抵抗係数は Re 数の低いうちは円柱のそれに近く，高くなると平板のそれに近づいていく。

C. 流れに垂直におかれた平板のまわりの流れ

この問題は Kirchhoff が hodograph 法により死水モデルを導入して解析し，抵抗係数 0.88 を得たが，実在流体ではもっと大きな力が板に加わる。内部領域は，板幅を d として，$-2.5d<x<3d \sim 4d$, $-2.5d<y<2.5d$ で，Re 数が増すと剝離領域が大きくなるため，Re 数に応じて内部領域の大きさを変えてある。Re 数$=6$ の場合について得られた結果を Fig. 8 に示した。非常に bluff であるため，かなり低い Re 数から双子渦ができるが，抵抗係数は円柱の場合よりやや大きい程度である。

以上，二次元問題の数値解析例について述べた。ここでは対称流のみを扱ったが，非対称な流れでも，今まで述べてきたのと同様に，物体に揚力を与えるような循環を考慮し，抵抗と揚力を内部・外部両領域で合わせて解を求めればよい。

6 軸対称問題

軸対称問題としては，球，円板，マッシュルーム錨のまわりの流れの解析を行なった。外部解として Oseenlet による流れ，内部解として N.S. の解を用いた。三次元問題では内部の有限要素解を求めるに際して非常に誤差が入りやすく解析には注意を要する。また外部解として用いた Oseenlet による流れは，物体による攪乱が，二次元のそれより早く減衰してしまうため，内部領域を小さくすること，特に流れに垂直の方向に小さくし，有限要素分割を細かくするなどの配慮を行なわなくては解が求まらなくなる。

A. 球のまわりの流れ

Fig. 9 に Re 数$=10$ の流れの解析に用いた内部領域の大きさと有限要素分割の様子を示した。$1<Re<10$ 程度では，このくらいの内部領域でよいようである。Fig. 10 に Re 数が10の流れを示した。物体後方の剝離は Re 数の低い所から現れている。Fig. 11 には球の抵抗係数を Re 数に対して示してある。本法による計算値は Wieselsberger[16] による実験値とよく一致している。図中の Stokes, Oseen とあるのは各々 Stokes の解，Oseen の解である。Chester & Breach[17] によるものは摂動法によって N.S. の式に基づいて解を求めたものであって，$Re \to 0$ の極限で厳密になるが Re が増えると実際と合わなくなる。

B. 流れに垂直な円板のまわりの流れ

Fig. 12 に Re 数が5の流れを示した。内部領域

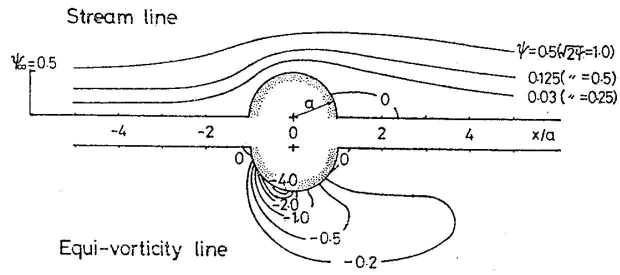

Fig. 10 Flow past a sphere of diameter d at Re=10 (Oseen-N. S.)

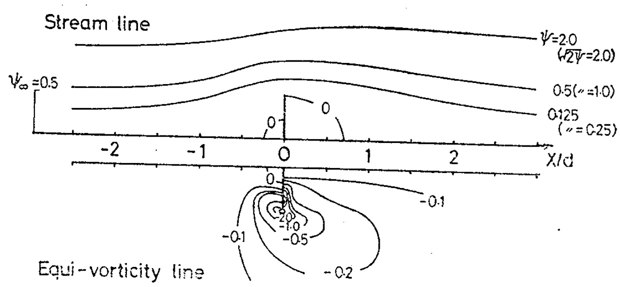

Fig. 12 Flow past a circular flat plate at Re=5 (Oseen-N. S.)

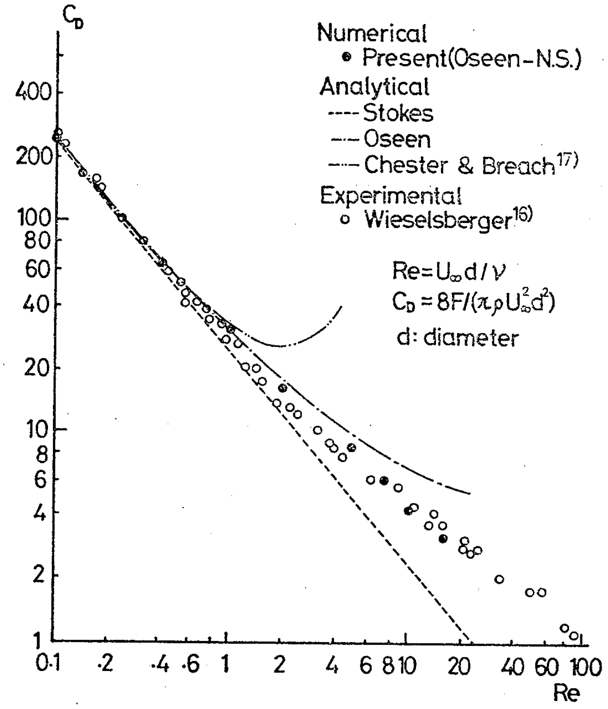

Fig. 11 Drag coefficient of a sphere

本節および付録に述べたように粘土質が水にとけたような海底土質の場合には錨のまわりの流場と錨の把駐力をその速度依存性の見地から明確にすることができる。もちろん，ここで求めた計算値には多くの仮定や現実にそぐわない面も含まれており，すぐに実用に供しうるものではないが，このような考え方により，錨の把駐力の概略の値であるにしても，理論的に与えうるのは意味深いことであろう。

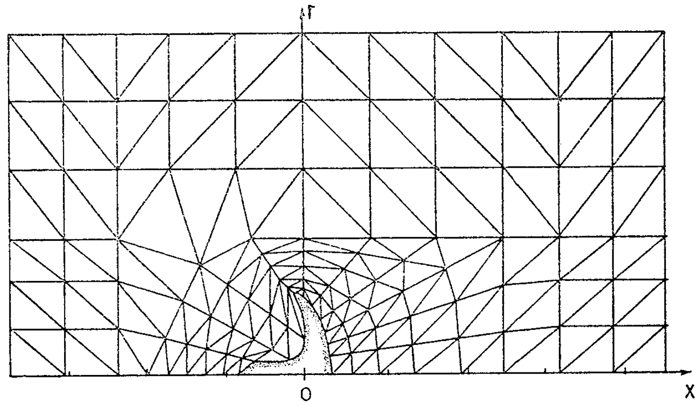

Fig. 13 Typical inner domain and mesh subdivision for a mushroom anchor

は板幅を d として，$-3.5d\sim-2.0d<x<2.5d\sim4.5d$, $-2.5d\sim4.5d<y<2.5d\sim4.5d$の範囲のものを Re 数に応じて用いた。Re の大きい時には内部領域は小さくしてある。板の前にも水がたまっているのがわかる。抵抗は球のそれとほとんどかわらないようである。

C．マッシュルーム錨のまわりの流れ

前節までにおいて，本解析法が低 Re 数の軸対称流に対しても非常に有効であることがわかった。そこで本節においては，海底のヘドロを粘性流体とみなし，ヘドロ中を埋没して定常的に移動するカップ型マッシュルーム錨のまわりのヘドロの流場を解析し，錨に加わる力を解析する。ヘドロの粘性係数などの算出法[17),18)]，錨の把駐力の詳細は付録に述べる。マッシュルーム錨の形状，内部領域は Fig. 13に示すようである。Fig. 14 には，Re数=3 の流れの様子を示したが，アンカーの内側にも土がたまり，球のような形になっている。抵抗係数も同じ径の球と実用上同じである。

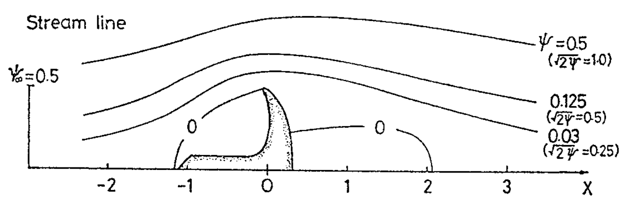

Fig. 14 Flow around a mushroom anchor at Re=3 (Oseen-N. S.)

7 結　　論

以上によって，外部領域に Oseen の解，内部領域で，N. S. の有限要素解を得，両者を仮想境界上で接続する本解析法によって，低 Re 数の流れについて，二次元流，軸対称流ともに実験と一致する結果の得られることがわかった。本法によれば，渦が遠方にまで伝播していくことを考慮した粘性流体力学の外部問題の合理的な解が得られる。

また応用問題として，海底泥中で作動するマッシュルーム錨の把駐力を速度との関連において明確にした。

本研究においては，流れを定常流としているが，ここで扱った Re 数の領域においても既に流れは乱動運動を含んでおり，さらに Re 数の高い流れの解析に際しては，このような乱動状態を考慮し，場所によって粘性係数を変えるなどの物理的な考慮を行なわなくてはならない。

最後に，本研究を行なうにあたり，有意義な御討論いただいた東大工学部教授 高見穎郎先生，同 加藤洋治先生，同 助教授 大坪英臣先生，錨について御指導たまわった，東大生産技術研究所助教授 浦環先生に心から感謝いたします。

参考文献

1) 今井 功：流体力学，裳華房，1973.
2) 大和裕幸：重ね合わせ法による粘性流場の解析(東京大学修士論文)，昭和54年3月.
3) Goldstein, S. (eds.) : Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. I, II, Oxford University Press, 1938.
4) Tomotika, S. & Aoi, T. : The Steady Flow of Viscous Fluid past a Sphere and Circular Cylinder at Small Reynolds Numbers, Quart. J. Mech. & Appl. Math., Vol. III, Part 2, 1950, 140～161.
5) Oden, J. T., Zienkiewicz, O. C., Gallagher, R. H. & Taylor, C. (eds.) : Finite Element Methods in Flow Problems, Univ. of Alabama Press, 1974.
6) 池ノ内昌弘，木村憲明：有限要素法・粘性流れの解析，日本造船学会誌，No. 558, 1975, 573～578.
7) Proudman, I. & Pearson, J. R. A. : Expansion at Small Reynolds Numbers for the Flow Past a Sphere and a Circular Cylinder, J. of Fluid Mechanics, Vol. 2, 1957, 237～262.
8) Kawaguti, M. & Jain, P. : Numerical Study of a Viscous Fluid Flow past a Circular Cylinder, J. of the Phys. Soc. of Japan, Vol. 21, No. 10, 1966, 2055～2062.
9) Keller, H. B. & Takami, H.: Numerical Studies of Steady Viscous Flow about Cylinders, Numer. Solutions of Nonlinear Dif. Equations, John Wiley & Sons, 1966, 115～140.
10) Dennis, S. C. R. & Chang, G. Z. : Numerical Solutions for Steady Flow past a Circular Cylinder at Reynolds Numbers up to 100, J. of Fluid Mech., Vol. 42, Part 3, 1970, 471～489.
11) Imai, I. : On the Asymptotic Behavior of Viscous Fluid Flow at a Great Distance from a Cylindrical Body with Special Reference to Filon's Paradox, Proc. of Roy. Soc., A, Vol. 208, 1951, 487～516.
12) Yamamoto, Y. & Sumi, Y. : Stress Intensity Factor For Three-Dimensional Cracks, Intern. J. of Fracture, Vol. 14, 1978, 17～38.
13) 山本善之，中野孝昭，光田哲久：有限要素法による定常波動問題の基礎的研究（第2報），日本造船学会論文集，Vol. 140（昭和51年12月），121～126.
14) Taneda, S. : Experimental Investigation of the Wake behind Cylinders and Plates at Low Reynolds Numbers, J. of the Phys. Soc. of Japan, Vol. 11, No. 2, 1956, 302～307.
15) Tritton, D. J. : Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers, J. of Fluid Mech., Vol. 6, 1956, 547～567.
16) Wieselsberger, C. : Phys. Zeitschr., Vol. 22, 1921, 321.
17) Chester, W. & Breach, D. R. : On the Flow Past a Sphere at Low Reynolds Number, J. of Fluid Mech., Vol. 37, Part 4, 1969, 237～262.
18) 後藤廉平，平井西夫，花井哲也：レオロジーとその応用，共立出版，1962
19) 中野和夫，窪田八洲洋，神田修治：マッシュルーム錨の特性に関する実験研究，関西造船協会誌，Vol. 127, 1967, 9～15.

付録　マッシュルーム錨の把駐力[19)]

本研究においては以下の事項を仮定する。

1. 泥は粘土の液状となったものであって，ニュートン流体である。
2. 泥は無限に広がっているものとし，海底面の影響等は無視する。

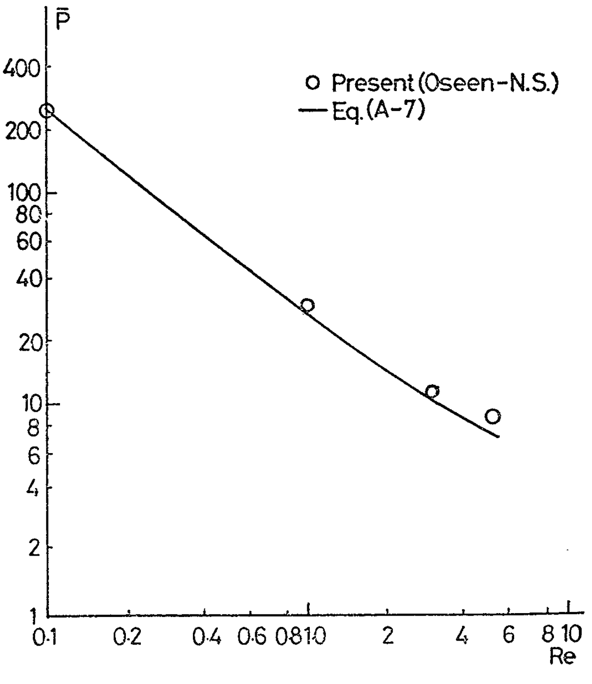

Fig. A-1 Holding power of mushroom anchor

3. 重力の影響も無視する。
4. 一方向の定常運動である。

まず1の仮定のもとに，海底土質の粘性係数μを求める。レオロジー[18]の教えるところによると，溶液（サスペンジョン）の粘性係数μは，溶媒の粘性係数μ_0との比をとり，次の Brinkman の式（A-1）が成立する。

$$\mu/\mu_0=(1-1.35\phi)^{-K} \tag{A-1}$$

ここにϕは体積分率，Kは分散質の形状による定数で，粘土の場合 22.5 である。体積分率ϕは，粘土の液性限界（水と乾粘土の重量比で定義され，この値を超えると粘土は液状となる）を，約 50% であるとし，これを体積分率になおすと，乾粘土の比重は 2.7 であるので，ϕはほぼ 0.4 と求まる。15°C の真水に粘土が溶けた状態では $\mu_0=1.138\times10^{-3}(\mathrm{N\cdot s/m^2})$ であるので，$\phi=0.4$ として

$$\mu\approx(1-1.35\times0.4)^{-22.5}\times1.138\times10^{-3} \approx 4.41\times10^4\ (\mathrm{N\cdot s/m^2}) \tag{A-2}$$

さらに，このとき粘土の密度 $\rho=1760(\mathrm{kg/m^3})$ であるので，動粘性係数νは

$$\nu\approx25.0\ (\mathrm{m^2/s}) \tag{A-3}$$

と求まる。したがって，海底泥中を直径 2m の錨が，毎秒 10cm で動いたとき $Re\approx0.008$ となる。

上記の値を用いて解析を行ない，無次元化された把駐力 $\bar{p}$ を Re に対して Fig. A-1 に示した。ここで $\bar{p}$ は，Fを把駐力，Aを錨の cap の投影面積として

$$\bar{p}=2F/(\rho U_\infty^2 A)\equiv C_D \tag{A-4}$$

である。$\bar{p}$ は通常の把駐力係数でなく，いわゆる抵抗係数 C_D である。Fig. A-1 と Fig. 12 と比較して，マッシュルーム錨の無次元化された把駐力$\bar{p}$は同じ径の球の抵抗係数とほぼ同じであることがわかる。したがって，$\bar{p}$ に関する簡単な実用公式を球の抵抗係数に関する Stokes の式と Oseen の式とから，Fig. A-1 の結果を用いて作ることができる。Stokes の式，Oseen の式はそれぞれ

$$C_D=24/Re \tag{A-5}$$

$$C_D=(24/Re)\left(1+\frac{3}{16}Re-\frac{90}{1280}Re^2+\cdots\right) \tag{A-6}$$

と表わされる。この2式の平均値によって $0.1<Re<5$ におけるカップ型マッシュルーム錨の無次元化された把駐力$\bar{p}$の概略値を与えることができる。

$$C_D=\bar{p}=(24/Re)(1+3\times Re/32) \tag{A-7}$$

（A-7）は理論的に導いたものではないが，Fig. A-1 に示すように本法による解とよく一致し，現実的な公式と考えられる。なお，（A-7）を用いると海底泥中を毎秒 5cm で動く直径 2m のマッシュルーム錨の把駐力は約 4.3ton と計算される。