(昭和 54 年 11 月　日本造船学会秋季講演会において講演)

薄肉開断面曲線梁の弾塑性曲げ振り解析

正員 藤　田　　譲*　正員 野　本　敏　治*
正員 張　　昌　斗**

Elasto-Plastic, Flexural-Torsional Analysis of Thin-Walled Curved Beams

by Yuzuru Fujita, *Member*　Toshiharu Nomoto, *Member*
Chang Doo Jang, *Member*

Summary

In this paper, elasto-plastic, flexural-torsional analysis of curved beams subjected to thrusts and bending moments applied in the plane of initial curvature is carried out by using Galerkin method. This method provides not only continuous distributions of stresses and displacements but also substantial cut of computing time compared with FEM because the size of final simultaneous equations could be considerably reduced.

The results of elastic analysis (lateral buckling loads, deflections of beams) are in fairly good agreement with those of S. P. Timoshenko[3] and V. Z. Vlasov[4]. From the results of elastoplastic analysis, it is clarified that initial imperfections such as initial deflections and residual stresses due to welding result in considerable reduction of lateral-torsional buckling strength.

The authors also suggest a simplified method to estimate elasto-plastic, lateral-torsional buckling load of curved beam with I-sections subjected to uniform bending.

1 緒　　言

薄肉曲線材は，古くから鋼構造要素として，橋梁，アーチ構造および船体のリングフレーム構造等に使用され，構造物の複雑化に伴い，さらにその利用度の増大が予想される。著者らは，リングフレームコーナー部等のような円弧部の最終強度を解析するために，すでに報告した直線梁の弾塑性曲げ振り解析の手法[1]をさらに拡張し，薄肉曲線梁の弾塑性曲げ振り解析を試みた。

薄肉曲線梁の力学的挙動については，多くの研究結果が報告されているが，主に主曲率面内の変形に関するものが多い。面外の横倒れ変形に対しては，Timoshenko[3]，Vlasov[4] らの研究がある。これらは初期曲率半径に比べて断面の寸法（深さ）が十分小さい梁を対象にし，断面内の曲げ歪分布および断面の特性値等は，直線材と同一のものを採用している。

なお，最近，土木の分野で，西野，深沢，築地ら[5]~[7]は，断面の母線ごとに異なる曲率の影響(断面の広がり)を考慮した弾性曲げ振り基礎式を，エネルギー法で導いているが，解析の範囲が主に弾性域に限られているうえに，基礎式が極めて複雑な形を成しているために，これらの微分方程式の弾性解を得ることさえも容易でない。また，弾塑性解析に関する研究は少ないように思う。

そこで，著者らは，断面不変の仮定に基づき，薄肉曲線梁の曲げ振り変形を支配する弾塑性曲げ振り基礎式を静的釣合法を用いて，定式化を行なった。数値解析にあたっては，荷重増分法を用い，適当な変位場を導入して，従来その適用が弾性解析に限られていた Galerkin 法を塑性解析まで拡張し，比較的簡単に弾塑性解を得た。すなわち，主曲率面内の曲げと軸力を受ける円弧梁の曲げ振り強度を，断面寸法，曲率半径，中心角等をパラメータとして解析を行なった結果，弾性計算においては従来の Timoshenko[3]，Vlasov[4] らの結果とほとんど一致した。また，初期撓み，溶接残留応力が，梁の曲げ振り座屈強度に及ぼす影響を明らかにした。なお，純曲げを受ける円弧梁の弾塑性曲げ振り座屈強度を，簡単に推定できる一方法を提案した。

2 基　礎　式

本解析では，次のような仮定を設ける。すなわち，変形前の梁の初期曲率は長さ方向に一定で，変形は微小とし，曲げに伴う剪断変形は無視するが，そり変形は考慮する。また，横断面は薄肉開断面とし，その形状は変形の際，不変とする。

* 東京大学工学部
** 東京大学工学系大学院

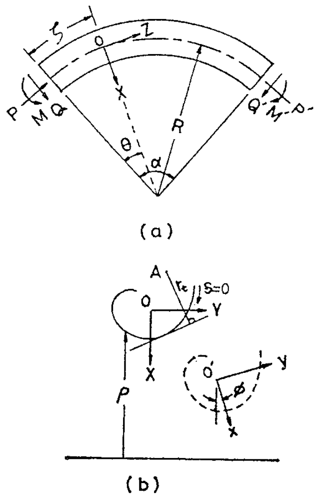

Fig. 1 Co-ordinate system and loading condition

2.1 変位と歪成分

Fig. 1 に示すように，X, Y, Z は空間固定座標系として，その XZ 平面が主曲率面と一致するようにとり，x, y, z は初期曲率 $1/R$ を持つ曲線梁の任意の断面に固定した座標系であり，その座標原点を断面の中立点にとる。また，断面の剪断中心の X, Y, Z 方向への変位を u, v, w，断面の回転角を ϕ とすると，断面内任意点の X, Y, Z 方向変位，U, V, W は，断面剛の仮定に基づき，次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}U(x,y,\theta)&=u(\theta)-\bar{y}\cdot\phi(\theta)\\V(x,y,\theta)&=v(\theta)+\bar{x}\cdot\phi(\theta)\\W(x,y,\theta)&=w(\theta)-\bar{x}\cdot\Gamma_u-\bar{y}\cdot\Gamma_v+\omega_n\Gamma_\phi\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ここに，$\bar{x}=x-x_s, \bar{y}=y-y_s, (x_s, y_s)$ は剪断中心の座標であり，ω_n は剪断中心に関して規準化された，そり関数

$$\omega_n=(1-\bar{x}/R)\left\{\frac{1}{A}\int_A\int_0^s\frac{r_t}{(1-\bar{x}/R)^2}ds\,dA-\int_0^s\frac{r_t}{(1-\bar{x}/R)^2}ds\right\}$$

を表わし，r_t は極 A から板厚中心線 s の接線までの距離（Fig. 1 (b) 参照)，A は断面積，Γ_u, Γ_v, Γ_ϕ 等は，

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_u=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+w\right),\quad\Gamma_v=\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}\\&\Gamma_\phi=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

で表わされる[7)]。

一方，歪成分は（1）式の変位式を用いて，次式のように得られる[8)]。

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=0\\&\varepsilon_\theta=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}-U\right)\\&\quad=\frac{R}{R-\bar{x}}\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-u\right)-\bar{x}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\frac{1}{R^2}-\bar{y}\left(\frac{\partial^2v}{\partial\theta^2}-R\cdot\phi\right)\frac{1}{R^2}\right.\\&\qquad\left.+\omega_n\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2v}{\partial\theta^2}\right)\frac{1}{R^2}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

ここで，R は剪断中心を連ねた軸線の曲率半径，ρ は断面上の任意点を通る母線の曲率半径で，$\rho=R-\bar{x}$ となる。垂直歪 ε_θ を増分形で表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned}\varDelta\varepsilon_\theta=\frac{R}{R-\bar{x}}&\left\{\frac{1}{R}(\varDelta w'-\varDelta u)-\bar{x}(\varDelta u''+\varDelta w')\frac{1}{R^2}-\bar{y}(\varDelta v''-R\cdot\varDelta\phi)\frac{1}{R^2}\right.\\&\left.+\omega_n\left(\varDelta\phi''+\frac{\varDelta v''}{R}\right)\frac{1}{R^2}\right\}\end{aligned}\quad(4)$$

ここに，( )′ は θ に関する微分を表わす（以下同様)。（4）式より，一般に曲線梁の断面内の歪は，非線形分布していることがわわる。なお，R が断面の寸法(深さ)に比べて，充分大きい時は $\bar{x}/R\to0$ となり，断面内の歪は直線分布に近くなる。

2.2 断面力と弾塑性断面剛性

応力-歪関係は，次のような増分形で表わした関係を用いることにする。

$$\left.\begin{aligned}\varDelta\sigma_\theta(x,y,\theta)&=\bar{E}(x,y,\theta)\cdot\varDelta\varepsilon_\theta(x,y,\theta)\\\bar{G}&=\bar{E}/2(1+\nu)\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ここで，$\bar{E}$ は完全弾塑性体の一軸状態の応力-歪関係を bi-linear で近似したもので，除荷も考慮する。σ_Y を降伏応力とすれば

$$\bar{E}=\begin{cases}E:|\sigma_\theta+E\cdot\varDelta\varepsilon_\theta|\leq\sigma_Y\quad\text{または}\quad\sigma_\theta\cdot\varDelta\varepsilon_\theta<0\\0:\sigma_\theta=\sigma_Y,\quad\sigma_\theta\cdot\varDelta\varepsilon_\theta>0\\(\sigma_Y-|\sigma_\theta|)/|\varDelta\varepsilon_\theta|:|\sigma_\theta|\leq\sigma_Y,\quad|\sigma_\theta+E\cdot\varDelta\varepsilon_\theta|\geq\sigma_Y\end{cases}\quad(6)$$

一方，任意の断面内の軸力，モーメント等の断面力は，（5）式の応力増分を用いて，次のように増分形で表示できる。

$$\left.\begin{aligned}\varDelta N&=\int_A\varDelta\sigma_\theta dA=\sum_{j=1}^4c_{1j}\varDelta u_j\\\varDelta M_y&=-\int_A\varDelta\sigma_\theta\cdot x\,dA=\sum_{j=1}^4c_{2j}\varDelta u_j\\\varDelta M_x&=\int_A\varDelta\sigma_\theta\cdot y\,dA=\sum_{j=1}^4c_{3j}\varDelta u_j\\\varDelta M_z&=c_5\left(\frac{\varDelta\phi'}{R}+\frac{\varDelta v'}{R^2}\right)-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\int_A\varDelta\sigma_\theta\omega_n\,dA\\&=c_5\left(\frac{\varDelta\phi'}{R}+\frac{\varDelta v'}{R^2}\right)-\left\{\sum_{j=1}^4c_{4j}\varDelta u_j\right\}'\Big/R\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

ただし，

$$\begin{aligned}&c_{11}=\int_A\frac{\bar{E}}{1-\bar{x}/R}dA,\quad c_{12}=-\int_A\frac{\bar{E}\bar{x}}{1-\bar{x}/R}dA\\&c_{13}=-\int_A\frac{\bar{E}\bar{y}}{1-\bar{x}/R}dA,\quad c_{14}=\int_A\frac{\bar{E}\omega_n}{1-\bar{x}/R}dA\\&c_{21}=-\int_A\frac{\bar{E}x}{1-\bar{x}/R}dA,\quad c_{22}=\int_A\frac{\bar{E}x\bar{x}}{1-\bar{x}/R}dA\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&c_{23}=\int_A \frac{\bar{E}x\bar{y}}{1-\bar{x}/R}dA, \quad c_{24}=-\int_A \frac{\bar{E}\omega_n x}{1-\bar{x}/R}dA\\
&c_{31}=\int_A \frac{\bar{E}y}{1-\bar{x}/R}dA, \quad c_{32}=-\int_A \frac{\bar{E}\bar{x}y}{1-\bar{x}/R}dA\\
&c_{33}=-\int_A \frac{\bar{E}y\bar{y}}{1-\bar{x}/R}dA, \quad c_{34}=\int_A \frac{\bar{E}\omega_n y}{1-\bar{x}/R}dA\\
&c_{41}=\int_A \frac{\bar{E}\omega_n}{1-\bar{x}/R}dA, \quad c_{42}=-\int_A \frac{\bar{E}\omega_n\bar{x}}{1-\bar{x}/R}dA\\
&c_{43}=-\int_A \frac{\bar{E}\omega_n\bar{y}}{1-\bar{x}/R}dA, \quad c_{44}=\int_A \frac{\bar{E}\omega_n^2}{1-\bar{x}/R}dA\\
&c_5=\frac{1}{3}\int_s \frac{\bar{G}t^3}{(1-\bar{x}/R)}ds
\end{aligned}\right\} \quad (8)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta u_1=(\Delta w'-\Delta u)/R\\
&\Delta u_2=(\Delta u''+\Delta w')/R^2\\
&\Delta u_3=(\Delta v''-R\cdot\Delta\phi)/R^2\\
&\Delta u_4=(\Delta\phi''+\Delta v''/R)/R^2
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

曲率半径Rが断面寸法（深さ）に比べて充分大きい梁の場合には，$\bar{x}/R\to 0$ なる故に（8），（9）式の諸量は，直線梁の値と一致する。

2.3 平衡方程式

Fig. 1 (a) のような，端部荷重を受ける曲線梁の任意の断面 ($\zeta=R\cdot\theta$) に働く軸力，モーメント等は，これらの端部に作用している外荷重とその断面の変形量等を用いて，表わすことが可能である。すなわち，断面に固定した変形後の座標系 x, y, z 軸まわりのモーメントを求めるために，まず X, Y, Z 軸まわりのモーメントを求め，座標変換を行ない，高次の微小量を無視すれば，次のようになる。

$$
\left.\begin{aligned}
&N=-P\cos\theta-Q\sin\theta\\
&M_x=M\cdot\phi+(P\cos\theta+Q\sin\theta)\cdot(v-x_s\phi)\\
&\qquad -PR(1-\cos\theta)\cdot\phi+Q\phi\cdot R\sin\theta\\
&M_y=M-PR+(P\cos\theta+Q\sin\theta)\cdot(R-u\\
&\qquad -y_s\cdot\phi)-(P\sin\theta-Q\cos\theta)\cdot w\\
&M_z=(P\cos\theta+Q\sin\theta)\cdot y_s\cdot u'/R+M\cdot v'/R\\
&\qquad -P\{R(1-\cos\theta)+x_s\cos\theta\}v/R\\
&\qquad +Qv'(1-x_s/R)\sin\theta+(P\sin\theta\\
&\qquad -Q\cos\theta)\cdot v-c_6\cdot\phi'/R
\end{aligned}\right\} \quad (10)
$$

ここに

$$c_6=\int_A \sigma_\theta r^2 dA, \quad r^2=(x-x_s)^2+(y-y_s)^2 \quad (11)$$

P, Q, M の符号は，Fig. 1 (a) に示すものを正とする。(10) 式を増分表示して（7）式と等置すれば，弾塑性曲げ捩り変形を支配する平衡方程式が，次のように得られる。

$$\sum_{j=1}^{4} c_{1j}\Delta u_j=-\Delta P\cos\theta-\Delta Q\sin\theta \quad (12)$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{4} c_{2j}\Delta u_j+(P\cos\theta+Q\sin\theta)\cdot(\Delta u+y_s\Delta\phi)\\
&\quad +(P\sin\theta-Q\cos\theta)\Delta w\\
&=\Delta M-\Delta P\cdot R+(\Delta P\cos\theta+\Delta Q\sin\theta)\cdot(R-u\\
&\quad -y_s\phi)-(\Delta P\sin\theta-\Delta Q\cos\theta)w \quad (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{4} c_{3j}\Delta u_j-(M-PR)\Delta\phi-(P\cos\theta+Q\sin\theta)\\
&\quad \times\{\Delta v+(R-x_s)\Delta\phi\}\\
&=(\Delta M-\Delta P\cdot R)\phi+(\Delta P\cos\theta+\Delta Q\sin\theta)\\
&\quad \times\{v+(R-x_s)\phi\} \quad (14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\{\sum_{j=1}^{4} c_{4j}\Delta u_j\right\}'\Big/R+c_5(R\Delta\phi'+\Delta v')/R^2\\
&\quad +c_6\cdot\Delta\phi'/R-(M-PR)\cdot\Delta v'/R\\
&\quad -(P\cos\theta+Q\sin\theta)\{y_s\Delta u'+(R-x_s)\Delta v'\}/R\\
&\quad -(P\sin\theta-Q\cos\theta)\cdot\Delta v\\
&=(\Delta M-\Delta P\cdot R)v'/R+(\Delta P\sin\theta-\Delta Q\cos\theta)\cdot v\\
&\quad +(\Delta P\cos\theta+\Delta Q\sin\theta)\{y_s\cdot u'\\
&\quad +(R-x_s)\cdot v'\}/R \quad (15)
\end{aligned}
$$

2.4 初期不整を有する場合

実際の溶接組立材には，必ず初期撓みまたは，溶接残留応力等の初期不整が少なからず存在している。これらの初期不整が，梁柱の弾塑性強度に及ぼす影響は無視できない。そこで，この節では初期撓み u_i, v_i, ϕ_i および残留応力 σ_R を導入して前節と同様な手法を用いると次のような平衡方程式が導かれる。

$$\sum_{j=1}^{4} c_{1j}\Delta u_j=-\Delta P\cos\theta-\Delta Q\sin\theta \quad (16)$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{4} c_{2j}\Delta u_j+(P\cos\theta+Q\sin\theta)(\Delta u+y_s\Delta\phi)\\
&\quad +(P\sin\theta-Q\cos\theta)\cdot\Delta w\\
&=\Delta M+R\{\Delta P(\cos\theta-1)+\Delta Q\sin\theta\}\\
&\quad -(\Delta P\sin\theta-\Delta Q\cos\theta)w-(\Delta P\cos\theta\\
&\quad +\Delta Q\sin\theta)\{u+u_i+y_s(\phi+\phi_i)\} \quad (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{4} c_{3j}\Delta u_j-M\cdot\Delta\phi+PR(1-\cos\theta)\cdot\Delta\phi\\
&\quad -QR\sin\theta\cdot\Delta\phi-P(\Delta v-x_s\Delta\phi)\\
&=\Delta M(\phi+\phi_i)-R\{\Delta P(1-\cos\theta)\\
&\quad -\Delta Q\sin\theta\}(\phi+\phi_i)+(\Delta P\cos\theta+\Delta Q\sin\theta)\\
&\quad \times\{v+v_i-x_s(\phi+\phi_i)\} \quad (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{4}\{c_{4j}\Delta u_j\}'/R+c_5(\Delta\phi'/R+\Delta v'/R^2)\\
&\quad +c_6\Delta\phi'/R-M\Delta v'/R+\{P(1-\cos\theta)\\
&\quad -Q\sin\theta\}\Delta v'-(P\cos\theta+Q\sin\theta)(\Delta u'y_s\\
&\quad -x_s\Delta v')/R+(Q\cos\theta-P\sin\theta)\Delta v\\
&=(\Delta M/R-\Delta P)(v'+v_i')\\
&\quad +(P\cos\theta+Q\sin\theta)(1-x_s/R)(v'+v_i')\\
&\quad +(\Delta P\cos\theta+\Delta Q\sin\theta)(u'+u_i')y_s/R\\
&\quad -(\Delta Q\cos\theta-\Delta P\sin\theta)(v+v_i) \quad (19)
\end{aligned}
$$

ここに，変形増分 Δu_j および断面剛性 c_{ij} 等は，2.2 の（8），（9）式と同じであるが，残留応力が存在する場合には，c_6 は

$$c_6=\int_A(\sigma_\theta+\sigma_R)r^2dA \qquad (20)$$

となる。ここで，$\sigma_R(x,y,\theta)$ は，部材内の残留応力の分布を表わし，引張りを正とする。(16)～(19) 式は，初期曲率 $1/R$ を持つ円弧梁が，Fig. 1 (a) に示すような端部組合せ荷重を受ける場合の曲げ振り変形に関する平衡方程式を初期不整の影響を考慮した一般的な形で定式化したものである。

3 数値解析法

初期撓みおよび溶接残留応力等の初期不整を有する曲線梁の弾塑性平衡方程式は，2.4 で定式化された。しかしながら，これらの連立微分方程式 (16)～(19) を厳密に解くことは，純弾性状態でさえ困難である。しかも，弾塑性状態では，部材の断面剛性が荷重とともに変化し一層複雑になる。このような材料非線形問題を解くために，ここでは，荷重増分法を用いて断面剛性および諸変形量を，各荷重増分段階で線形化する。一方，変形の自由度を減すために，適切な変位関数を導入し，Galerkin 法による近似解析を試みる。

3.1 変位関数列

微分方程式 (16)～(19) を Galerkin 法を用いて解く。境界条件として次のようなものを考える (Fig. 1)。

幾何学的境界条件

$$\left.\begin{array}{ll}\theta=0\text{ で} & \varDelta u=\varDelta v=\varDelta\phi=0\\ \theta=\alpha\text{ で} & \varDelta u=\varDelta v=\varDelta\phi=0\end{array}\right\} \qquad (21)$$

力学的境界条件

$$\left.\begin{array}{ll}\theta=0\text{ で} & \varDelta u''=\varDelta M\cdot R^2/c_{22}\\ & \varDelta v''=0\\ & \varDelta w'=-\varDelta P\cdot R/c_{11}\\ & \varDelta\phi''=0\\ \theta=\alpha\text{ で} & \varDelta u''=R^2\{\varDelta M-\varDelta P\cdot R(1-\cos\alpha)\\ & \qquad +\varDelta Q\cdot R\sin\alpha\}/c_{22}\\ & \varDelta v''=0\\ & \varDelta w'=-R(\varDelta P\cos\alpha\\ & \qquad +\varDelta Q\sin\alpha)/c_{11})\\ & \varDelta\phi''=0\end{array}\right\} \qquad (22)$$

境界条件 (21)，(22) 式を満足する変位関数として，次のようなものを採る。

$$\left.\begin{array}{l}\varDelta w(\theta)=\sum_{n=1}^{N}\varDelta a_n\cos\frac{n\pi\theta}{\alpha}+\varDelta w_*(\theta)\\ \varDelta u(\theta)=\sum_{n=1}^{N}\varDelta b_n\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}+\varDelta u_*(\theta)\\ \varDelta v(\theta)=\sum_{n=1}^{N}\varDelta c_n\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\\ \varDelta\phi(\theta)=\sum_{n=1}^{N}\varDelta d_n\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}\end{array}\right\} \qquad (23)$$

ここに，$\varDelta a_n$, $\varDelta b_n$, $\varDelta c_n$, $\varDelta d_n$ は未定常数，N は近似項数であり，$\varDelta w_*$, $\varDelta u_*$ はそれぞれ軸力，y 軸まわりの曲げモーメントのみによる変形を表わし，微分方程式の一種の特解として次のようなものを用いる。

$$\varDelta w_*(\theta)=R\int_\theta^{\alpha/2}(\varDelta P\cos\theta+\varDelta Q\sin\theta)/c_{11}d\theta \qquad (24)$$

$$\begin{aligned}\varDelta u_*(\theta)=&R^2\int_0^\theta\int_0^\theta\{\varDelta M-\varDelta P\cdot R(1-\cos\theta)\\&+\varDelta Q\cdot R\sin\theta\}/c_{22}d\theta d\theta\\&-R^2\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)\int_0^\alpha\int_0^\theta\{\varDelta M-\varDelta P\cdot R(1-\cos\theta)\\&+\varDelta Q\cdot R\sin\theta\}/c_{22}d\theta d\theta\end{aligned} \qquad (25)$$

なお，$\varDelta w_*$, $\varDelta u_*$ を導入することによって力学的境界条件も満足でき，変位関数の近似度が著しく向上されることが，後述の数値解析結果より明らかになった。

一方，初期撓みとしては次の関数形を用いた。

$$u_i=U_0\sin\frac{i\pi\theta}{\alpha},\quad v_i=V_0\sin\frac{j\pi\theta}{\alpha},\quad \phi_i=\varPhi_0\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}$$
$$(i,j,k=1,2,3,\cdots\cdots) \qquad (26)$$

3.2 Galerkin 法による近似解析

(23) 式の変位関数を (16)～(19) 式の平衡方程式に代入して，仮想変位に相当する重み関数 $\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}\left(\text{または}\cos\frac{m\pi\theta}{\alpha}\right)$ を乗じて，梁の全長にわたって積分すると，次のようなの $4N$ 元連立方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix}K_{11}^{mn} & K_{12}^{mn} & K_{13}^{mn} & K_{14}^{mn}\\ K_{21}^{mn} & K_{22}^{mn} & K_{23}^{mn} & K_{24}^{mn}\\ K_{31}^{mn} & K_{32}^{mn} & K_{33}^{mn} & K_{34}^{mn}\\ K_{41}^{mn} & K_{42}^{mn} & K_{43}^{mn} & K_{44}^{mn}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varDelta a_n\\ \varDelta b_n\\ \varDelta c_n\\ \varDelta d_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varDelta F_{1m}\\ \varDelta F_{2m}\\ \varDelta F_{3m}\\ \varDelta F_{4m}\end{Bmatrix}$$
$$(m,n=1,2,3,\cdots\cdots N) \qquad (27)$$

ここに K_{ij}^{mn} は $N\times N$ マトリックス，$\varDelta a_n$, $\varDelta F_{im}$ 等は，N次元ベクトルであり，詳細は付録に示す。

結局 (27) 式の連立方程式を解くことに帰着するが，このようにすれば梁の変形を連続な関数で表現でき，また，解くべき連立方程式の元数も未定常数の数まで大幅に減少する。歪，応力増分は (4)，(5) 式より計算され，曲げ振り座屈荷重は係数行列式の値がほぼ零になる点より求める。

4 数値解析結果および考察

本解析法を用いて，矩形，H形 (300×300×10×15) およびI形 (400×200×12×12) 断面の円弧梁が，主曲率面内の水平軸力と曲げモーメントを受ける場合の弾塑性曲げ振り挙動を断面寸法，曲率半径，中心角等を parameter として解析した。なお，本計算には軟鋼材を対象とし，材料定数はヤング率 $E=21,000\,\mathrm{kg/mm^2}$，$\nu=$

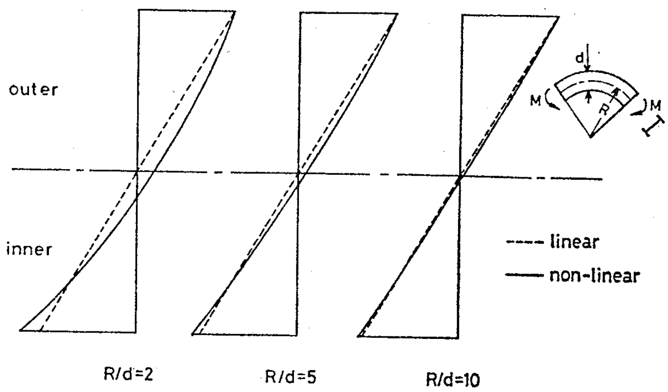

Fig. 2　Bending strain distribution in the cross section

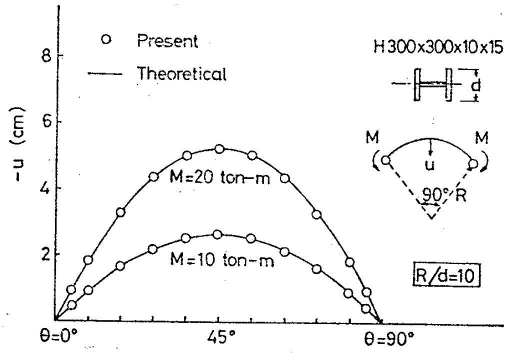

Fig. 3　Radial deflection along the axis of curved beam

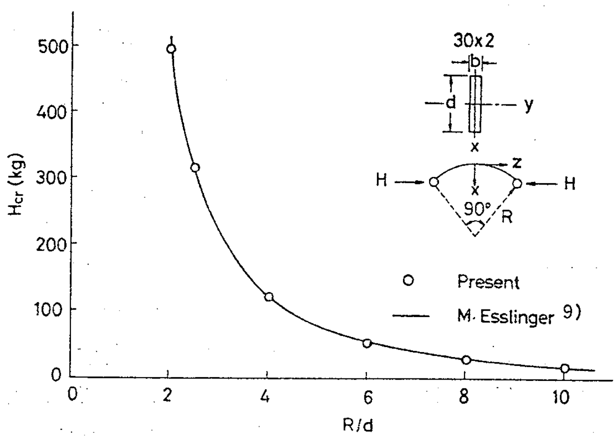

Fig. 4　Elastic lateral buckling load vs. radius to depth ratio

0.3，降伏応力 $\sigma_Y=24\,\mathrm{kg/mm^2}$ とし，溶接熱効率 $\eta=0.7$ を用いた。

4.1　弾性解析例

弾性解析においては，従来の結果と比較できるように，断面内の曲げ歪を直線分布させ，次のような計算を実行した。

（i）　面内解析

Fig. 2 に純曲げを受ける I 形断面梁の歪分布を示す。R/d が大きくなるにつれて，曲線分布より直線分布に近

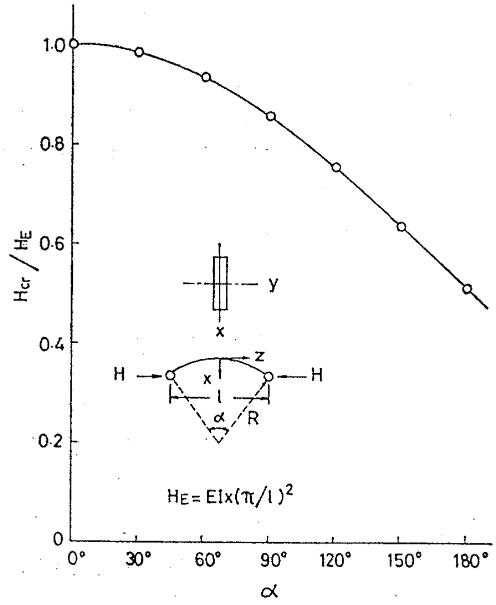

Fig. 5　Elastic lateral buckling load of curved beam with rectangular section

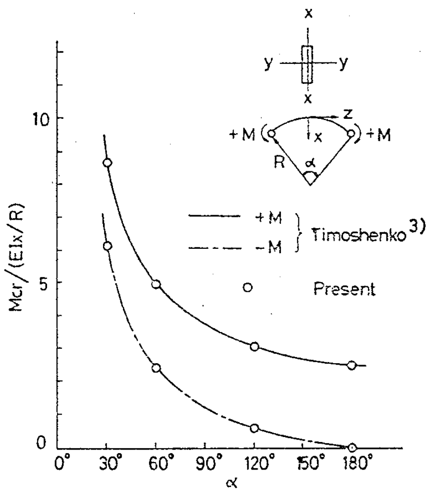

Fig. 6　Elastic lateral buckling moment of curved beam with rectangular section

くなることがわかる。

Fig. 3 に H 形断面を有する $R/d=10$ の円弧梁が純曲げモーメント M を受ける場合の長手方向の撓み分布を示している。図中計算値は解析解とほとんど一致している。なお，撓み関数は3項で近似した。

（ii）　Fig. 4 は中心角 90° の矩形断面梁が水平軸力を受ける場合の横倒れ座屈荷重を R/d に対して示したもので，R/d が4以下になると急激に座屈荷重が上昇することがわかる。また，本解析値は M. Esslinger[9] の級数解の結果とほとんど一致している。

Fig. 5 には，任意の矩形断面の円弧梁が水平軸力を受ける場合の曲げ捩れ座屈荷重を長さ l の直線梁の Euler 座屈荷重で無次元化したものを，中心角 α に対してプロットした結果である。図中 α が大きくなるにつれて，座屈強度の低下が著しく，$\alpha=180°$ で直線梁の座屈強度の

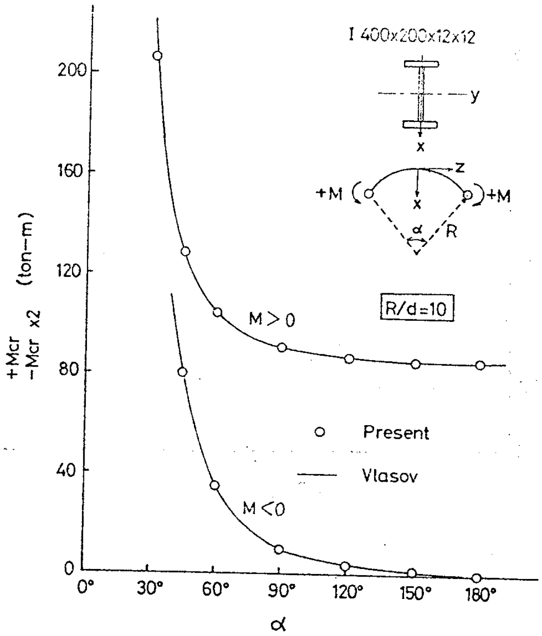

Fig. 7 Elastic lateral buckling moment of curved beam with I-section

半分まで低下している。

Fig. 6 は，任意の矩形断面を有する円弧梁が純曲げを受ける場合の横倒れ座屈係数を，中心角αについてプロットしたものである。図中実線は正の曲げモーメント，1点鎖線は負の曲げモーメントを受ける場合の Timoshenko[3] の解析結果で，両者とも本解析値とほとんど一致していることがわかる。

なお，α が 180° の時の M_{cr} が零になっているのは，面外単純支持の境界条件を考えているので 部材両端を結ぶ直線を軸とし，梁が剛体回転可能であることを意味する。次に，I 形断面について同様の計算を行なったのが Fig. 7 である。Fig. 6 と同様，負の曲げモーメントを受ける場合が，正の曲げモーメントを受ける場合に比べて，はるかに低い荷重を与える。

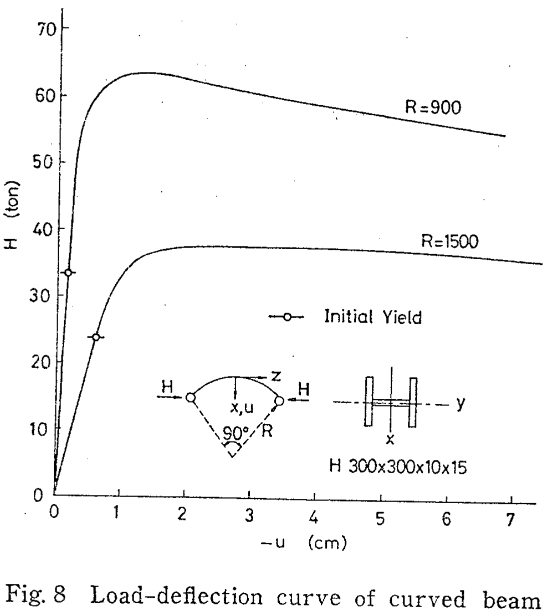

Fig. 8 Load-deflection curve of curved beam (at $\theta=45°$)

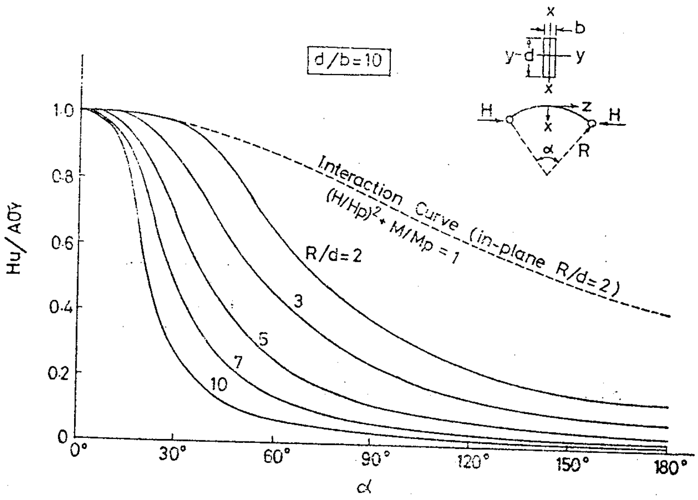

Fig. 9 Ultimate strength of curved beam under horizontal thrust

4.2 弾塑性解析例

本計算に先立ち，作成した program の check のため，$\alpha R=l$ を保ちながらαを非常に小さく，R には非常に大なる data を入力し，既知の直線梁（長さ l）の計算結果と比較し，変位，最高荷重共にほとんど一致するのを確めた。なお，弾塑性計算においては変位関数は各 5 項まで取ったが，3 項でほぼ収束し，計算時間は 1 step 平均 0.2 秒であった。

i） 面内解析

Fig. 8 は，中心角 90° の H 形断面梁が水平軸力を受ける場合の中央部の荷重-撓み関係を半径Rを parameter としてプロットしたものである。面材の初期降伏後もかなりの耐力を持っているが，平均圧縮応力はそれほど高くなく，Rが大きくなると圧縮強度は下がるが，断面の回転容量は増していることがわかる。

ii） 曲げ捩り解析

Fig. 9 は，水平軸力を受ける矩形断面梁の，弾塑性曲げ捩り座屈強度と中心角との関係を R/d を parameter として，プロットしたものである。なお，図中の破線は，$R/d=2$ の場合の中央部断面に働く軸力と，これによる面内曲げモーメントの相関より求めた荷重をプロットしたものである。Fig. 10 は，純曲げ（負の方向）を受ける I 形断面梁の長手方向の変位分布を示している。この場合，面外の初期撓みとして，sine 一半波の $V_0=\alpha\cdot R/500$, $\phi_0=-V_0/R$ を入れて計算した。面内の撓みに比べ，面外の撓み v，捩れ角ϕが，初期降伏後急激に増えて，いわゆる横倒れ現象を起こし耐力を失って行くことがわかる。Fig. 11 は，曲げモーメント M と梁中央部の変形 v, ϕ との関係を示している。R/d が小さい場合には，最高荷重は高くなるが，その後急激に耐力が落ち

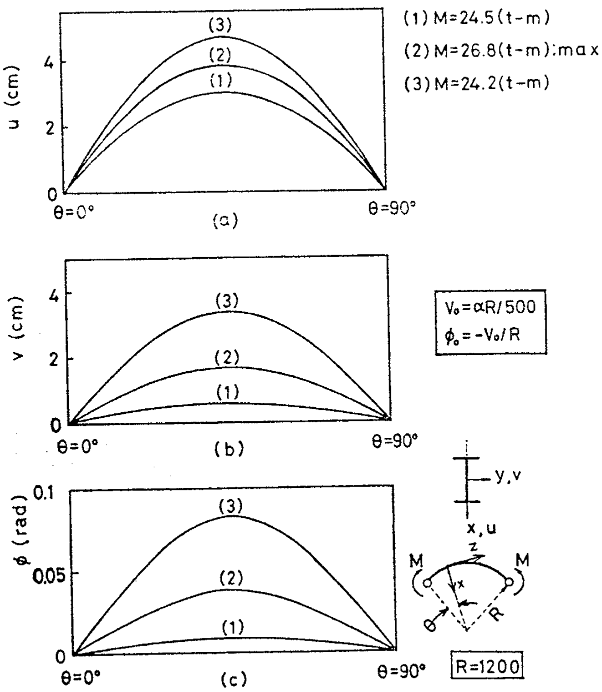

Fig. 10 Distribution of radial deflection along the axis of curved beam

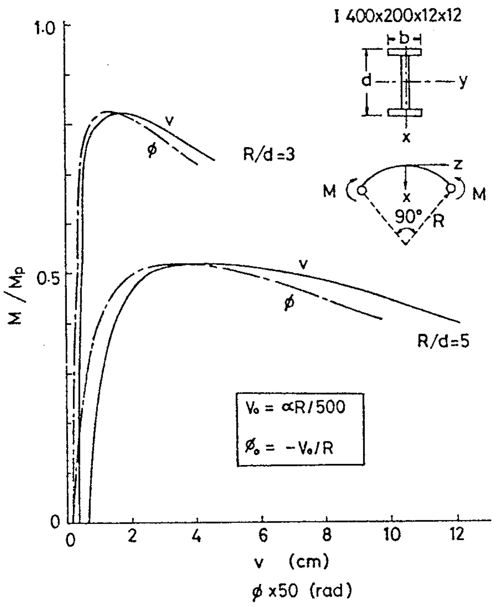

Fig. 11 Bending moment vs. lateral deflection and twisting angle (at $\theta=45°$)

ることがわかる。

iii) 初期不整の影響

初期撓みおよび溶接残留応力が，梁の弾塑性曲げ捩り強度に及ぼす影響を調べるために，面外初期撓み $V_0=\alpha R/500$, $\Phi_0=-V_0/R$ をとり，溶接残留応力は，標準溶接条件として，I 形断面に対して，$Q=24000$ J/cm, 熱効率 0.7 を用いて計算し[12]，以下の計算には，これらの値を用いた。なお，残留応力の大略の分布形状を Fig. 12 の右上端に示す。引張残留応力の大きさは降伏応力に等しく，面料およびウェブの圧縮残留応力の大きさはそれぞれ降伏応力の 1/4 と 1/8 である。Fig. 12 には，水平軸力を受ける I 形断面梁の弾塑性曲げ捩り座屈荷重を細長比に対して，プロットしたものである。図中一点鎖線は，溶接組立梁の座屈荷重を示し，残留応力のない場合（実線）に比べてみると，細長比が小さい場合は勿論，細長比が大きい所でも残留応力による強度低下が見られる。Fig. 13 は，純曲げを受ける場合の曲げ捩り座屈荷重を示している。図中実線は，正，負の曲げモーメントによる弾塑性荷重を表わし，曲げモーメントが正の場合に比べて，負の場合は細長比が大きくなるにつれて座屈強度が急激に低下して行く。図中一点鎖線は比較のために，弾性座屈荷重をプロットしたもので，初期撓みによる強度低下は，細長比 60 近傍で最も著しい。また，溶接残留応力の影響は，細長比 60 以下で著しくなり，2 割程度の強度低下をもたらすことがわかる。なお，初期不整のない場合には，最高荷重は面材の初期降伏荷重

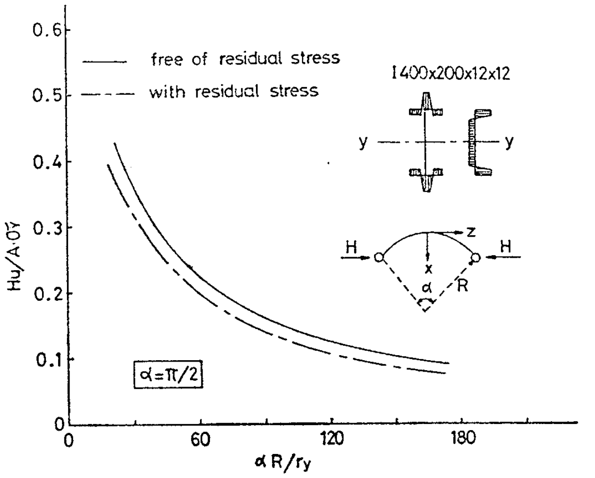

Fig. 12 Effect of residual stress on lateral buckling strength of curved beam under horizontal thrust

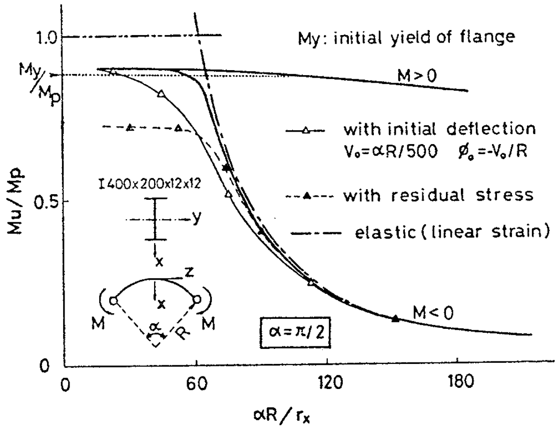

Fig. 13 Effect of initial imperfections on lateral buckling strength of curved beam under uniform bending

(点線)と弾性座屈(1点鎖線)のうち，小さい方を取ることによって近似できる。すなわち，次の式のうち小さい方を取ればよい。

$$\left.\begin{aligned} M_y &= 2I_y\sigma_Y/d \\ M_{cr} &= B+C\pm\sqrt{(B-C)^2+(2\pi/\alpha)^2B\cdot C} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

ここに，$B=EI_x/2R$, $C=\{GJ+E\Gamma(\pi/\alpha)^2\}/2R$, σ_Y は降伏応力，d は両面材の心距，I_x, I_y は x, y 軸まわりの断面二次モーメント，GJ, $E\Gamma$ は St. Venant および曲げ捩り剛性を表わす。

5 結　　言

主曲率面内の曲げと軸力を受ける薄肉曲線梁の弾塑性曲げ捩り解析を行ない，次のような結論が得られた。

1) 弾塑性数値解析に Galerkin 法を用いることによって，少ない自由度で精度の良い解が得られ，有限要素法等に比べて大幅な計算時間の短縮が可能となり，変形，応力等が連続的な形で求まる利点がある。

2) 弾性解析においては，従来の Timoshenko, Vlasov らの解と比較してほとんど一致し，本解析法の有効性が確かめられた。

3) 弾塑性解析結果，初期撓みおよび溶接残留応力が弾塑性曲げ捩り強度に及ぼす影響を明らかにした。

4) 純曲げを受ける薄肉円弧梁の弾塑性曲げ捩り座屈強度は，面材の初期降伏荷重と弾性座屈荷重のうち小さい方をとることによって，近似的に簡単に推定できる。

終りに，数値計算に際して，東京大学大型計算機センター HITAC 8800/8700 を使用させていただいたことを付記する。

参 考 文 献

1) 張　昌斗：ストラットの座屈強度に関する研究，西部造船会々報第56号(1978年8月).
2) 小西，小松：薄肉曲線桁の基礎理論，土木学会論文集，第87号(昭37年11月).
3) S.P. Timoshenko, J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2 nd Edition, McGraw-Hill, 1961.
4) V.Z. Vlasov : Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation, Ltd., Ierusalem, 1961.
5) 西野，深沢：ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がり梁の静的挙動の定式化，土木学会論文報告集，第247号(1976年3月).
6) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集，第110号(昭和39. 10).
7) 築地恒夫：初期曲率，ねじれ率を有する薄肉断面曲線梁の基礎方程式，土木学会論文報告集，第230号(1974年10月).
8) K. Washizu : Some Considerations on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam, Jour. of Math. and Phys., Vol. 43, No. 2, 1964.
9) M. Eβlinger : Kippen von Rahmenecken mit Rechteckquerschmitt, Der Stahlbau, 1954, Jg. 23.
10) J.A. Cheney : Bending and Buckling of Thin-Walled Open-Section Rings, Proc. of ASCE, EM 5, Oct. 1963.
11) 鈴木，久保寺：柱はり隅角部の横座屈，建築学会論文報告集，第175号(1970, 9).
12) 藤田，野本，長谷川：熱弾塑性問題に関する研究(その3)，日本造船学会論文集，第144号(1978, 12).
13) 藤田，吉田，大勝：二軸曲げを受ける柱の弾塑性解析(その2)，日本造船学会論文集，第127号(1970, 6).
14) 川井，都井：エネルギー法による梁柱の塑性強度解析，日本造船学会論文集，第140号(1976, 12).
15) 都井，川井：円形アーチ・球殻の解析における新しい離散化モデル，日本造船学会論文集，第144号(1978, 12).

付録　係数マトリックス

$$\left.\begin{aligned}
K_{11}^{mn} &= (c_{11}^{mn}+c_{12}^{mn})\cdot n\pi/\alpha \\
K_{12}^{mn} &= c_{11}^{mn}+c_{12}^{mn}(n\pi/\alpha)^2 \\
K_{13}^{mn} &= (c_{13}^{mn}+c_{14}^{mn}/R)(n\pi/\alpha)^2 \\
K_{14}^{mn} &= c_{13}^{mn}R+c_{14}^{mn}(n\pi/\alpha)^2 \\
K_{21}^{mn} &= c_{21}^{mn}(n\pi/\alpha)+c_{22}^{mn}(n\pi/\alpha)-P\cdot K_{mn} \\
&\quad +Q\cdot L_{mn} \\
K_{22}^{mn} &= c_{21}^{mn}+c_{22}^{mn}(n\pi/\alpha)^2-P\cdot H_{mn}-Q\cdot G_{mn} \\
K_{23}^{mn} &= (c_{23}^{mn}+c_{24}^{mn}/R)(n\pi/\alpha)^2 \\
K_{24}^{mn} &= c_{23}^{mn}\cdot R+c_{24}^{mn}(n\pi/\alpha)^2-P\cdot y_sH_{mn} \\
&\quad -Q\cdot y_s\cdot G_{mn} \\
K_{31}^{mn} &= -(c_{31}^{mn}+c_{32}^{mn})n\pi/\alpha \\
K_{32}^{mn} &= -c_{31}^{mn}-c_{32}^{mn}(n\pi/\alpha)^2 \\
K_{33}^{mn} &= -c_{33}^{mn}(n\pi/\alpha)^2-c_{34}^{mn}(n\pi/\alpha)^2/R \\
&\quad -P\cdot H_{mn}-Q\cdot G_{mn} \\
K_{34}^{mn} &= -c_{33}^{mn}\cdot R-c_{34}^{mn}(n\pi/\alpha)^2-(M-PR)\alpha/2 \\
&\quad \cdot\delta_{mn}+(x_s-R)(P\cdot H_{mn}+Q\cdot G_{mn}) \\
K_{41}^{mn} &= (c_{41}^{mn}+c_{42}^{mn})(\pi/\alpha)^2\cdot mn \\
K_{42}^{mn} &= c_{41}^{mn}(m\pi/\alpha)+c_{42}^{mn}(n\pi/\alpha)^2\cdot m\pi/\alpha \\
&\quad -y_s(P\cdot J_{mn}+Q\cdot I_{mn})n\pi/\alpha \\
K_{43}^{mn} &= \{c_{56}^{mn}/R+c_{43}^{mn}(\pi/\alpha)^2\cdot mn+c_{44}^{mn} \\
&\quad \cdot(\pi/\alpha)^2mn/R-(M-PR)\delta_{mn}\cdot\alpha/2 \\
&\quad -(R-x_s)(P\cdot J_{mn}+Q\cdot I_{mn})\}n\pi/\alpha \\
&\quad +R(Q\cdot L_{nm}-P\cdot K_{nm}) \\
K_{44}^{mn} &= c_{56}^{mn}(n\pi/\alpha)+c_{43}^{mn}(m\pi/\alpha)\cdot R \\
&\quad +c_{44}^{mn}(\pi/\alpha)^3\cdot mn^2
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{A}\cdot 1)$$

$$\begin{aligned}
\varDelta F_{1m} &= -\int_0^\alpha \frac{c_{11}}{R}\varDelta u_*\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta \\
&\quad +\int_0^\alpha \frac{c_{12}}{R^2}(\varDelta u_*''+\varDelta w_*')\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta \\
\varDelta F_{2m} &= U_0(\varDelta P\cdot H_{mi}+\varDelta Q\cdot G_{mi})+y_s\cdot\varPhi_0(\varDelta P \\
&\quad \cdot H_{mk}+\varDelta Q\cdot G_{mk})+\sum_n(\varDelta P\cdot K_{mn}-\varDelta Q \\
&\quad \cdot L_{mn})a_n+\sum_n(b_n+y_s\cdot d_n)(\varDelta P\cdot H_{mn}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Delta Q\cdot G_{mn})+\int_0^\alpha(\Delta P\cdot u_*+P\cdot\Delta u_*\\
&-\Delta Q\cdot w_*-Q\cdot\Delta w_*)\cos\theta\cdot\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta\\
&+\int_0^\alpha(\Delta Q\cdot u_*+Q\cdot\Delta u_*+\Delta P\cdot w_*\\
&+P\cdot\Delta w_*)\sin\theta\cdot\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta\\
&+\int_0^\alpha\frac{c_{21}}{R}(\Delta w'_*-\Delta u_*)\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta\\
&+\int_0^\alpha\frac{c_{22}}{R^2}\cdot\Delta w'_*\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta\\
\Delta F_{3m}=&V_0(\Delta P\cdot H_{mj}+\Delta Q\cdot G_{mj})+(\Delta M-\Delta P\\
&\cdot R)\Phi_0\delta_{mk}\cdot\alpha/2+(R-x_s)(\Delta P\cdot H_{mk}\\
&+\Delta Q\cdot G_{mk})\Phi_0+\sum_n(\Delta P\cdot H_{mn}+\Delta Q\\
&\cdot G_{mn})c_n+\sum_n(\Delta M-\Delta P\cdot R)d_n\cdot\delta_{mn}\cdot\alpha/2\\
&+\sum_n(\Delta P\cdot H_{mn}+\Delta Q\cdot G_{mn})(R-x_s)d_n\\
&-\int_0^\alpha\frac{c_{31}}{R}(\Delta w'_*-\Delta u_*)\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta\\
&-\int_0^\alpha\frac{c_{32}}{R^2}(\Delta u''_*+\Delta w'_*)\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta\\
\Delta F_{4m}=&(\Delta M-\Delta P\cdot R)V_0\cdot\delta_{mj}\frac{j\cdot\pi}{2}+U_0\cdot y_s\frac{i\cdot\pi}{\alpha}\\
&\times(\Delta P\cdot J_{mi}+\Delta Q\cdot I_{mi})+(R-x_s)V_0\frac{j\pi}{\alpha}\\
&\times(\Delta P\cdot J_{mj}+\Delta Q\cdot I_{mj})-R\cdot V_0(\Delta Q\\
&\cdot L_{jm}-\Delta P\cdot K_{jm})+\sum_n(\Delta M-\Delta P\cdot R)\\
&\cdot c_n\cdot\delta_{mn}\cdot n\pi/2-\sum_n R(\Delta Q\cdot L_{nm}-\Delta P\\
&\cdot K_{nm})c_n+\sum_n\{y_s\cdot b_n+(R-x_s)c_n\}\\
&\times(\Delta P\cdot J_{mn}+\Delta Q\cdot I_{mn})\cdot c_n\cdot n\pi/\alpha\\
&+y_s\int_0^\alpha(\Delta P\cdot u'_*+P\cdot\Delta u'_*)\cos\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta\\
&+\int_0^\alpha\left\{\frac{c_{41}}{R}(\Delta w'_*-\Delta u_*)+\frac{c_{42}}{R^2}(\Delta u''_*\right.\\
&\left.+\Delta w'_*)\right\}\frac{m\pi}{\alpha}\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}d\theta\\
&+[\{c_{41}(\alpha)+c_{42}(\alpha)/R\}\Delta w'_*(\alpha)\\
&+c_{42}(\alpha)\cdot\Delta u''_*(\alpha)/R](-1)^m/R\\
&-[\{c_{41}(0)+c_{42}(0)/R\}\Delta w'_*(0)\\
&+c_{42}(0)\cdot\Delta u''_*(0)/R]/R
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

ここに

$$
\left.
\begin{aligned}
&c_{ij}^{mn}=\begin{cases}\dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^\alpha c_{ij}\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}d\theta\ ;\ (j=1)\\[2ex]\dfrac{1}{R^2}\displaystyle\int_0^\alpha c_{ij}\sin\frac{m\pi\theta}{\alpha}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}d\theta\ ;\ (j\neq1)\end{cases}\\
&\qquad\qquad(i,j=1,2,3,4)\\
&c_{56}^{mn}=\int_0^\alpha c_{56}\cos\frac{m\pi\theta}{\alpha}\cos\frac{n\pi\theta}{\alpha}d\theta
\end{aligned}
\right\}
\tag{A.3}
$$

δ_{mn} は Kronecker の delta

$$
\begin{aligned}
&u_*=\sum_t\Delta u_*,\quad w_*=\sum_t\Delta w_*,\quad u'_*=\sum_t\Delta u'_*\\
&w'_*=\sum_t\Delta w'_*,\quad a_n=\sum_t\Delta a_n,\quad b_n=\sum_t\Delta b_n\\
&c_n=\sum_t\Delta c_n,\quad d_n=\sum_t\Delta d_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{mn}&=\{1-(-1)^{m+n}\cos\alpha\}\lambda_1/2\\
H_{mn}&=(-1)^{m+n}\sin\alpha\cdot\lambda_1/2\\
I_{mn}&=\{(-1)^{m+n}\cos\alpha-1\}\lambda_2/2\\
J_{mn}&=(-1)^{m+n+1}\sin\alpha\cdot\lambda_2/2\\
K_{mn}&=(-1)^{m+n+1}\sin\alpha\cdot\lambda_3\pi/(2\alpha)\\
L_{mn}&=\{1-(-1)^{m+n}\cos\alpha\}\cdot\lambda_3\pi/(2\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1&=1\Big/\left\{\left(\frac{m+n}{\alpha}\pi\right)^2-1\right\}-1\Big/\left\{\left(\frac{m-n}{\alpha}\pi\right)^2-1\right\}\\
\lambda_2&=1\Big/\left\{\left(\frac{m+n}{\alpha}\pi\right)^2-1\right\}+1\Big/\left\{\left(\frac{m-n}{\alpha}\pi\right)^2-1\right\}\\
\lambda_3&=(m+n)\Big/\left\{\left(\frac{m+n}{\alpha}\pi\right)^2-1\right\}\\
&\quad+(m-n)\Big/\left\{\left(\frac{m-n}{\alpha}\pi\right)^2-1\right\}
\end{aligned}
$$