

(昭和 55 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

混合法の一定式化から誘導される新しい要素

(第 1 報)

——平面応力要素, 3 次元中実要素および平板曲げ要素——

正員 神 田 芳 文*

New Elements Derived from One Type of Mixed Formulations. (The 1st Report)

—Plane Stress, Solid Brick and Plate Bending Elements—

by Yoshifumi Kanda, *Member*

Summary

This paper is intended to show the validity of the simplified formulation based on Reissner's variational principle. A slight modification concerned with the integrations of energy terms is required in order to assure that an element passes the patch test. At the same time this leads to the separation of constant and higher order stress contributions from the element stiffness. In this way, the matrices to be dealt become smaller and the computational effort decreases.

The elements such as plane stress, 3-dimensional solid and plate bending are derived from this mixed formulation under the consideration of the equivalence with the displacement method elements. These elements have the shapes of four-node quadrilateral and eight-node hexahedral in the cases of two and three dimensions respectively. As the plate bending element is based on Mindlin's theory, both thin and thick plates are involved.

In these elements, our primary effort was directed to the economy and moreover to the reliability (i.e. passing the patch test, no having zero energy mode except the rigid body modes and no having any types of locking mechanism) in the plate bending element especially.

Numerical results for several problems indicate that the present elements are efficient and accurate.

1 緒 言

現在広く利用されている弾性問題に関する有限要素汎用プログラムの多くが, 変位法に基づいて誘導された要素を使用している。その主な理由は, それらが高い信頼性を持ち, それでいてある程度の経済性を備えていることにある。しかしながら, 最近では大次元の問題に対して反復計算を行なう機会が増加してきて, 既存の要素では主に経済上の理由から実行不可能な事態に直面することが多い。そこで, 従来の精度と信頼性を損わずに, 高速度で計算できる要素の出現が切望されている。

適合変位要素の計算効率の悪さは, 新しいタイプの非適合変位要素によって改善されつつある。それらのうちで主なものは, アイスパラメトリック要素において C^0 連続性の変位場を使用するもの¹⁾, 非適合バブルモード

を付加するもの^{2),3)}, Reduced integration を行なうもの^{4),5)}などであるが, これらの技法は収束率を大幅に改善することが数値計算の結果から判明している。しかしながら, これらの手法においても, 特に板曲げ要素に関して, パッチテスト^{5),6)}に合格しない, 剛体変位モード以外に Zero energy mode をもつために剛性マトリックスが特異になる, 座標軸のとり方によって剛性が異なる, 要素分割が粗なとき剛性が極端に高くなるなどの欠陥のある信頼性の低い要素を作り出してしまうおそれがある。これらの欠陥は, 平面応力要素や 3 次元中実要素においてもいくつか現われるが, それに対する改良法はすでに考案されている³⁾。一方, 板曲げ要素に関しては上述の欠陥に対して簡便でしかも有効な方法は現在のところ報告されていない。

このような非適合変位要素の改良を図る場合, 変位法の枠内で理論の展開を行なうことは非常に窮屈で視野の

* 東京大学工学部

狭いものとなり、失敗の原因となり易い。そこで変位法に比べてより一般的である混合法に基づいて理論的な考察を行なっていく方が得策である。従って本研究においては、理論的根拠を混合法に求めたうえで、実際の定式化においては変位法のもっている利点を損わないように、なるべく変位法に近くなるように工夫した新しい定式化を考案して、これを平面応力要素、3次元中実要素、板曲げ要素などに適用して新しい要素を誘導した。ここでは簡便な要素を得ることを目的としているため、要素形状としては2次元の場合には4節点四辺形、3次元の場合には8節点六面体を用いることとし、さらに変位場や応力場の仮定には、基本的には1次式を用いるものとする。

これらの要素は板殻構造物の動的解析に用いることを目的としたものであるが、本報においては定式化の正当性と有用性を検証することを主な目的として、平面応力要素、3次元中実要素および板曲げ要素に対して静的弾性問題を解くことによって当該の既存の要素との比較を行なう。

2 変分原理

まず、ここでは次の形の Reissner の原理⁷⁾から出発する。停留化すべき汎関数を Π_R として、

$$\begin{aligned} \Pi_R = \sum_n \left[\int_{V_n} \left\{ -\frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \bar{f}_i u_i \right\} dV - \int_{S_{\sigma n}} \bar{T}_i u_i dS \right. \\ \left. - \int_{S_{u n}} T_i (u_i - \bar{u}_i) dS \right] \quad (1) \end{aligned}$$

ここに、 σ_{ij} は応力テンソル成分、 u_i は変位成分、 C_{ijkl} は弾性コンプライアンス成分、 $\bar{f}_i$ は作用する体積力、 V_n は要素の体積、 $S_{\sigma n}$ は要素の力学的境界条件の課せられる部分、 $S_{u n}$ は要素の幾何学的境界条件の課せられる部分、 $\bar{T}_i$ は要素境界での作用力、上つきの $-$ は既定された量を示す。 $\sum$ はすべての要素にわたっての総和を意味する。

ここで、幾何学的境界条件を予め満足するような変位場を用いるものとし、また簡単のために体積力は作用しない場合について考えると、(1)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_R = \sum_n \left[\int_{V_n} \left\{ -\frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} dV - \int_{S_{\sigma n}} \bar{T}_i u_i dS \right] \quad (2) \end{aligned}$$

次に、応力場 σ_{ij} を一定応力場 σ_{ij}^c と高次の応力場 σ_{ij}^H にわけて考えることにする。即ち

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^c + \sigma_{ij}^H \quad (3)$$

と表わし、これを(2)式の汎関数に代入すると、

$$\begin{aligned} \Pi_R = \sum_n \left[-\frac{1}{2} \int_{V_n} C_{ijkl} \sigma_{ij}^c \sigma_{kl}^c dV \right. \\ - \frac{1}{2} \int_{V_n} C_{ijkl} \sigma_{ij}^c \sigma_{kl}^H dV \\ - \frac{1}{2} \int_{V_n} C_{ijkl} \sigma_{ij}^H \sigma_{kl}^c dV \\ - \frac{1}{2} \int_{V_n} C_{ijkl} \sigma_{ij}^H \sigma_{kl}^H dV \\ + \frac{1}{2} \int_{V_n} \sigma_{ij}^c (u_{i,j} + u_{j,i}) dV \\ + \frac{1}{2} \int_{V_n} \sigma_{ij}^H (u_{i,j} + u_{j,i}) dV \\ \left. - \int_{S_{\sigma n}} \bar{T}_i u_i dS \right] \quad (4) \end{aligned}$$

Reissner の原理においては、応力場 σ_{ij} は(2)式の汎関数の可積分性以外に特別の条件は課せられていないが、 σ_{ij}^H として次のような条件を満足するものを選ぶことにする。

$$\int_{V_n} \sigma_{ij}^H dV = 0 \quad (5)$$

これと、材料の均質性を仮定すれば(4)式における第2項と第3項は消えて、

$$\begin{aligned} \Pi_R = \sum_n \left[\int_{V_n} \left\{ -\frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij}^c \sigma_{kl}^c + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^c (u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} dV \right. \\ + \int_{V_n} \left\{ -\frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij}^H \sigma_{kl}^H + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^H (u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} dV \\ \left. - \int_{S_{\sigma n}} \bar{T}_i u_i dS \right] \quad (6) \end{aligned}$$

この式は、(5)式の条件が満足されている場合には、一定応力状態のひずみエネルギーと高次の応力状態のひずみエネルギーが互いに独立に計算できて、それらの和として全ひずみエネルギーが与えられることを示している。即ち、有限要素法に関していえば、要素の剛性マトリックスが各々独立に計算された一定応力状態における剛性マトリックスと高次の応力状態における剛性マトリックスの和で与えられることを示している。

3 有限要素法定式化

(2)式の汎関数からの定式化を説明する。応力場および変位場をそれぞれ次のように仮定する。

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} \quad (7)$$

$$\{u\} = [N] \{\delta\} \quad (8)$$

ここに、 $\{\beta\}$ は未定のパラメータ、 $\{\delta\}$ は節点変位、 $[N]$ は変位関数である。 $[N]$ にひずみ-変位関係式における微分演算を行なったものを形式的に $[N']$ と書くことにする。

(7)式、(8)式を(2)式に代入すると

$$\Pi_R = \sum_n \left[-\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} + \{\beta\}^T [D] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{Q\} \right] \quad (9)$$

ここに

$$[H] = \int_{V_n} [P]^T [C] [P] dV \quad (10)$$

$$[D] = \int_{V_n} [P]^T [N'] dV \quad (11)$$

$$\{Q\} = \int_{S_{\sigma n}} [N]^T \{\bar{T}\} dS \quad (12)$$

混合法本来のやり方では $\{\beta\}$ と $\{\delta\}$ の両方を未知パラメータとして残して、(9)式で得られる系全体の汎関数の停留条件から $\{\beta\}$ と $\{\delta\}$ を決定するのであるが、それでは未知数の数が多くなりすぎるのと、扱うマトリックスの正定値性が失われるという欠点があるので実用的でない。そこでハイブリッド応力法の場合と同様に、要素ごとの $\{\beta\}$ に関する停留条件から各要素の $\{\beta\}$ を $\{\delta\}$ に関して求めておく方法⁸⁾が有効である。即ち(9)式の各要素ごとの寄与を $\{\beta\}$ に関して停留化すれば

$$-[H]\{\beta\} + [D]\{\delta\} = 0 \quad (13)$$

が得られ、この式より

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [D] \{\delta\} \quad (14)$$

これを(9)式に代入すれば

$$\Pi_R = \sum_n \left[\frac{1}{2} \{\delta\}^T [D]^T [H]^{-1} [D] \{\delta\} - \{\delta\}^T \{Q\} \right] \quad (15)$$

この式の $\{\delta\}$ に関する停留条件より

$$\sum_n [D]^T [H]^{-1} [D] \{\delta\} = \sum_n \{Q\} \quad (16)$$

従って $[D]^T [H]^{-1} [D]$ がこの定式化の要素の剛性マトリックスである。

ここで、要素内の応力-変位関係式

$$C_{ijkl} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (17)$$

を直接考える。この式において $\{u\}$ を既知関数のごとく考えて、Galerkin 法を適用すれば

$$\int_{V_n} [P]^T \{C\} [P] \{\beta\} - [N'] \{\delta\} dV = 0 \quad (18)$$

が得られる。この式は(13)式と等価であるからして、(14)式は応力-変位関係式を応力場の試験関数 $[P]$ を重みとして、要素内で平均的に満足させたものであることがわかる。この混合法と変位法との差異は、応力-変位関係が(14)式のように満足されるか、あるいは(17)式のように満足されるかだけである。

もし応力場の高次成分が(5)式を満足するように選ばれると、一定応力場と高次の応力場の剛性は上述の定式化に基づいて別々に計算できて、要素の剛性はそれらの重ね合わせによって得られる。その際、2次元問題においては一定応力状態の剛性は、変位法において Reduced integration を行なって得られるので、これを用いた方がはるかに簡単である。

このように、(5)式の条件が満足されるように高次の

応力場が仮定できれば、この応力場は一定応力状態に影響を与えることはないので、一定応力状態の剛性が正しく評価されている限りは、かならずパッチテストを通る。さらに、高次の応力場がいくつかの互いに独立な組に分離できるときには、混合法では大幅な計算量の減少が行なえる。

4 平面応力要素

平面応力問題は、弾性学における基本的な問題であると同時に、構造設計においても重要な意味をもつものであるから、有限要素法の出現した当初から今日に至るまで数多くの有限要素モデルが提案されている。ここでは4節点四辺形要素に関して、現在広く使用されている既存の要素について簡単に説明を行ない、次に前節で述べた定式化に従って新しい要素を誘導し、いくつかの例題を解くことによってこれらの比較検討を行なう。

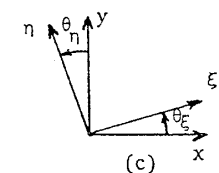
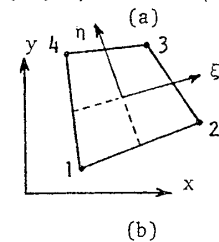
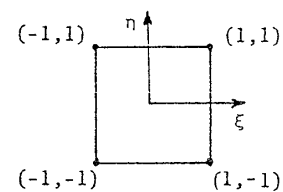
4.1 従来の要素

平面内において一般形状の四辺形を扱う場合、Fig. 1(b)のCartesian座標系からFig. 1(a)の局部座標系に変換すると便利である。このときの座標変換式は

$$x = \sum_1^4 N_i x_i, \quad y = \sum_1^4 N_i y_i \quad (19)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$



(a) Local coordinate
(b) Cartesian coordinate
(c) Angles for stress transformation

Fig. 1 Coordinate system of four-node quadrilateral element

で与えられる。アイソパラメトリック要素においては、この座標変換内挿式がそのまま変位場の仮定に用いられる。即ち x, y 方向の変位をそれぞれ u, v とすれば、

$$u = \sum_1^4 N_i u_i, \quad v = \sum_1^4 N_i v_i \quad (21)$$

この変位場を用いて通常の変位法の定式化に従って誘導された要素に Q4 と呼ばれる要素がある^{9), 10)}。この要素はパッチテストを通る。

(21)式の変位場は、面内の単純曲げモードを正確に記述する能力を持たないため、単純曲げ状態においてせん断応力を生ずるため Q4 が非常に精度の悪い要素となってしまう¹⁰⁾。そこで (21) 式に曲げモードを表現するためのバブルモードを付加した変位場

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_1^4 N_i u_i + (1-\xi^2)u_5 + (1-\eta^2)u_6 \\ v &= \sum_1^4 N_i v_i + (1-\xi^2)v_5 + (1-\eta^2)v_6 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

を用いた要素が考案された²⁾。これは Q6 と呼ばれる。

この要素は面内曲げモードに関する精度を著しく改良したが、長方形でない一般形状の要素分割においてはパッチテストを通らない。この欠点を克服するため、ひずみエネルギーの数値積分を行なうときに現われる $x, \xi, x, \eta, y, \xi, y, \eta$ を $\xi=\eta=0$ で評価することによって強制的にパッチテストを通るようにした要素が出現した³⁾。これを QM6 と呼んでいる。

一方、ハイブリッド応力法においては、次のような 5 自由度の応力場

$$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 y, \quad \sigma_y = \beta_3 + \beta_4 x, \quad \tau_{xy} = \beta_5 \quad (23)$$

と、各辺上に線形の変位場を仮定した要素がハイブリッド応力法としては簡単でしかもみかけのせん断応力を発生することはなく精度のよい要素である。しかし、この要素は座標軸のとり方によって剛性が異なる (variant) という欠点をもっている。そこで、剛性計算を要素に固定した直交座標系 ($x-y$ 座標系を Fig.1(c) の θ_ξ と θ_η を各中線の長さを重みとして平均化した角度だけ回転したもの) で常に行なう要素が提案された¹⁰⁾。これを HL と呼んでいる。この要素はパッチテストを通るが変位法に比べていくぶん不経済な要素であると考えられる。

4.2 混合法による新要素

平面応力問題の場合には、一定応力状態の剛性は変位法によって 1 点 Gauss 積分を行なうことによって容易に求まる。

次に、高次の応力状態における剛性の評価について考える。変位場としては (21) 式を仮定する。応力場として、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^H &= \eta \beta_1 \cos^2 \theta_\xi + \xi \beta_2 \sin^2 \theta_\eta, \\ \sigma_y^H &= \eta \beta_1 \sin^2 \theta_\xi + \xi \beta_2 \cos^2 \theta_\eta, \\ \tau_{xy}^H &= \eta \beta_1 \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi - \xi \beta_2 \sin \theta_\eta \cos \theta_\eta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

を仮定する。これらの応力場は、このままでは (5) 式の条件式を満足していない。そこで (5) 式における微小体積 dV を別のものと置き換えることを考える。要素の板厚を t 、面積を A 、(19) 式の座標変換における Jacobi のマトリックスを $[J]$ 、その行列式を $\det[J]$ とすると微小体積 dV は

$$dV = t dA = t dx dy = t \det[J] d\xi d\eta \quad (25)$$

で表わされる。ここで、この式に現われる $\det[J]$ を $\xi=\eta=0$ における値 $\det[J_0]$ で置き換えてやれば、 $\det[J_0]$ は定数であるから (24) 式の応力場は常に (5) 式を満足する。またこの場合、要素の面積は正しく計算される。さらに (10) 式から明らかなように β_1 と β_2 は互いに独立となる。この $\det[J_0]$ を用いて、第3節に述べた定式化を実行すれば、高次の応力状態における剛性マトリックスが求まる。これを先に求めた一定応力状態における剛性マトリックスと単に加え合わせれば、要素の剛性マトリックスが求まる。このようにして得られた新要素を MX2 と呼ぶ。

最後に、長方形要素の場合には Q6, QM6, HL, MX2 のすべての剛性マトリックスは全く同じものになることに留意されたい。

4.3 数値解析例

(a) 平面応力問題としての片持梁 (Fig. 2)

Taylor ら³⁾が QM6 のテストに用いた例題で、単軸引張り (load case 1) と単純曲げ (load case 2) が加わる場合の先端 K における x, y 方向変位と、A から I までの各点における直応力を求めている。ここでは Q4, QM6, MX2 の 3 つの要素を用いて解かれた。単軸引張りの場合には、これがいわゆるパッチテストであって、これら 3 要素ともパッチテストを通る (結果省略)。

Load case 2 の場合における結果を Table 1 に示す。これより、MX2 と QM6 の結果がよく似ていることが言える。

(b) 任意形状の平面応力構造 (Fig. 3)

Cook¹⁰⁾が HL などのハイブリッド応力法要素の性能を見るために用いた例題で、HL の結果は文献¹⁰⁾のものをそのまま引用した。厳密解はわかっていないため、

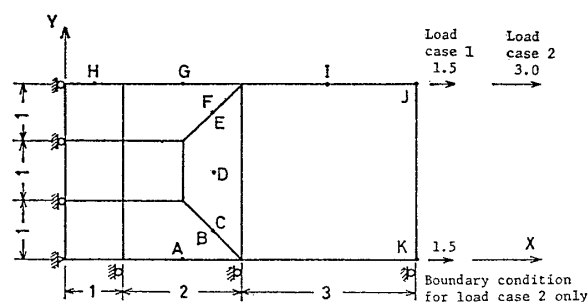


Fig. 2 Cantilever beam problems modeled by plane stress elements ($E=1.0, \nu=0.25$)

Table 1 Results for cantilever beam problems in Fig. 2 (load case 2)

Element	Deflection u K	Normal stress σ_x									
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	
Q4	-17.01	-0.008	0.399	0.602	1.436	2.271	2.464	2.837	3.071	2.777	
QM6	-17.61	0.022	0.397	0.540	1.479	2.418	2.555	2.922	3.024	3.000	
MX2	-17.59	-0.120	0.388	0.499	1.474	2.449	2.551	3.043	3.033	3.000	
Exact	-18.00	0.000	0.500	0.500	1.500	2.500	2.500	3.000	3.000	3.000	

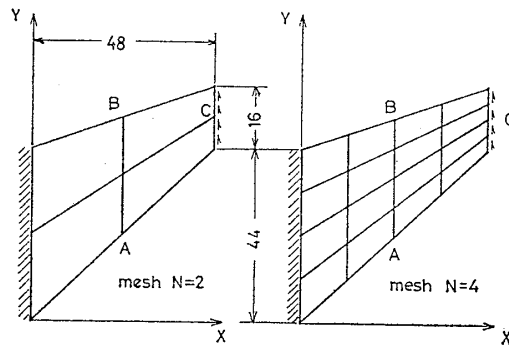
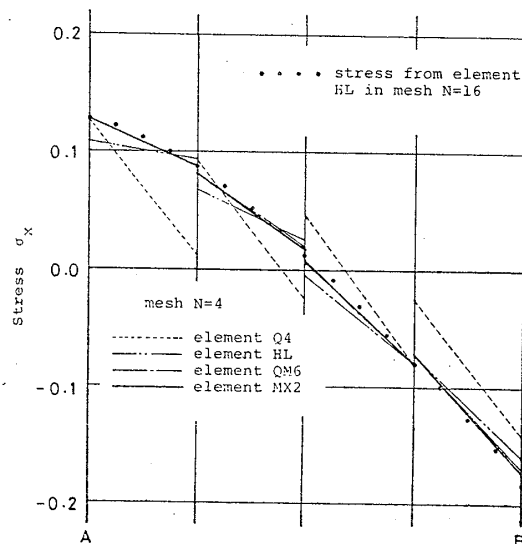
Fig. 3 Arbitrary plane stress structure with unit load uniformly distributed along right edge ($E=1.0$, $\nu=1/3$)

Fig. 4 Normal stress along line AB in Fig. 3

HLを用いて細かいメッシュ ($N=16$) で解いたものを正確な値と考えて、粗いメッシュ ($N=2$ あるいは $N=4$) で得られる結果を各要素について比較している。その計算結果を Table 2 および Fig. 4 に、要した計算時間を Table 3 に示す。これらの結果からわかるように、MX2 は精度が QM6 とほとんどが変わらないのに比べ、計算時間がかなり短かくてすみ、経済的であるといえる。

5 3次元中実要素

3次元弾性問題を解析的に扱うことは非常に困難であるが、有限要素法によれば、考え方のうえからはずいぶん楽に扱える。しかしながら、その計算費用が莫大な

Table 2 Results for problem in Fig. 3

Element	y direction deflection at C	
	N=2	N=4
HL	18.17	22.03
Q4	11.85	18.30
QM6	21.05	23.02
MX2	20.96	23.01
HL in mesh N=16	23.81	

Element	Minimum stress at B	
	N=2	N=4
HL	-0.1335	-0.1700
Q4	-0.0916	-0.1510
QM6	-0.1688	-0.1855
MX2	-0.1562	-0.1858
HL in mesh N=16	-0.2005	

Element	Maximum stress at A	
	N=2	N=4
HL	0.1582	0.1980
Q4	0.1281	0.1905
QM6	0.1775	0.2225
MX2	0.1845	0.2240
HL in mesh N=16	0.2294	

Table 3 Computation time for problem in Fig. 3 by HITAC 8800/8700

Element	Q4	QM6	MX2
Total computation time (sec)	0.183	0.331	0.186

ものになってしまうおそれが多分にある。従って3次元中実要素においては、その経済性に強い関心が持たれる。

4節点四辺形要素を3次元の場合に拡張すれば、8節点中実要素が得られる。それで前節で述べた平面応力問題における手法は、そのまま3次元の場合にも通用するから、Q4、QM6に対応する中実要素がそれぞれに考えられる。ハイブリッド応力法による要素は、3次元の場合には応力の自由度が多くいるため非常に不経済なものとなるので、一般的にいて非実用的である。

5.1 従来の要素

この場合の Fig. 5(b) に示す Cartesian 座標系から Fig. 5(a) に示す局部座標系への変換は次式で与えられる。

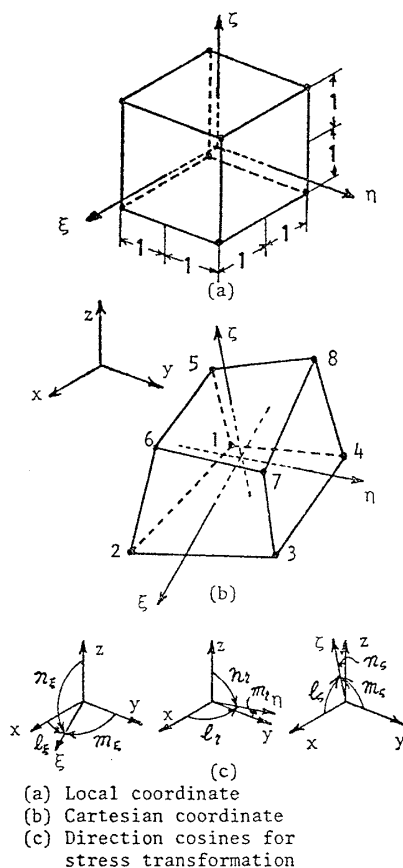


Fig. 5 Coordinate system of eight-node solid element

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (26)$$

ただし

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta), \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (27)$$

ここで (ξ_i, η_i, ζ_i) は節点 i の座標

この N_i を用いたアイソパラメトリックな変位場は、 u, v, w をそれぞれ x, y, z 方向の変位として

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad (28)$$

で与えられる。これらを用いて2次元の場合と同様な方法で得られる要素をここでは TQ 4 と呼ぶことにする。

(28) 式にバブルモードを付加した変位場

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^8 N_i u_i + (1 - \xi^2) u_9 + (1 - \eta^2) u_{10} \\ &\quad + (1 - \zeta^2) u_{11} \\ v &= \sum_{i=1}^8 N_i v_i + (1 - \xi^2) v_9 + (1 - \eta^2) v_{10} \\ &\quad + (1 - \zeta^2) v_{11} \\ w &= \sum_{i=1}^8 N_i w_i + (1 - \xi^2) w_9 + (1 - \eta^2) w_{10} \\ &\quad + (1 - \zeta^2) w_{11} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

を用いて、2次元の場合の QM 6 と同様にして得られる要素をここでは TQM 6 と呼ぶことにする。

8 節点中実要素の剛性マトリックスの 24 個の固有モードのうち、6 個が剛体変位モードで、次の 6 個が一定ひずみモードで、残りの 12 個のモードが曲げとねじりが連成したモードである。この曲げねじりモードは要素形状が直方体の場合には非連成となり、6 個の曲げモードと 6 個のねじりモードに分離される。最初からこれらのモードを仮定して、剛性の計算を行なう方法がいくつか提案されている^{11), 12)}。この場合、一定ひずみモードと曲げねじりモードが剛性に関与しており、パッチテスト (収束性) のうえからは前者が、精度のうえからは後者が問題となる。この方法は、要素が直方体のときにはモードの仮定も楽で経済的な要素が得られるが、要素がひずんだ形をしているとモードの仮定が非常に面倒である。この点に関して簡便な方法を Kosloff ら¹¹⁾が与えている。また、Bretl ら¹²⁾はこの方法において、曲げねじりモードの剛性に対して修正係数を掛けて人為的な調整を行なった要素をつくり ADJ と呼んでいる。しかしながら、彼らの修正係数は与える荷重のパターンによっては相当に悪い影響をもたらすようで、普遍的に良好な結果を与える修正方法は見いだしていない。さらに、このモードの仮定から出発する方法では応力の算出がかなり面倒なものとなる。

5.2 混合法による新要素

変位場としては (28) 式を仮定する。Bretl らが指摘しているように¹²⁾、直方体でない一般形状の要素に対して 1 点 Gauss 積分によって正しく一定応力状態の剛性を評価することはできない。そこで Bretl らは、ハイブリッド応力法を用いて一定応力 (一定ひずみ) 状態の剛性を求めている。しかしながら、第3節で述べた混合法定式化で計算を行なう方が、それ自身の計算量もかなり減少するし、さらにわれわれの場合には、高次の応力状態の剛性も混合法で算出するのでそれと同時に計算できる部分があるのではあるかに有利である。一定応力状態では、応力場は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^C &= \beta_1^C, \quad \sigma_y^C = \beta_2^C, \quad \sigma_z^C = \beta_3^C, \\ \tau_{xy}^C &= \beta_4^C, \quad \tau_{yz}^C = \beta_5^C, \quad \tau_{zx}^C = \beta_6^C \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

で仮定できる。この場合 (10) 式の $[H]$ は対角マトリックスとなり $[H]^{-1}$ の計算は非常に楽になることに留意されたい。

次に高次の応力場としては次の形のものを仮定する。

$$\{\sigma\} = [T] \{\sigma_L\} \quad (31)$$

ただし、

$$\{\sigma\} = [\sigma_x^H \sigma_y^H \sigma_z^H \tau_{xy}^H \tau_{yz}^H \tau_{zx}^H]^T \quad (32)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} l_\xi^2 & l_\eta^2 & l_\zeta^2 & 2l_\xi l_\eta & 2l_\eta l_\zeta & 2l_\zeta l_\xi \\ m_\xi^2 & m_\eta^2 & m_\zeta^2 & 2m_\xi m_\eta & 2m_\eta m_\zeta & 2m_\zeta m_\xi \\ n_\xi^2 & n_\eta^2 & n_\zeta^2 & 2n_\xi n_\eta & 2n_\eta n_\zeta & 2n_\zeta n_\xi \\ l_\xi n_\xi & l_\eta n_\eta & l_\zeta n_\zeta & l_\xi n_\eta + n_\xi l_\eta & l_\eta n_\zeta + n_\eta l_\zeta & l_\zeta n_\xi + n_\zeta l_\xi \\ m_\xi l_\xi & m_\eta l_\eta & m_\zeta l_\zeta & m_\xi l_\eta + l_\xi m_\eta & m_\eta l_\zeta + l_\eta m_\zeta & m_\zeta l_\xi + l_\zeta m_\xi \\ n_\xi m_\xi & n_\eta m_\eta & n_\zeta m_\zeta & n_\xi m_\eta + m_\xi n_\eta & n_\eta m_\zeta + m_\eta n_\zeta & n_\zeta m_\xi + m_\zeta n_\xi \end{bmatrix} \quad (33)$$

および,

$$\{\sigma_L\} = [\sigma_\xi \sigma_\eta \sigma_\zeta \tau_{\xi\eta} \tau_{\eta\zeta} \tau_{\zeta\xi}]^T$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \eta\beta_4 + \zeta\beta_7 + \eta\zeta\beta_{13} \\ \sigma_\eta &= \xi\beta_1 + \zeta\beta_8 + \xi\zeta\beta_{16} \\ \sigma_\zeta &= \xi\beta_2 + \eta\beta_5 + \xi\eta\beta_{10} \\ \tau_{\xi\eta} &= \zeta\beta_9 + \zeta\xi\beta_{17} + \zeta\eta\beta_{14} \\ \tau_{\eta\zeta} &= \xi\beta_3 + \xi\eta\beta_{11} + \xi\zeta\beta_{18} \\ \tau_{\zeta\xi} &= \eta\beta_6 + \eta\xi\beta_{12} + \eta\zeta\beta_{15} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

この (31) 式で与えられる応力場はそのままでは (5) 式の条件式を満足しない。そこで、平面応力問題の場合と同様に、微小体積の表現に現われる Jacobi のマトリックスの行列式 $\det[J]$ を定数のものに置き換えてやる。この場合 $\int dV$ の値が正しく要素の体積 V になるように、 $\det[J]$ を $V/8$ で置き換えることにする。従って dV は $V d\xi d\eta d\zeta/8$ で置き換えられる。この要素の体積 V は一定応力状態の剛性計算の際に必然的に求まってくるのでここで改めて計算する必要はない。このようにすれば、(31) 式の応力場は (5) 式の条件を満足する。さらに、応力パラメータ $\{\beta\}$ は、 $\beta_1 \sim \beta_3$, $\beta_4 \sim \beta_6$, $\beta_7 \sim \beta_9$, $\beta_{10} \sim \beta_{12}$, $\beta_{13} \sim \beta_{15}$, $\beta_{16} \sim \beta_{18}$ と 3 個ずつの互いに独立な 6 つの組になるから、(10) 式の $[H]$ の逆行列 $[H]^{-1}$ は 18 行 18 列で計算する必要はなく、3 行 3 列の逆行列の計算を 6 回行なうだけでよく大幅な計算量の減少になる。なお (11) 式の評価に必要な積分は $2 \times 2 \times 2$ Gauss 積分で十分である。これ以後は、第 3 節で述べた手順に従えば、新しい要素が得られる。これを TM 18 と呼ぶことにする。

要素形状が直方体のときには TM 18 と TQM 6 の剛性マトリックスは完全に同じになることが、実際に両者の剛性マトリックスを作成して比較すれば確認される。

5.3 数値解析例

(a) 3次元問題としての片持梁 (Fig. 6)

梁を不規則形状の 8 要素でモデル化したものである。2 つの荷重のうち Load 1 が単軸引張で、Load 2 が Y 軸まわりの単純曲げである。TQ 4, TQM 6 の場合は、 $3 \times 3 \times 3$ Gauss 積分を行なった場合と $2 \times 2 \times 2$ Gauss 積分を行なった場合の両方について解いた。Load 1 の場合がいわゆるパッチテストで、TQ 4 と TQM 6 の二通りの積分法の場合および TM 18 がパッチテストに合格する

ことが確認できた (結果の表示は省略)。Load 2 の場合の結果を Table 4 に示す。TM 18 と TQM 6 は同程度の精度をもつことがわかる。

(b) 3次元要素でモデル化した周辺固定正方形平板 (Fig. 7)

Bretl らが ADJ のテストに用いた例題で、ADJ の結果は文献⁽²⁾の結果をそのまま引用した。対称性を利用して 4 分の 1 の板がメッシュ分割されている。荷重は中央集中荷重と一様分布荷重の 2 種類が加えられた。また板厚方向には 1 要素の分割である。結果を Table 5 に示す。ADJ で soft. とあるのは曲げねじりモードの剛性に修正係数を掛けて柔らかくしたもので、unsoft. とあるのはこれを行っていないものである。直方体メッシュ

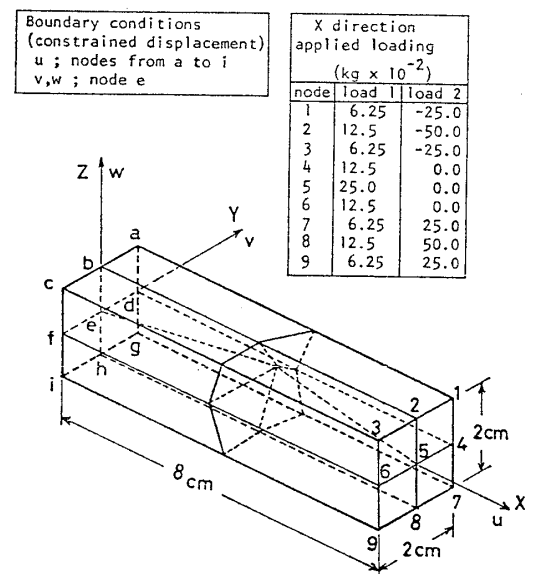


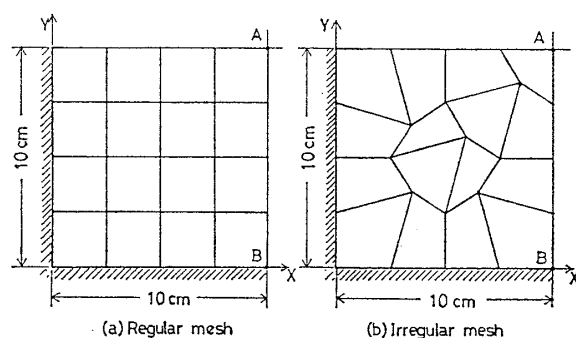
Fig. 6 Cantilever beam problems modeled by solid elements ($E=10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.25$)

Table 4 Results for beam problems in Fig. 6 (load 2)

Element	Displacement (cm X 10 ⁻⁴) W(5)	Stress kg/cm ²	
		$\sigma_x(1)$	$\sigma_x(a)$
TQ4(3X3X3)	0.169	-0.458	-0.608
TQM6(3X3X3)	0.413	-0.793	-1.448
TQ4(2X2X2)	0.170	-0.460	-0.613
TQM6(2X2X2)	0.418	-0.799	-1.462
TM18	0.425	-0.796	-1.647
Beam theory	0.480	-1.500	-1.500

Table 5 Results for plate problem in Fig. 7

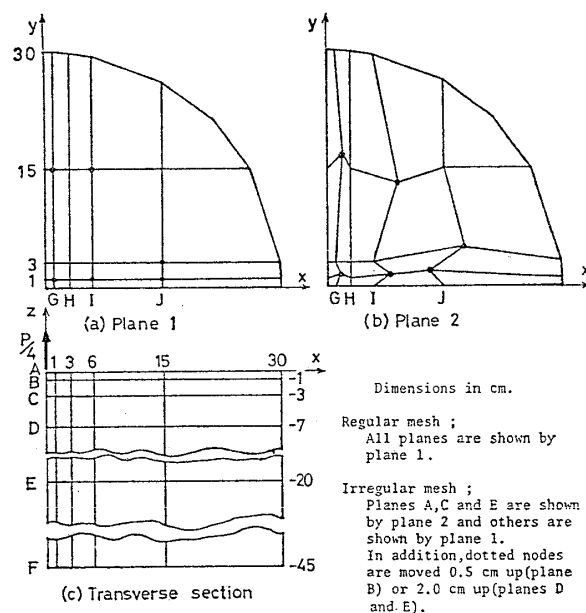
Element	Concentrated center force			Body weight loading		
	Center deflection (cm)	Stress σ_y on top kg/cm ²		Center deflection (cm)	Stress σ_y on top kg/cm ²	
		Center (A)	Midside (B)		Center (A)	Midside (B)
Regular mesh						
TQ4	0.003889	1992	-882	0.00830	2684	-2946
TQM6	0.009742	3976	-2195	0.02213	5553	-7539
ADJ	0.010013	4228	-2243	0.02262	5682	-7532
TM18	0.009742	3976	-2195	0.02213	5553	-7539
Irregular mesh						
TQ4(3X3X3)	0.003361	1976	-749	0.00708	2419	-2404
TQM6(3X3X3)	0.007839	3478	-1748	0.01780	4936	-5514
TQ4(2X2X2)	0.003377	1808	-751	0.00711	2434	-2409
TQM6(2X2X2)	0.008027	3571	-1789	0.01832	5079	-5631
ADJ(unsof.)	0.007477	3771	-1534	0.01751	5269	-5079
ADJ(soft.)	0.009333	4850	-1865	0.02163	6869	-6103
TM18	0.008097	3463	-1800	0.01838	5098	-5778
Plate theory	0.009784	∞	-3017	0.02201	5544	-12312

Fig. 7 Clamped square plate modeled by solid elements ($E=10^7 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, $t=1 \text{ cm}$, $P=4000 \text{ kg}$, $\rho=100 \text{ kg/cm}^3$)

においては TM 18 は TQM 6 と完全に一致し、不規則メッシュにおいても $2 \times 2 \times 2$ Gauss 積分の場合と非常に近い値となっていることが注目される。

(c) Boussinesq 問題 (Fig. 8)

弾性半無限体に集中力が作用する問題である。メッシュの分割は Bretl らの文献 12) と同じであり、ADJの結果はこの文献から引用した。結果を Table 6, Table 7 に、ADJを除く各要素の計算時間を Table 8 に示す。この例題においては TQ 4 以外の各要素は、だいたい同程

Fig. 8 Boussinesq problem ($E=10^7 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, $P=10^4 \text{ kg}$)

度の精度を示すことができる。さらに TM 18 は $2 \times 2 \times 2$ Gauss 積分した場合の TQM 6 に比べていくぶん計算時間が短くなっていることがわかる。

Table 6 Results for Boussinesq problem by regular mesh

Element	z direction displacements ($\text{cm} \times 10^{-5}$)							Normal stress σ_z kg/cm ²			
	along z axis				along x axis			along z axis			
	A	B	C	D	G	H	I	AB	BC	CD	DE
TQ4	147	43.7	10.94	5.26	12.6	8.08	3.31	13,630	1743	134	26
TQM6	163	43.7	9.39	5.98	12.8	8.50	3.49	14,420	1666	72	35
ADJ	163	43.5	8.11	5.88	12.0	7.82	2.92	14,490	1725	41	39
TM18	163	43.7	9.39	5.98	12.8	8.50	3.49	14,420	1666	72	35
Theory	∞	49.6	16.60	7.09	29.0	9.66	4.83	19,100	1194	191	26

Table 7 Results for Boussinesq problem by irregular mesh

Element	z direction displacements (cm X10 ⁻⁵)							Normal stress σ_z kg/cm ²			
	along z axis				along x axis			along z axis			
	A	B	C	D	G	H	I	AB	BC	CD	DE
TQ4 (3X3X3)	131	43.6	10.54	5.04	11.5	7.07	3.53	11,450	1780	132	24
TQM6 (3X3X3)	140	46.6	9.34	5.37	12.6	7.62	3.81	11,300	1757	102	30
TQ4 (2X2X2)	132	43.8	10.58	5.06	11.4	7.19	3.53	11,540	1789	132	24
TQM6 (2X2X2)	141	46.7	9.39	5.40	12.4	7.76	3.82	11,400	1755	102	30
ADJ(unsol.)	137	46.1	8.27	4.70	12.4	6.47	3.02	11,300	1855	75	30
ADJ(soft.)	148	47.3	7.81	4.95	9.6	7.16	3.01	12,440	1920	63	32
TM18	144	45.8	9.67	5.41	10.4	8.26	3.73	12,280	1692	108	31
Theory	∞	49.6	16.60	7.09	29.0	9.66	4.83	19,100	1194	191	26

Table 8 Computation time for Boussinesq problem by HITAC 8800/8700

Element	Stiffness matrices formation (sec)	Simultaneous equations solving (sec)
TQ4(3X3X3)	29.2	3.9
TQM6(3X3X3)	60.7	4.0
TQ4(2X2X2)	9.8	3.7
TQM6(2X2X2)	22.4	3.7
TM18	18.3	3.8

6 平板曲げ要素

薄板の曲げに関する Kirchhoff の仮説のうちで、“変形前に板の中央面に垂直な板の上下面を結ぶ線分は、変形後も中央面に垂直である”という条件は、必然的に変位の C^1 連続性を要求する。このことは、有限要素法にとって過酷な条件であった。それで板曲げ要素に関して、様々な研究が行なわれ、幾多の要素が出現したが、実用的な要素のほとんどは何らかの意味で C^1 連続性を満足しない非適合要素であることは興味深い。

古くは、 C^1 連続性が非常に重要なものと考えられて、少なくとも要素内ではこの連続性が満たされており、非適合性があってもせいぜい要素境界上にあるくらいであった。しかしながら、アイソパラメトリック要素の薄板への利用は、Ahmad¹³⁾に始まり、Zienkiewiczが Reduced integration によって大幅な精度の改善が得られることに気づき⁴⁾、さらにその理由と Kirchhoff の条件との関係を明白にする^{11,14)}に至って大きく発展した。今日では、板曲げやシェルに関して、アイソパラメトリック族の要素内部においても C^0 連続性しか持たない要素が一般的なものとなってきた。そこで Poisson-Kirchhoff 理論よりも厚板の Reissner-Mindlin 理論を使った方が都合のよい場合が増えてきている。この理論は、せん断変形を考慮した板理論を Reissner が提案して¹⁵⁾、それを Mindlin がいくぶん簡略化した¹⁶⁾もので、アイソパラメトリック要素向きの理論になっている。

ここでは、各頂点のみに節点を持ち、各節点で z 方向

の変位 w , x 方向のたわみ角 θ_x , y 方向のたわみ角 θ_y の3つの自由度をもつ四辺形要素を扱う。

6.1 従来の要素

古典的な板曲げ要素のうちで、ACM と呼ばれる要素は²¹⁾、Kirchhoff 理論において、 w として次の形のものを仮定している。

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^2y + a_{12}xy^3 \quad (36)$$

この w は要素境界上にたわみ角の不連続を生じるから非適合なものである。この要素の誘導は標準的な変位法に従って行なわれる。この要素は薄板で長方形の場合にのみ有効であるが、パッチテストを通り精度も非常によいので広く用いられた。

Mindlin 板を扱ったものの多くは8節点以上の要素で¹⁸⁾、4節点四辺形要素に関しては、Hughes¹⁷⁾らが Selective integration を施した双一次のアイソパラメトリック変位場をもつ要素に注目して研究を行なった。この要素をここでは HTK と呼ぶことにする。この要素では変位場として次のものが仮定される。

$$\left. \begin{aligned} u &= z\theta_y, \quad v = -z\theta_x, \quad w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi}, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ここで、 N_i は (20) 式で与えられる。ここでは w は θ_x , θ_y とは独立に定義されており、剪断変形が考慮される。剛性は変位法により、Mindlin 理論に従って誘導される。ひずみエネルギー U は、 D を板の曲げ剛性、 κ を有効せん断係数、 t を板厚、 ν をポアソン比として

$$\begin{aligned} U &= \frac{D}{2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\ &\quad + \frac{6\kappa(1-\nu)D}{t^2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (38)$$

で与えられる。このとき locking を防ぐために、この式

の第2項のせん断ひずみエネルギーを1点 Gauss 積分で評価する。このために、この要素は剛体変位モード以外に2つの Zero energy mode を持っている。これが HTK 要素がもつ大きな欠点である。なお、この HTK 要素はパッチテストを通らない。

さらに、(38)式の第1項の曲げひずみエネルギーは、たわみ角だけで表現されているために、たわみ角の変化が0で変位 w だけを生じる多項式の3次関数的な変形モードに対しては、曲げ剛性がなくなり、せん断剛性だけとなるために異常に剛性が高くなる。これを防ぐために、MSC/NASTRAN の4節点四辺形アイソパラメトリック要素 QUAD 4 では¹⁹⁾、Kirchhoff 板との比較から(38)式のせん断剛性係数 $6k(1-\nu)D/t^2$ を別のものに置き換えている。

6.2 混合法による新要素

平板曲げ問題においては、一定曲げ応力状態の剛性は(38)式で第2項を無視して第1項に1点 Gauss 積分を行なうことによって得られる。

最初の間は、長方形要素について考察する。このとき HTK と同じ剛性マトリックスをもつ混合法要素は、変位場として(37)式を仮定し、さらに高次の応力場として

$$\left. \begin{aligned} M_x^H &= \beta_1 x + \beta_2 y \\ M_y^H &= \beta_3 x + \beta_4 y \\ M_{xy}^H &= \beta_5 x + \beta_6 y \\ Q_x^H &= \beta_7, \quad Q_y^H = \beta_8 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

を仮定して、第3節で述べた定式化によって得られる。

次に HTK の欠陥を混合法によって改善することを考える。剛体モード以外の Zero energy mode については、合応力の自由度を十分に取ることで解決できる。もう一つの3次関数的変形モードにおいて異常に剛性が高くなるという欠点は、混合法においては、Mindlin 理論において合応力の一種として扱われるせん断力 Q の決め方に注意を払うことで改善できる。すなわち、せん断力 Q を曲げモーメント M と全く独立に仮定する場合と、釣り合い方程式のうちのモーメント-せん断力関係式

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= M_{x,x} + M_{xy,y} \\ Q_y &= M_{xy,x} + M_{y,y} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

を満足するように仮定される場合が考えられる。前者の場合には Selective integration を行なった変位法と等価になり、後者の場合にはハイブリッド応力法と等価になる。(40)式を満足するように Q が仮定された場合には、ここで問題にしているような欠点は持たない。しかしながら、この形のハイブリッド応力法は収束率が悪いので、これらの中間の Q の決め方が望ましい。そこで(40)式の代りに、 $C(\geq 1)$ を修正係数として、

$$Q_x = C(M_{x,x} + M_{xy,y}), \quad Q_y = C(M_{xy,x} + M_{y,y}) \quad (41)$$

によって、せん断力 Q を仮定してやればよい。この C を

大きくとってやると Q と M は独立となり変位法に近づくと考えられる。長方形要素においては、各変形モードにおける剛性の寄与がいく組かず互いに独立となるから、(41)式を仮定した場合の解析的計算が容易に実行できて、その結果から C が無限大に近づくにつれて、高次曲げモードによる剛性は変位法の場合の $(1-\nu^2)$ 倍の剛性に、他のモードによる剛性は正確に変位法の場合の剛性に近づくことがわかった。ここで ν^2 は相当に小さいから、全体としての剛性は C の増加に伴って変位法の剛性に近づくと考えてよい。また、(41)式の右辺の各次の項ごとに、それぞれの組の変形モードに関する剛性に対して C が与える影響が異なることがわかった。そこで、各次の項ごとに別の C を仮定することが考えられる。具体的には、高次の曲げモーメント場として

$$\left. \begin{aligned} M_x^H &= x\beta_1 + y\beta_3 + xy\beta_5 \\ M_y^H &= x\beta_2 + y\beta_4 + xy\beta_6 \\ M_{xy}^H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

を仮定したとき、高次のせん断力場としては

$$\left. \begin{aligned} Q_x^H &= C_0\beta_1 + C_1y\beta_5 \\ Q_y^H &= C_0\beta_4 + C_1x\beta_6 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

が仮定できる。この C_0, C_1 の最適値は数値実験から求められる。ここで、これらの修正係数を調べた一例として、高次の応力場として(42)式と(43)式を、変位場としては後述の(46)式を仮定して誘導した混合法要素を用いて、中央点に集中荷重を受ける周辺固定正方形薄板の中央点の変位を計算した場合を Fig. 9 に示す。なお、本論文に登場する正方形板においては、一辺の長さを L 、板厚を t としており、計算結果の整理には文献22)や文献18)に与えられている値が厳密解として用いられている。この図で BM 9 E とあるのは、(40)式が満足される場合の要素で、BM 13 A というのは、(42)式と独立な高次のせん断力場

$$\left. \begin{aligned} Q_x^H &= \beta_7 + y\beta_8 \\ Q_y^H &= \beta_9 + x\beta_{10} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

を仮定した要素で、BM 11 L というのは、1次の項だけ(42)式と独立な高次のせん断力場

$$\left. \begin{aligned} Q_x^H &= \beta_1 + y\beta_7 \\ Q_y^H &= \beta_4 + x\beta_8 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

を仮定した要素である。(43)式の高次のせん断力場をもった要素について、 $C(=C_0=C_1)$ を変化させた場合の影響を Fig. 9(a) に、 $C_0=1$ として C_1 を変化させた場合の影響を Fig. 9(b) に示す。ここでは、 C および C_1 の増加に伴って収束曲線がそれぞれ BM 13 A および BM 11 L のものに近づいていくことがわかる。ここまでで、長方形要素に限定した考察を終わり、以後は任意形状の4節点四辺形要素の議論を行なう。

最後にパッチテストについて考える。HTK などの双

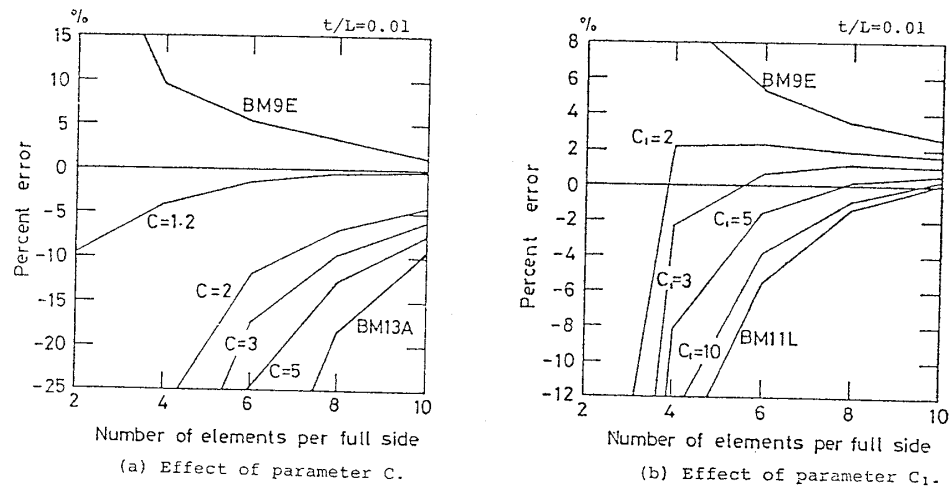


Fig. 9 Convergence for parameters C and C_1 . Maximum deflection of clamped square plate under central load

一次アイソパラメトリック板曲げ要素は、任意形状の場合にはパッチテストを通らない。そこで Cook が行なった²⁰⁾ように、 w に θ_x, θ_y と関係した2次の補正項を加えることが考えられる。このとき、変位場は次のような形で仮定される。

$$\left. \begin{aligned} u &= z \sum_1^4 N_i \theta_{yi}, & v &= -z \sum_1^4 N_i \theta_{xi}, \\ w &= \sum_1^4 N_i w_i + \sum_1^4 A_i \theta_{xi} + \sum_1^4 B_i \theta_{yi} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -(y_1 - y_4) \lambda_4 + (y_2 - y_1) \lambda_1, \\ A_2 &= -(y_2 - y_1) \lambda_1 + (y_3 - y_2) \lambda_2, \\ A_3 &= -(y_3 - y_2) \lambda_2 + (y_4 - y_3) \lambda_3, \\ A_4 &= -(y_4 - y_3) \lambda_3 + (y_1 - y_4) \lambda_4, \\ B_1 &= -(x_4 - x_1) \lambda_4 + (x_1 - x_2) \lambda_1, \\ B_2 &= -(x_1 - x_2) \lambda_1 + (x_2 - x_3) \lambda_2, \\ B_3 &= -(x_2 - x_3) \lambda_2 + (x_3 - x_4) \lambda_3, \\ B_4 &= -(x_3 - x_4) \lambda_3 + (x_4 - x_1) \lambda_4 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{16} (1 - \eta) (1 - \xi^2), & \lambda_2 &= \frac{1}{16} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{16} (1 + \eta) (1 - \xi^2), & \lambda_4 &= \frac{1}{16} (1 - \xi) (1 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

x_i, y_i は節点 i の座標値

この式の A_i, B_i は w が一定曲率状態を表現できてしかも剛体変位を邪魔しないように選ばれている。この補正方法は新たに自由度を必要としないかわりに、 θ_x, θ_y と w の独立性が失われるため、せん断変形への影響が心配される。しかしながら、 A_i, B_i の微係数の要素全体での平均値がせん断変形に影響するが、これはせん断変形モードに対しては相当小さいものと考えられるから、厚肉の板に対して (46) 式の w を用いても精度はそれ程悪化しないものと思われる。従って新要素の誘導には、

(46) 式の変位場を用いる。

次に、新要素の高次の応力場を仮定するために、(42) と (43) の両式で与えられる応力場を任意形状の場合に一般化し、さらに数多くの数値実験から、普遍的に良好な結果を与えてくれる1組の修正係数 $C_0=1, C_1=3$ を見出した。このとき、高次の合応力場は

$$\left. \begin{aligned} M_x^H &= (\xi \beta_1 + \eta \beta_3 + \xi \eta \beta_5) \cos^2 \theta_\xi \\ &\quad + (\xi \beta_2 + \eta \beta_4 + \xi \eta \beta_6) \sin^2 \theta_\eta \\ M_y^H &= (\xi \beta_1 + \eta \beta_3 + \xi \eta \beta_5) \sin^2 \theta_\xi \\ &\quad + (\xi \beta_2 + \eta \beta_4 + \xi \eta \beta_6) \cos^2 \theta_\eta \\ M_{xy}^H &= (\xi \beta_1 + \eta \beta_3 + \xi \eta \beta_5) \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi \\ &\quad - (\xi \beta_2 + \eta \beta_4 + \xi \eta \beta_6) \sin \theta_\eta \cos \theta_\eta \\ Q_x^H &= (\beta_1 + 3 \eta \beta_5) \xi_{,x}^* \cos^2 \theta_\xi \\ &\quad + (\beta_4 + 3 \xi \beta_6) \eta_{,x}^* \sin^2 \theta_\eta \\ &\quad + (\beta_1 + 3 \eta \beta_5) \xi_{,y}^* \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi \\ &\quad - (\beta_4 + 3 \xi \beta_6) \eta_{,y}^* \sin \theta_\eta \cos \theta_\eta \\ Q_y^H &= (\beta_1 + 3 \eta \beta_5) \xi_{,y}^* \sin^2 \theta_\xi \\ &\quad + (\beta_4 + 3 \xi \beta_6) \eta_{,y}^* \cos^2 \theta_\eta \\ &\quad + (\beta_1 + 3 \eta \beta_5) \xi_{,x}^* \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi \\ &\quad - (\beta_4 + 3 \xi \beta_6) \eta_{,x}^* \sin \theta_\eta \cos \theta_\eta \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ただし、 $\xi_{,x}^*, \xi_{,y}^*, \eta_{,x}^*, \eta_{,y}^*$ はそれぞれ $\xi_{,x}, \xi_{,y}, \eta_{,x}, \eta_{,y}$ の $\xi=\eta=0$ における値である。

この (49) 式の合応力場は (5) 式の条件を満足しないので、平面応力要素に対して行なったのと同様に、Jacobi 行列の行列式 $\det[\mathbf{J}]$ を $\xi=\eta=0$ における値 $\det[\mathbf{J}_0]$ に置き換えてやることにする。こうすれば (5) 式の条件を満足するとともに、パラメータ $\{\beta\}$ は互いに独立な3つの組 $\beta_1 \sim \beta_2, \beta_3 \sim \beta_4$ および $\beta_5 \sim \beta_6$ に分離できるようになる。従って (10) 式の $[\mathbf{H}]$ の逆行列は2行2列の逆行列演算を3回行なえばすむことになり、かなりの演算量の減少ができる。このようにして得られた新要素を BM 6 と呼ぶことにする。

BM6は、剛体変位モード以外に Zero energy mode を含まないし、任意形状の四辺形においてパッチテストを通る。さらにいくつかの数値実験を通して、この要素の応力の最適サンプリング点を調べたところ、形状が長方形に近い場合は要素内の 2×2 Gauss 点で、著しくゆがんだ要素においては 1×1 Gauss 点で最良の応力値が

得られることが判明した。このことはこの要素の誘導過程を思い起こせば、ある程度予想できることである。

6.3 数値解析例

(a) 正方形平板に関する計算

$t/L=0.01$ の場合を薄板とみなし、周辺単純支持と周辺固定の境界条件と、中央集中荷重と一様分布荷重の荷

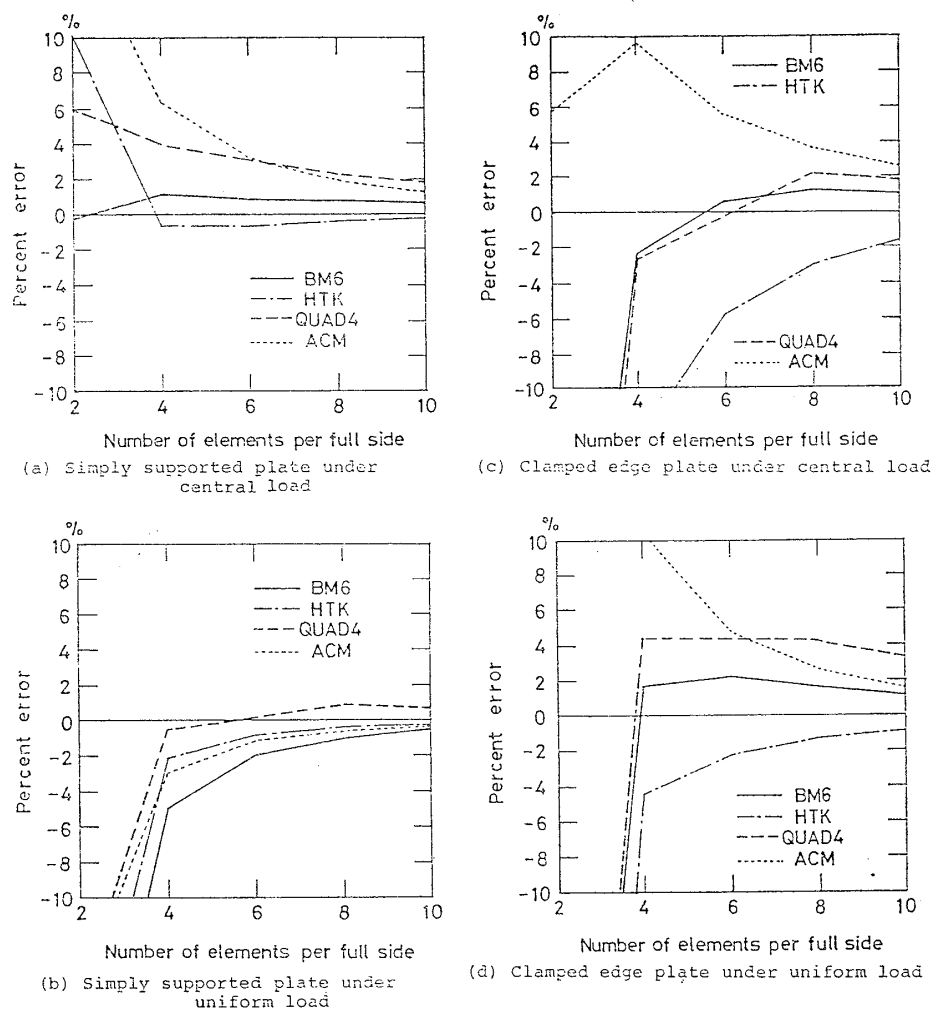


Fig.10 Convergence of central deflection for thin ($t/L=0.01$) square plate

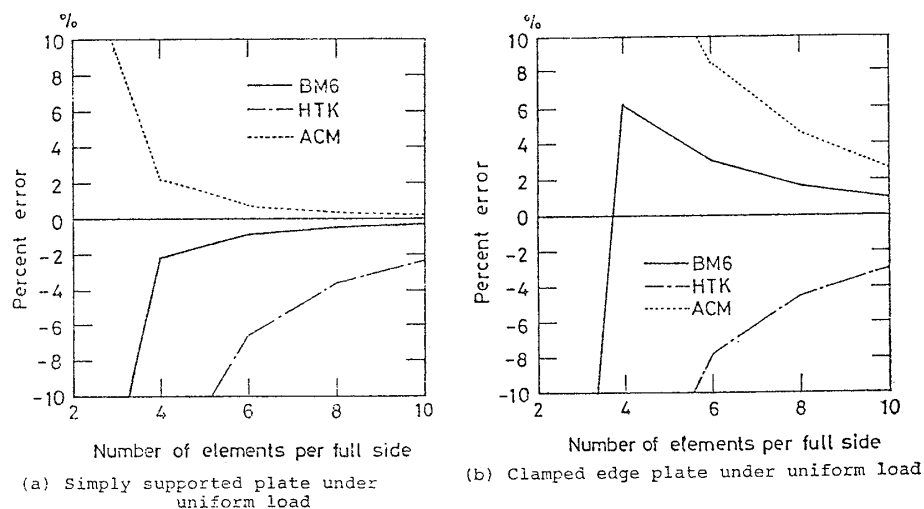
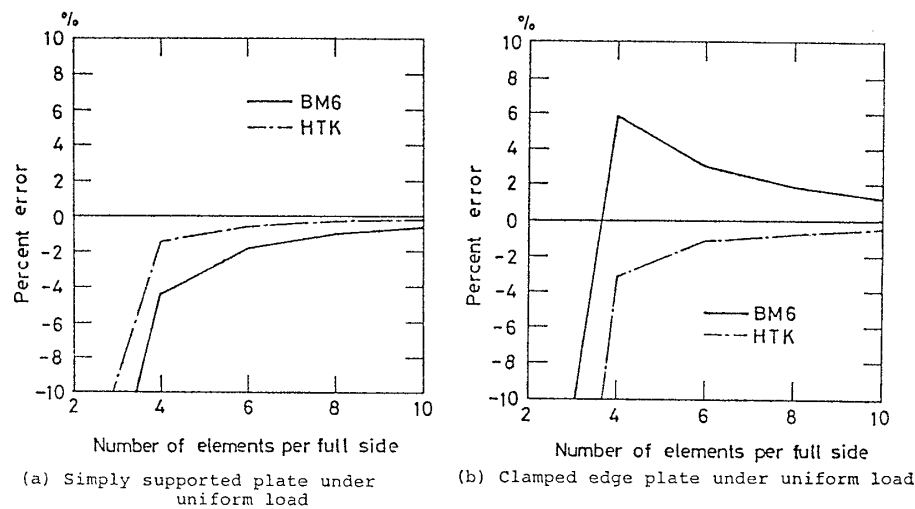


Fig.11 Convergence of center bending moment for thin ($t/L=0.01$) square plate

Fig. 12 Convergence of central deflection for thick ($t/L=0.1$) square plate

重条件の各組合わせについて、中央点の変位の収束を Fig. 10 に示す。周辺単純支持と周辺固定の板が一樣分布荷重を受けている場合に、薄板の中央点での曲げモーメントの収束を Fig. 11 に、 $t/L=0.1$ のものを厚板とみなし、これの中央点での変位の収束を Fig. 12 に示す。

以上のすべての場合に対して、一边当り6個以上の分割において、BM6は誤差が $\pm 3\%$ 以内に収まっている。これはBM6が種々の問題に対して安定した精度をもつことを示している。なおFig. 10のQUAD4の結果は文献19)から引用した。

次に、3頂点の w を拘束して残りの頂点に集中荷重をかけたときの荷重点における変位の収束を Fig. 13 に示す。Kirchhoff 理論においては、この問題はパッチテストである。図に示すように、ACMは要素の分割数にかかわらず薄板理論の厳密解と一致しており、パッチテストに合格している。またHTKは、hourglass型のZero energy modeが原因で、奇数個の要素分割においては系全体の剛性マトリックスが特異になり解は発散する。これはHTKの大きな欠陥とみなされる。これに反して、BM6は他の問題と同程度の収束率で、せん断変形を含むReissner-Mindlin理論の厳密解に収束している。

(b) 一樣分布荷重を受ける周辺単純支持正三角形平板

Fig. 14 に形状と要素分割を示す。板厚と辺長の比は、0.01で薄板とみなせる。対称性を利用すれば、全体の3分の1を扱えば十分である。中央点の変位の収束を Fig. 15 に示す。 x 軸に沿っての変位の分布を Fig. 16 に、曲げモーメントの分布を Fig. 17 に示す。これらの結果においては、大きな差はないがBM6の方がHTKよりも少し精度がよい。Table 9にこの例題の計算時間を示す。予想されたようにHTKの方がBM6よりもい

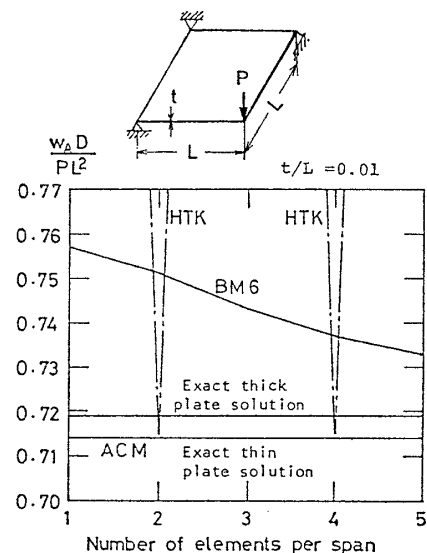
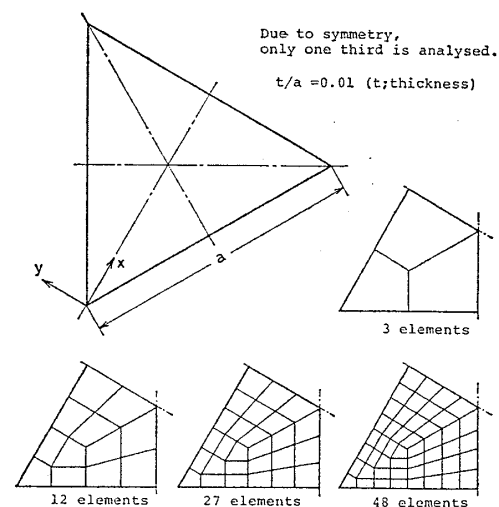


Fig. 13 Convergence of corner deflection of square plate under twisting

Fig. 14 Equilateral triangular plate simply supported and subjected to uniform load q . Geometry and mesh divisions

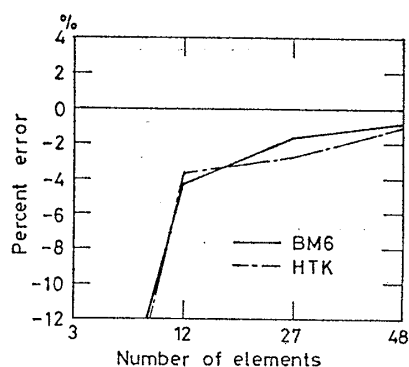


Fig. 15 Convergence of central deflection of equilateral triangular plate

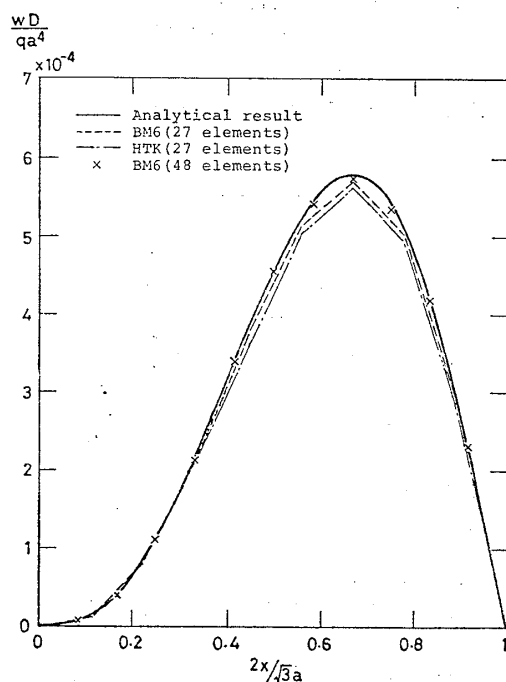


Fig. 16 Deflection along x axis of equilateral triangular plate

Table 9 Computation time for equilateral triangular plate problem by HITAC 8800/8700 (48 elements)

Element	BM6	HTK
Stiffness matrices formation (sec)	1.37	1.07
Simultaneous equations & stress solving (sec)	1.10	1.10

くぶん計算時間が短かくてすむが、計算時間の差としては小さいものである。

7 結 言

有限要素汎用プログラムの要素として使用するにふさわしい、高経済性、高精度さらに高信頼性の新要素の開発を次のような手順で行なった。

(1) この目的に適した要素の形状と節点数を決定す

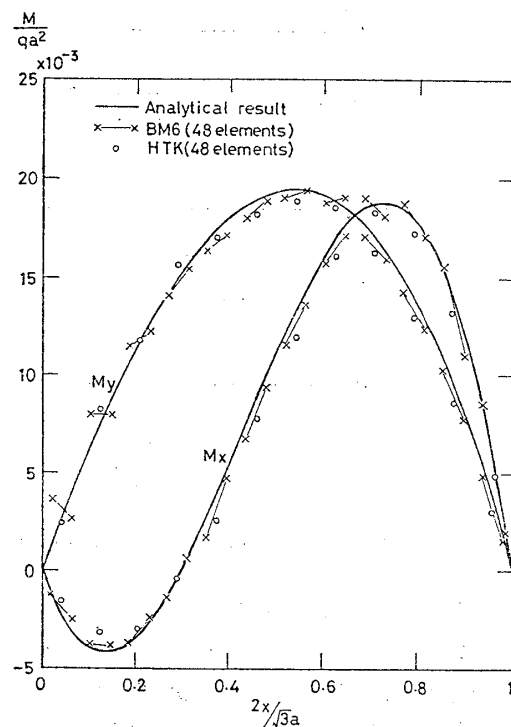


Fig. 17 Moments along x axis of equilateral triangular plate

る。そこで、平板においては4節点四辺形要素が、3次元中実要素としては8節点六面体要素を用いることがすぐに決定された。

(2) 上記の目的にできるだけ近い要素を現存する要素の中から選定する。これらの要素として、平面応力要素では QM 6 が、3次元中実要素では TQM 6 が、平板曲げ要素では HTK が注目された。これらの要素はすべて、非適合変位法要素である。

(3) これらの変位法要素を改良するにあたって、変位法よりも一般的である混合法の定式化が導入された。この定式化において、変位法との等価性を調べるために応力-変位関係式に注目した。そして、長方形あるいは直方体の場合について、上記の変位法要素と等価な混合法要素を誘導した。

(4) この混合法定式化において、パッチテストを通らせるためと計算量を減少させるために、応力場を一定応力場と高次の応力場にわけて考え、さらにエネルギー項の積分に関して Jacobi 行列の行列式 $\det[\mathbf{J}]$ を要素の重心点で常に評価することが行なわれた。

(5) QM 6, TQM 6 に対しては、計算時間の短縮を目的に混合法定式化に従って新要素を誘導し、それぞれ MX 2, TM 18 と名づけた。HTK に対しては、この要素のもつ欠陥の克服を目的として、混合法定式化に基づいて新要素を誘導して BM 6 と名づけた。

(6) 数値計算を行なって、これらの新要素と何種類かの既存の要素との比較を行なった。その結果、MX 2

と TM18 はそれぞれ QM 6, TQM 6 に比べて経済的であることが, BM 6 は HTK のもつ欠陥を改善していることが確認できた。

以上の手順に従って誘導された新要素 MX2, TM18, BM6 は, 所期の目的にはほぼ合致したものであると結論される。なお, 同様な定式化に従った一般殻要素を誘導して振動問題に適用し, 非常に良好な結果を得ているので本論文の続報として近々報告する予定である。

終わりに, 本研究の実施にあたり, 有益なご助言とご鞭撻を賜った東京大学工学部船舶機械工学科教授 津田公一博士, ならびに計算の実行に多大のご便宜いただいた同助教授 酒井宏博士に心から御礼を申し上げます。

参 考 文 献

- 1) O. C. Zienkiewicz : The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
- 2) E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghaboussi : Incompatible Displacement Models, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics (Ed. S. J. Fenves, et al), Academic Press, New York, 1973, p.43.
- 3) R. L. Taylor, P. J. Beresford and E. L. Wilson : A Non-conforming Element for Stress Analysis, Int. J. num. Meth. Engng., Vol.10, 1211~1219 (1976).
- 4) O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too : Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, Int. J. num. Meth. Engng., Vol.3, 275~290 (1971).
- 5) B. M. Irons and A. Razzaque : Experience with the Patch Test for Convergence of Finite Elements, The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, 557~587 (Ed. A. K. Aziz), Academic Press (1973).
- 6) G. Strang and G. J. Fix : An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1973.
- 7) K. Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1975.
- 8) T. H. H. Pian : Finite Element Methods by Variational Principles with Relaxed Continuity Requirement, Variational Methods in Engineering, (Ed. C. A. Brebbia, et al), Southampton University Press, 1973, Ch.3, p. 3/1.
- 9) R. D. Cook : Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974.
- 10) R. D. Cook : Avoidance of Parasitic Shear in Plane Element, J. Struct. Div., ASCE, Vol.101, No. ST 6, 1239~1253 (1975).
- 11) D. Kosloff and G. A. Frazier : Treatment of Hourglass Patterns in Low Order Finite Element Codes, Int. J. Num. & Anal. Meth. Geomech., Vol.2, No.1, 57~72 (1978).
- 12) J. L. Bretl and R. D. Cook : A New Eight-Node Solid Element, Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 14, No. 4, 593~615 (1979).
- 13) S. Ahmad, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz : Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, Int. J. num. Meth. Engng., Vol.2, No.3 (1970).
- 14) O. C. Zienkiewicz and E. Hinton : Reduced Integration, Function Smoothing and Non-conformity in Finite Element Analysis, J. Franklin Inst., Vol.302, 443~461 (1976).
- 15) E. Reissner : On Bending of Elastic Plates, Quartely of Applied Mathematics, Vol.5, 55~68 (1947).
- 16) R. D. Mindlin : Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, Vol.18, 31~38 (1951).
- 17) T. J. R. Hughes, R. L. Taylor and W. Kanoknukulchai : A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, Int. J. num. Meth. Engng., Vol.11, No.10 (1977).
- 18) E. D. L. Pugh, E. Hinton and O. C. Zienkiewicz : A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with 'Reduced' Integration, Int. J. num. Meth. Engng., Vol.12, No.7 (1978).
- 19) R. H. MacNeal : A Simple Quadrilateral Shell Element, Computers & Structures, Vol.8, No. 2 (1978).
- 20) R. D. Cook : Some Elements for Analysis of Plate Bending, J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol.98, No. EM 6 (1972).
- 21) R. W. Clough and J. L. Tocher : Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending, Matrix Methods in Structural Mechanics, Proc. Conf. WPAFB Ohio, Nov., 1966, p.515.
- 22) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.