

(昭和 55 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

ハイブリッドストレスモデルによる迂り線, 塑性関節, 塑性関節線の表現

正員 渡 辺 正 明* 正員 川 井 忠 彦**

Treatments of Slip Lines, Hinges and Hinge Lines Using New Hybrid Stress Models

by Masaaki Watanabe, *Member* Tadahiko Kawai, *Member*

Summary

In order to overcome difficulties encountered in the present FEM nonlinear analysis, one of the authors Kawai has proposed a family of new discrete elements which are called the Rigid Body Spring Models (abbreviated RBSM). Through basic studies of these elements they are proved to be very useful in limit analysis of structures or solids in general but it was also found that convergency of elastic solution may not be guaranteed.

For improvement of the RBSM models, another new element is proposed by one of the authors Watanabe using the principle of the hybrid complementary energy, and a family of such hybrid stress models are developed for the bending problem of beams, in-plane as well as bending problems of plates. It should be mentioned that the effects of shear deformation can be easily taken into account in bending analysis beam and plate problems.

In the Mechanism Method, so-called plastic hinges, plastic hinge lines or slip lines must be assumed for calculation of limit loads. They are lines of displacement discontinuity. In the present method these problems can be treated as the contact problems. It is shown by numerical examples that they are in good agreement with exact solutions of plastic analysis and effect of element deformation can be taken into account in the analysis.

1 緒 言

変位法による弾塑性解析を行なって求まる崩壊荷重は明確に定まらず, しかも極限解析の上界よりも大きい。そればかりか各点(各要素のいくつかの代表点)ごとに弾・塑性の判定を増分計算の過程に実施するため, 莫大な計算時間を消費している。これ故, 特別な事由がない限り弾塑性解析のような非線形解析は行なわれていないのが現状であろう。

ところで, 構造物の崩壊荷重を理論的に求める方法として塑性設計法での仮想変形法がある^{6), 7)}。簡単な崩壊モードを仮定し, 外部仕事と内部で散逸されるエネルギーが等しいとして上界という明確な意味を有する崩壊荷重を与える手法である。そこでは, 迂り, 塑性関節あるいは塑性関節線というような変位の不連続性が重要な役割を果たしている。この仮想変形法を直接的に取り入れることができる要素であれば, 従来の有限要素法よりも格段に速く崩壊荷重を求め得る可能性がある。

最近, 著者の一人, 川井が提案した“剛体バネモデル(Rigid Body Spring Model, 略して RBSM)”は, まさに前述の目的に合致した要素であり, 仮想変形法を計算機に適合するように発展させたモデルである¹⁾。要素分割が適切なら, 工学的に意味のある崩壊荷重を簡便に求め得ることができる。しかし, 剛体と仮定しているの で, 変分差分法で説明される 1 次元要素を除き, 要素自身の変形(歪み)エネルギーとポアソン比の影響を無視しているため崩壊に到達する以前の情報に関して信頼性が不足している²⁾。

本論は, 上述のいくつかの欠点を解決するために開発された一連の新しい要素モデルについて述べるものである。

仮想変形法では塑性関節や迂り線などの変位の不連続場の考察が前提となるので, 要素の頂点に節点を置く従来の有限要素法ではその表現は困難である。この点, RBSM は要素内の代表点でのみしか変位パラメータを配置していないので簡単に表現できる。ところで, 要素の境界边上(中点)に変位パラメータを考えるモデルであれば, 変位の不連続性を比較的容易に表わし得る。

* 東京大学大学院(現三菱総合研究所)

** 東京大学生産技術研究所

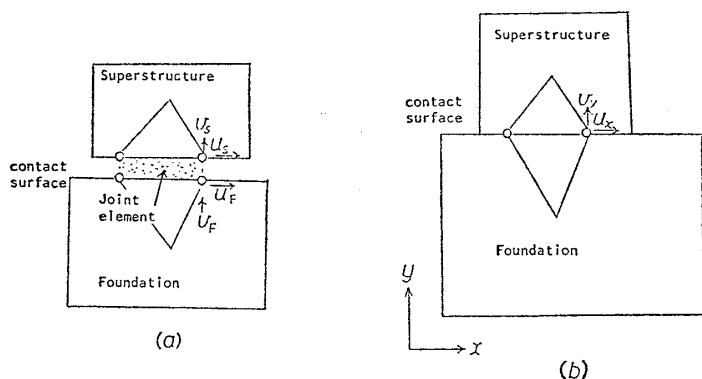


Fig. 1 Two finite element methods of contact problem analysis

この立場に立ち、ハイブリッドストレスモデル (hybrid stress model) と呼ばれてもよい一連のモデルを2次元、梁および板につき開発した (ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づいているので)。

変位の不連続を接触問題と捉えて表現すれば、弾性変形も含んだかたちで極限解析が行なえることを、以下の節に数値計算例と共に具体的に述べる。

2 等価節点力を用いた変位の不連続の表現法

有限要素法の接触問題の解析法には2通りの方法があると思われる。接触面に接合要素 (joint element) と呼ばれる特殊な要素を挿入する方法があるが、変形に対しては近似的にしか求まらない (Fig. 1 (a) 参照)¹³⁾。他の一つとは、より厳密な方法として等価節点力を用いて行なうことである (Fig. 1 (b) 参照)¹⁴⁾。どちらの方法でも、従来の有限要素を用いては、あらかじめ接触面がわかっている問題のほかには適用できない手法である。

本論では後者の立場で変位の不連続を表現するが、2次元での迂りを例として具体的に説明しよう。

2次元要素の中で要素境界辺 (中点) に節点を設ける要素として Fig. 2 に示す de Veubeke の三角形要素がある¹¹⁾。これは辺の中点で作る内部三角形で節点変位を線形補間した変位法の要素と同じであることはよく知られている。歪みエネルギーを Π と表わせば、節点変位 u_x, v_y に対する変分の物理的意味はそれぞれ

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_x} = F_x, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_y} = F_y$$

のように等価節点力 (全体座標系) である。いま要素境界辺の接線方向への迂りを考えているので、各境界辺の法線、接線方向で定義される局部座標系での変位成分 (u_n, v_s) を用いる (Fig. 2 参照)。歪みエネルギー Π の u_n, v_s に対する変分はそれぞれ

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_n} = F_n, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_s} = F_s \quad (1)$$

という物理的意味を有す。つまり、それぞれ要素境界辺

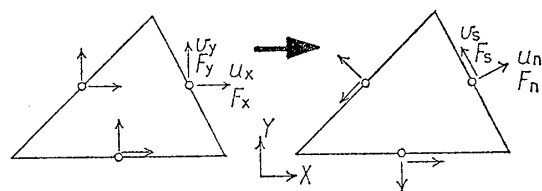


Fig. 2 Transformation of nodal displacements

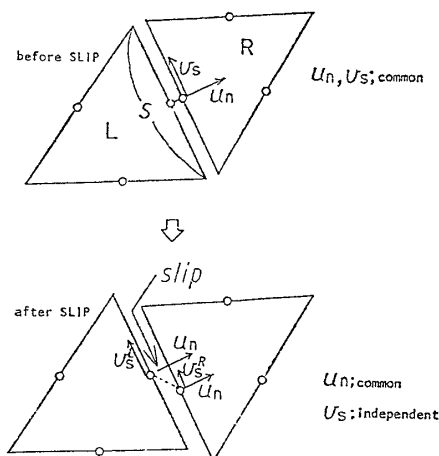


Fig. 3 Expression of slip line by hybrid stress model (constant stress model...unstable)

の法線、接線方向の等価節点力となり、迂りの判定に好都合となる。

(1) 式において、Fig. 3 の L, R 要素の寄与分をそれぞれ $F_n^L, F_s^L, F_n^R, F_s^R$ とする。物体力が存在しないならば、 $F_n=0, F_s=0$ であるから、両要素からの等価節点力は釣り合っており、

$$F_n^L + F_n^R = 0, \quad F_s^L + F_s^R = 0$$

となる。以後は物体力の存在しない場合のみを考えるが、不連続を判定する等価節点力に物体力が関与しないならば、次に述べるような手法をそのまま用いることはできる。

Fig. 3 に示すような辺の中点に節点を置くモデルでは等価節点力が応力に相当する物理量であることがよりはっきりしている。つまり、要素境界辺の長さ S で割ってやれば応力の次元をもつ。

$$\sigma_n^L = \frac{F_n^L}{S}, \quad \tau_{ns}^L = \frac{F_s^L}{S} \quad (2)$$

上式において一つの要素から求めた等価節点力であることに注意されたい。

迂りの判定条件としては、 k を降伏せん断応力として

$$|\tau_{ns}| = k \quad (3)$$

を用いる。(2) 式より各境界辺に付き接線応力を求め (3) 式の条件を満たしたなら、接線方向の相対的な迂りを許すために、いままで共通であった v_s のみ辺を挟む要素で独立にする。このようにすれば、変位が不連続

となる汙りが表現され得る。同様なことは、梁での塑性関節 (plastic hinge)、板の塑性関節線 (plastic hinge line) にも適用される。

さて、増分計算で汙り線 (slip line) を一つずつ捜していくことになるが、前述の方法を用いれば明らかなように未知パラメータ数はだんだん増えていく。しかし、これを避ける方法もある。その一つは、汙り発生後の増分計算で増分量 Δv_s に対応する等価節点力増分 $\Delta F_s = 0$ となることを用いて、 L, R 要素のどちらかの Δv_s を消去することである⁹⁾。これは要素単位で行なえて見掛上パラメータ数は増えない。この独立にする方法では次の除荷条件

$$\tau_{ns}(\Delta v_s^L - \Delta v_s^R) < 0 \quad (4)$$

を用いて精度の高い計算が行なえる。

他の方法とは簡略計算法であるが、(3) 式の条件を満たした変位 v_s に対応する全体剛性マトリックスの行と列とを零に置くことである⁹⁾。この方法では、汙り発生後の v_s は意味の無いものとなり (4) 式を用いることもできない。

なお、本論では簡単のためにパラメータ数が増える方法によって計算した。

3 2次元ハイブリッドストレスモデル

Fig. 3 の要素や、要素内応力場を線形に仮定 (平衡方程式を満たす) して要素境界辺に各々2個の節点を設ける要素は、実際に数値計算を行なって確かめたのであるが、非常に不安定な要素である。拘束がきつい問題以外は剛性マトリックスが特異になることがたびたびある¹²⁾。つまり、節点を切り離して汙り線を求めていく過程において真のメカニズムには到達していないのにメカニズムになったように振舞い、とても実用的に成り得ない。そこで以下で示すような要素が開発された。

梁および板要素の導出にも同じ手順を踏めばよいので、ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギー原理による2次元ハイブリッドストレスモデルの導出過程を詳述しよう。

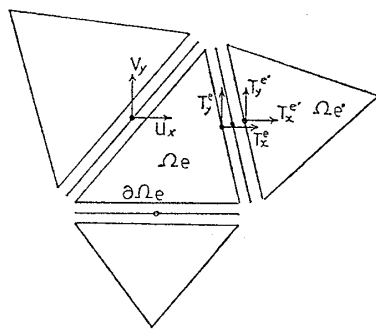


Fig. 4 One element domain Ω_e bounded by $\partial\Omega_e$ and three adjacent elements

ハイブリッド型コンプリメンタリーエネルギー原理の汎関数は Fig. 4 に示す要素に関して次のように与えられる¹⁰⁾。

$$\Pi_{CH}^e = \iint_{\Omega_e} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial\Omega_e} T_i u_i ds \quad (5)$$

ここに、 $B(\sigma_{ij})$ は平衡方程式を満たす応力場から定義されるコンプリメンタリーエネルギーである。また、各辺の法線方向余弦を n_i として表面力は $T_i = \sigma_{ij} n_j$ と表わされる。 u_i は、本来ラグランジェの未定乗数であって隣接要素と T_i が連続となるように要素境界上で導入されたものであるが、変位という物理的意味を有していることは明らかなのであらかじめ (5) 式のように表わしておく。

三角形要素内の応力場は次式のように線形分布を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a + bx + cy \\ \sigma_y &= d + ex + fy \\ \tau_{xy} &= g - by - fx \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 $a \sim g$ は一般化応力を表わす未知パラメータである。(6) 式を

$$\sigma = Ba \quad (7)$$

と表わしておくが、その説明は要しまい。

平面歪み問題を考えることにすれば、歪み $\epsilon^T = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]$ は

$$\epsilon = C\sigma \quad (8)$$

となる。ここに、上添字 T は転置を表わしている。

また、

$$C = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

である。各要素のコンプリメンタリーエネルギーは、(7)、(8) 式より

$$\iint_{\Omega_e} B(\sigma_{ij}) dx dy = \frac{1}{2} a^T G a \quad (9)$$

と求められる。ここに、 G は次式で定義される。

$$G = \iint_{\Omega_e} B^T C B dx dy \quad (10)$$

G の具体的な成分については省略する。

仮定する要素境界辺上の変位分布より (5) 式の第2項は

$$\int_{\partial\Omega_e} T_i u_i ds = a^T L u \quad (11)$$

と表わすことができる。 L, u の内容は後に明らかになる。(9)、(11) 式より (6) 式は次のようになる。

$$\Pi_{CH}^e = \frac{1}{2} a^T G a - a^T L u$$

上式において、各要素ごとに独立に仮定された一般化応力は消去することができて、

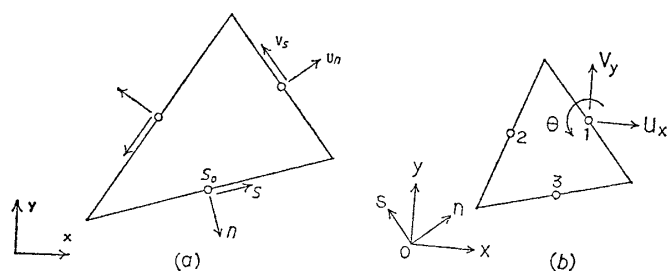


Fig. 5 Two dimensional hybrid stress model

$$-\Pi_{\mathcal{E}_H} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (12)$$

となる。すなわち、最終的には要素境界辺に仮定した変位のみで変形のエネルギーが表わされており、変位法と同じ形となっている。(12)式の右辺は歪エネルギーから求まる剛性マトリックス ($\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{L}$) と考えてもよいことになる。ただし、 $\mathbf{G}^{-1}$ は $\mathbf{G}$ の逆行列を表わしている。

次に(11)式の $\mathbf{L}$ を Fig. 5 に示す要素につき具体的に求めてみよう。RBSM では要素重心点に剛体変位成分を考えているが¹⁾、本論で提案する一連のハイブリッドストレスモデルでは要素境界辺が剛体運動すると考える。Fig. 5 (b) の1点 (辺の中点) での剛体変位成分を (u_x, v_y, θ) とすれば辺上の変位分布は

$$\begin{cases} U_x = u_x - (y - y_1)\theta \\ V_y = v_y + (x - x_1)\theta \end{cases} \quad (13)$$

と表わされる。ここに、(x_1, y_1) は1点の座標値である。辺の法線方向余弦を (l, m) とすれば、Fig. 5 (b) の n - s 座標系での変位、つまり法線方向変位 U_n 、接線方向変位 V_s はそれぞれ次のようになる (Fig. 5 (a))。

$$\begin{cases} U_n = lU_x + mV_y = lu_x + mv_y \\ \quad - \{l(y - y_1) - m(x - x_1)\}\theta \\ V_s = -mU_x + lV_y = -mu_x + lv_y \\ \quad + \{m(y - y_1) + l(x - x_1)\}\theta \end{cases} \quad (14)$$

ところで、1点での法線、接線方向の剛体変位成分 u_n, v_s はそれぞれ

$$\begin{cases} u_n = lu_x + mv_y \\ v_s = -mu_x + lv_y \end{cases} \quad (15)$$

と定義されることと、

$$\begin{cases} n = lx + my \\ s = -mx + ly \end{cases} \quad (16)$$

の関係をいれれば、(14)式は次のように書き改められる。

$$\begin{cases} U_n = u_n - (s - s_1)\theta \\ V_s = v_s \end{cases} \quad (17)$$

ここに、1点の座標値 (n_1, s_1) とし、辺上では $n = n_1$ で一定となることを用いている。

(17)式より、最終的な剛性マトリックスを表わしている(12)式の $\mathbf{u}$ としては各境界辺ごとに

$$\mathbf{u}^T = [u_n, v_s, \theta] \quad (18)$$

となる。剛体変位成分のみになっていることに注意されたい。この判定には(18)式の v_s に対する等価節点力を調べて行なう (Fig. 3 参照)。

(6), (17)式を(11)式に代入し $\mathbf{L}$ の成分を求めてみる。まず、(11)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_e} T_i u_i ds \\ = \int_{\partial\Omega_e} \{(\sigma_x l + \tau_{xy} m) U_x + (\tau_{xy} l + \sigma_y m) V_y\} ds \\ = \int_{\partial\Omega_e} [(\sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} l m + \sigma_y m^2) U_n \\ + \{(-\sigma_x + \sigma_y) l m + \tau_{xy} (l^2 - m^2)\} V_s] ds \quad (19) \end{aligned}$$

上式に(17)式を代入すれば明らかなことであるが、剛体変位 u_n, v_s, θ に対応する等価節点力は、応力に言い換えれば、それぞれ法線方向応力 σ_n 、接線方向応力 τ_{ns} 、そしてトルクになっていることがわらう。(19)式より $\mathbf{L}$ の成分は

$$\begin{bmatrix} l^2 & -lm & -l^2(s-s_1) \\ xl^2-2ylm & -xlm-y \times (l^2-m^2) & -(xl^2-2ylm) \times (s-s_1) \\ yl^2 & -xlm & -yl^2(s-s_1) \\ m^2 & lm & -m^2(s-s_1) \\ xm^2 & xlm & -xm^2(s-s_1) \\ -2xlm+ym^2 & ylm-x \times (l^2-m^2) & -(-2xlm+ym^2) \times (s-s_1) \\ 2lm & l^2-m^2 & 2lm(s-s_1) \end{bmatrix}$$

を各辺上で積分してサイズを拡張したものとなる。

この要素を用いて解析した剛体ポインチの押込みの例題が Fig. 6 に示されている。要素分割は、川井、都井のRBSM によって用いられたものと同じである³⁾。この線の発生する順番とその時の外荷重は当然のことながら異なっている。本モデルの方がより精密であることを考えれば、途中段階では本結果を信用すべきである。しかし、極限解析として最終的なメカニズムとそのときの崩壊荷重のみを考えるのであれば、単純な問題では要素分割が同じなら両者とも同一の結果を与える²⁾。Fig. 6 にメカニズムに到達するまでの変位と荷重の関係も示されている。RBSM による荷重-変位曲線は、緒言で述べたように変位の精度は保証されず本モデルの方により信頼があることは言うまでもない。

Fig. 7-a に崩壊時での変形図を拡大して示す。この図に示している要素境界辺は相対的に移動している。また、要素の頂点が複雑に重なっているのは変位の連続性が完全に満たされていないことによる。なお、Fig. 7-a には回転による変形は図示されていない。

崩壊後のこの線での相対変位量を具体的な数値で

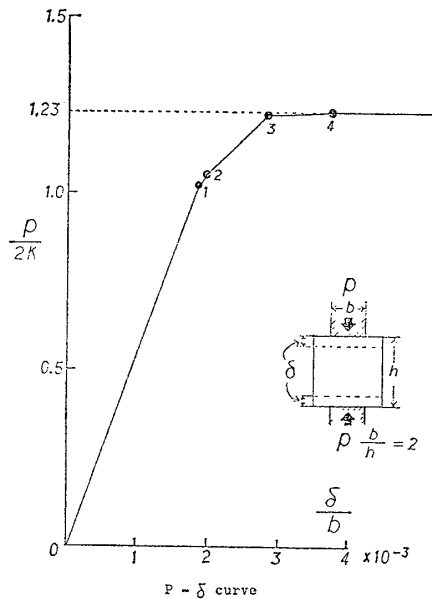


Fig. 6 Slip line analysis of punch problem using hybrid stress model

Fig. 7-b に示す。荷重点に単位の強制変位を与えている。そのときの反力を R_m とすれば外部仕事 W は

$$W = R_m L_0$$

である。ここに、 L_0 は荷重点の辺長である。各送り線の相対送り量を Δv_i と表わせば、そこで散逸される内部エネルギーは

$$U = \sum k |\Delta v_i| L_i$$

と求められる。ここに、 $\sum$ は送り線のすべての総和を意味し、 L_i は各辺の長さである。仮想変形法と同じように

$$W = U$$

とにおいて、 R_m を求めても先の増分計算を行なって得られる値と同じになる。つまり、あらかじめ送る境界辺がわかっているならば、唯一回の弾性計算で崩壊荷重が得られることが確かめられた好例である。

4 梁のハイブリッドストレスモデル

2次元では送りを表現する手段として要素境界辺の剛体変位 v_s を独立にした。同様に梁の曲げ解析では剛体回転角 θ を独立にすることによって塑性関節（ヒンジ）が表現できることを述べ、二つの数値計算例を示す。

応力分布を合応力で仮定するか、あるいは局所的な応力を用いるか2通りの方法がある。最初、前者で考えてみよう。そのときの(5)式は次のように与えられる (Fig. 8 参照)。

$$\Pi_{CH} = \int_0^l B(M) dx - (Q_1 v_1 - M_1 \theta_1) + (Q_2 v_2 - M_2 \theta_2) \quad (20)$$

コンプリメンタリーエネルギーは曲げモーメント M を用い、曲げ剛性を EI とすれば、 $B(M) = M^2/2EI$ で定義される。 Q_1, Q_2 は要素両端でのせん断力であり、曲げ

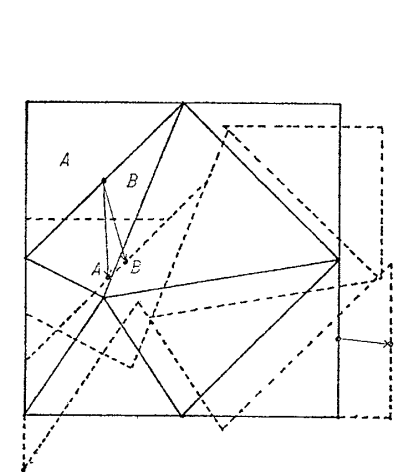
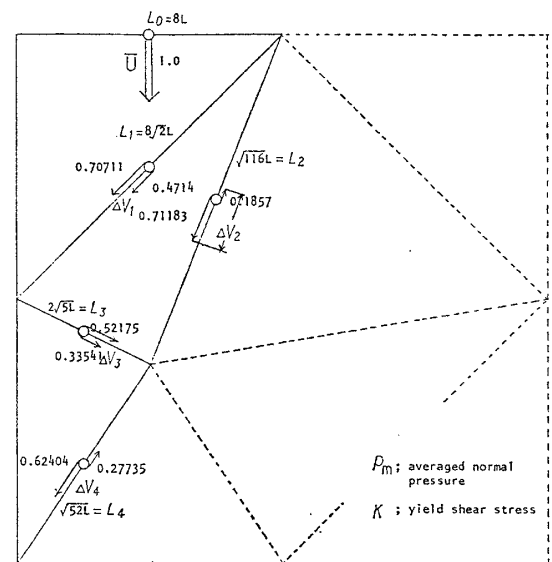
Fig. 7-a Deformation at collapse mode (The effect of displacement θ isn't plotted.)

Fig. 7-b Tangential velocities on the slip lines

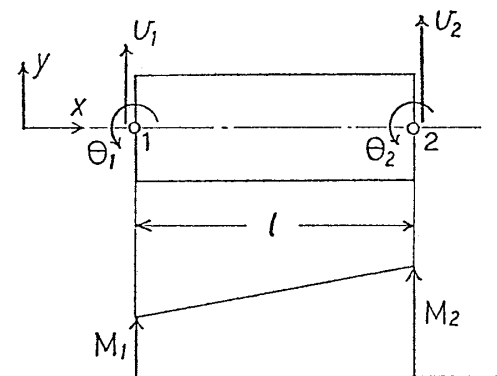


Fig. 8 Components of nodal displacement and bending moment distribution

モーメントとは、 $Q = dM/dx$ の関係にある。

Fig. 8 に示すように曲げモーメントが要素内で線形に

分布すると仮定して(20)式に代入し、各要素ごとに応力パラメータを消去して求まる剛性マトリックス（(12)式参照）は、変位法で形状関数に3次式を仮定する要素のそれと一致する。ただし、(20)式の変位には剛体変位という明確な意味はなかった。この要素を用いても、 θ に対応する等価節点力 M が M_p （塑性モーメント）になったらいままで共通であった θ を独立にすることによってヒンジを表現できるが、上述のことから明らかなようにせん断変形は考慮されていない。

RBSM の特徴は容易にせん断の効果が導入できることにある⁴⁾。比較すべきハイブリッドストレスモデルもせん断の影響を含んだ要素であるべきであろう。そのモデルが Fig. 9 に示されている。仮定する応力分布は物体力を無視したときの平衡方程式を満たす次式とする。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= y(a + bx) \\ \tau_{xy} &= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに、 a, b は一般化応力を表わし、 h は梁の断面の高さである。変位場は 2 次元要素と同様に、要素境界の剛体変位成分 (u, v, θ) を用いて

$$\left. \begin{array}{l} U=u-y\theta \\ V=v \end{array} \right\} \quad (22)$$

となる。 x 軸は図心軸と一致しているとしている。なお、以下の定式化では軸方向の剛体変位 u を無視する。

このような局所的な応力を仮定したとき、(5)式の汎関数は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \Pi_{CH}^e = & \iiint_{\Omega_i} \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right) dx dy dz \\ & - \iint_{\partial\Omega_i} (\sigma_x U + \tau_{xy} V) dy dz \end{aligned} \quad (23)$$

(21), (22)式を(23)式に代入し, (10), (11)式の $\mathbf{G}, \mathbf{L}$ を求めれば, (12)式の剛性マトリックスは容易に得られる。参考のために $\mathbf{L}$ の成分を次に示す。

$$\begin{bmatrix} -y^2 & 0 \\ -xy^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{bmatrix}$$

Fig. 10 に両端固定梁で端より $1/3$ の位置に集中荷重が作用している問題の解析結果が示されている。両端と荷重点に 3 個のヒンジを生じてメカニズムになり崩壊する。解析対象としている梁のディメンジョン ($h/l=1/100$) はせん断変形の影響は表われてこないで、荷重-変位曲線は塑性設計法の理論解⁷⁾ にはほぼ一致している。

このように本ハイブリッドストレス梁要素は集中荷重のみの問題に対しては、その位置に要素境界を配することによって材料力学レベルでのせん断変形を含んだ正解が得られることは確認している²⁾。有効せん断係数という概念は(23)式に自然に含まれている。

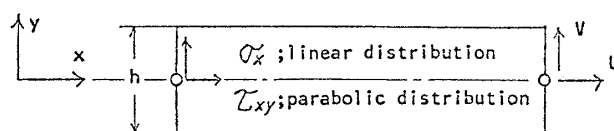


Fig. 9 Hybrid stress beam element including shear deformation

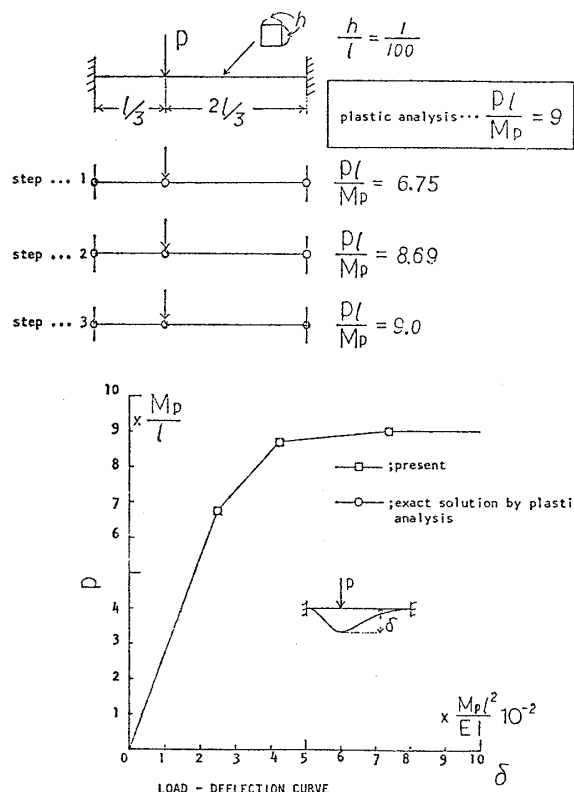


Fig. 10 Hinge analysis of a clamped beam under a concentrated load

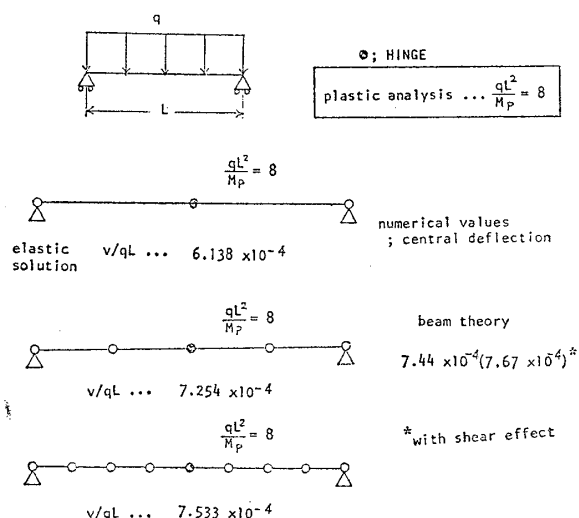


Fig. 11 Hinge analysis of a simply supported beam subject to the uniform load

等分布荷重を受ける両端支持梁の結果が Fig. 11 に示されている。厳密に考えれば、等分布荷重の場合は(21)式の応力分布を物体力のある平衡方程式を満たすように変更しなければならないが、Fig. 11 では簡単のため(21)式を用いている。分割は粗くても崩壊荷重は理論解と一致する。変位も分割を細かくしていけば理論解に収束していく様子が明らかに示されている。

5 板曲げのハイブリッドストレスモデル

板の曲げ崩壊解析では塑性関節線がうまく表現できればよい。要素と要素とが折れ曲がる回転角に対応する曲げモーメント M_n が塑性モーメント M_p になったときにそれを独立にすることによって可能となる。梁と同様、合応力を仮定するモデルを最初に考えてみよう。要素内曲げモーメントを M_x, M_y, M_{xy} とすれば、(5)式の汎関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_{CH} = & \iint_{\Omega_e} \frac{1}{2} \frac{12}{Et^3} \{ (M_x + M_y)^2 + 2(1+\nu) \\ & \cdot (M_{xy}^2 - M_x M_y) \} dx dy \\ & - \int_{\partial\Omega_e} \left(-V_z w + M_n \theta_s + M_{ns} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds \quad (24) \end{aligned}$$

ここに、 t は板厚を表わし、 $z=0$ 面を中立面としている。また、 w, θ_s は要素境界辺で定義されるたわみと境界辺回りの回転角である。辺上の合力 M_n, M_{ns}, V_z はそれぞれ次のように定義される。

$$\begin{aligned} M_n &= M_x l^2 + 2M_{xy} lm + M_y m^2 \\ M_{ns} &= -(M_x - M_y) lm + M_{xy} (l^2 - m^2) \\ V_z &= \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) l + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) m \end{aligned}$$

(24)式において、曲げモーメントは要素内一定、たわみは要素境界辺で線形に分布（頂点の値で内挿）するとし、各境界辺の midpoint で一定な θ_s を仮定する。これらを(24)式に代入して、(12)式の剛性マトリックスを求めれば、よく知られた藤野-Morley 要素が導出される。

さて、この要素を用いてのヒンジラインの表現は次のように行なえばよい。 θ_s に対応する等価節点力 m_n をその辺長で割れば、 $M_n = m_n/S$ となり、単位長さ当りのモーメントとなる。 $M_n = M_p$ を満たしたら θ_s を独立にする。堀田⁹⁾、山本⁸⁾はこの藤野-Morley 要素を用いて同様な解析法を展開しているが、ヒンジラインの判定基準として本論のような等価節点力に拠っていない。

このように梁および板の曲げ崩壊解析には有限要素法の変位法による既存の馴染み深い要素を用いることもできる。ところで、梁では局所的な応力分布を仮定することによってせん断変形をも含む要素が簡単に導びかれることを示した。板についても同様に、応力仮定から出発すれば容易にせん断の影響を含んだ要素が導びかれることを述べよう。

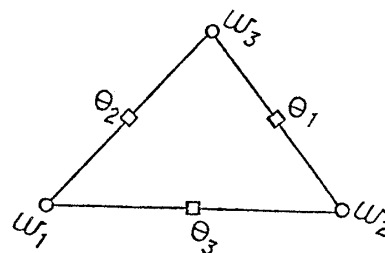


Fig. 12 Fujino-Morley's plate element

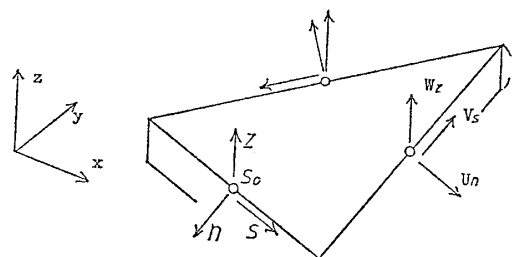


Fig. 13 Hybrid stress plate element including shear deformation

面内の応力は $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は三角形要素内線形分布、せん断応力 τ_{xz}, τ_{yz} はこれらと釣り合うように仮定する。この時、物体力はないものとしている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= z(a+bx+cy) \\ \sigma_y &= z(d+ex+fy) \\ \tau_{xy} &= z(g+hx+iy) \\ \tau_{xz} &= \frac{b+i}{2} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{h+f}{2} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、 $a \sim i$ は一般化応力を表わしている。これより、(10)式の G は求まる。

次に(11)式の要素境界辺の積分を考える。(11)式は板曲げ要素の場合は次式のようになる (Fig. 13 参照)。

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega_e} T_i u_i ds dz = & \iint_{\partial\Omega_e} [(\sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2) U_n \\ & + \{(-\sigma_x + \sigma_y) lm + \tau_{xy} (l^2 - m^2)\} V_s \\ & + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m) W_z] ds dz \quad (26) \end{aligned}$$

要素境界辺の変位場を仮定しなければならないが、ここでもやはり剛体変位場から誘導する。剛体変位は z 軸方向の平行移動 w_z , x 軸、 y 軸回りの回転角 θ_x, θ_y の3成分である。これらを用い辺上の任意点の x, y , および z 軸方向の直変位はそれぞれ次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} U_x &= z \theta_y \\ V_y &= -z \theta_x \\ W_z &= w_z + (y - y_1) \theta_x - (x - x_1) \theta_y \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここに、中立面は $z=0$ 上にあるとし、 (x_1, y_1) は辺の midpoint の座標である。

要素境界辺の法線、接線方向の直変位は(14)式と同様にしてそれぞれ次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} U_n &= z\theta_s \\ V_s &= -z\theta_n \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに、 n 軸（法線）回りの回転角 θ_n 、 s 軸（接線）回りの回転角をそれぞれ次のように定義している。

$$\theta_n = l\theta_x + m\theta_y$$

$$\theta_s = -m\theta_x + l\theta_y$$

上式を逆に解き、それらを (27) 式の第 3 式に代入し、(16) 式を用いれば、次式が得られる。

$$W_z = w_z + (s - s_1)\theta_n \quad (29)$$

ここに、辺上で $n=n_1$ と一定となることを用いている。最終的に要素境界辺に仮定する変位分布は局部座標系 $z-n-s$ で定義された剛体変位成分 (w_z, θ_n, θ_s) を用いて表わされた (28) 式と (29) 式となる。それらと (25) 式を (26) 式に代入すれば、(11) 式の L は求まる。ヒンジラインは前述した方法により表現される。

中央に集中荷重を受ける周辺支持正方形板の解析結果が Fig. 14 に示されている。崩壊荷重とメカニズムは理論解と完全に一致している。ところで、本板モデルでは要素の頂点に節点を置いていないので Fig. 14 の要素分割では厳密な意味の集中荷重を扱えない。本計算は (29) 式に荷重点（頂点に一致している）の座標値を代入し、それに連結しているすべての辺に等分して処理している。

Fig. 15 に等分布荷重を受ける周辺支持正方形板の結果が示されている。分布荷重に対しては (25) 式を修正し

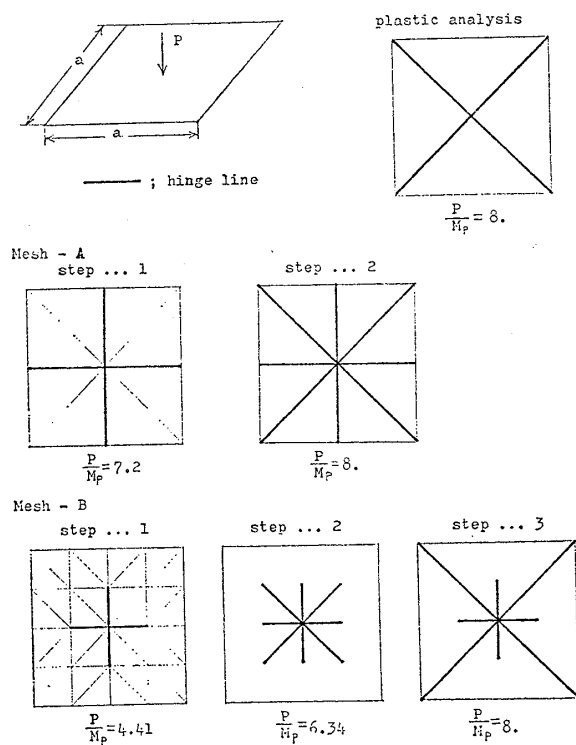


Fig. 14 Hinge line analysis of a simply supported square plate under a concentrated load

た応力分布を仮定すべきであるが、簡単のため変更を加えなかった。それにもかかわらず、崩壊荷重は理論解⁶⁾と同じになるばかりか、メカニズムも一致する結果を得た。

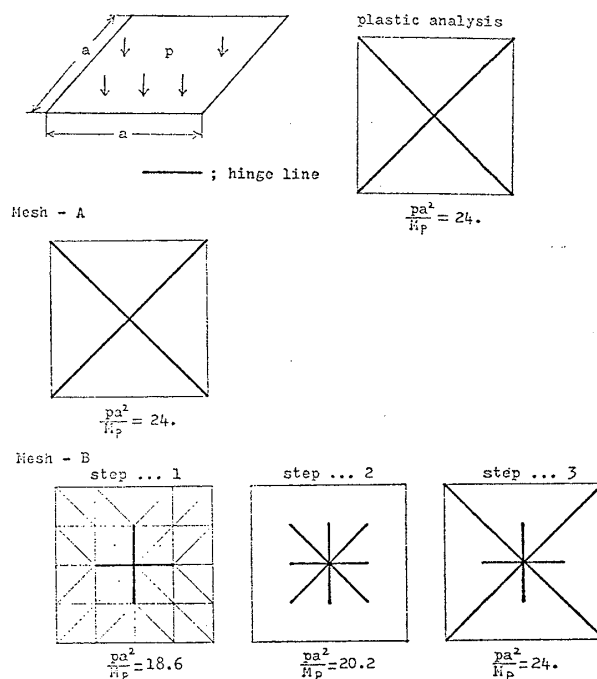


Fig. 15 Hinge line analysis of a simply supported square plate subject to the uniform load

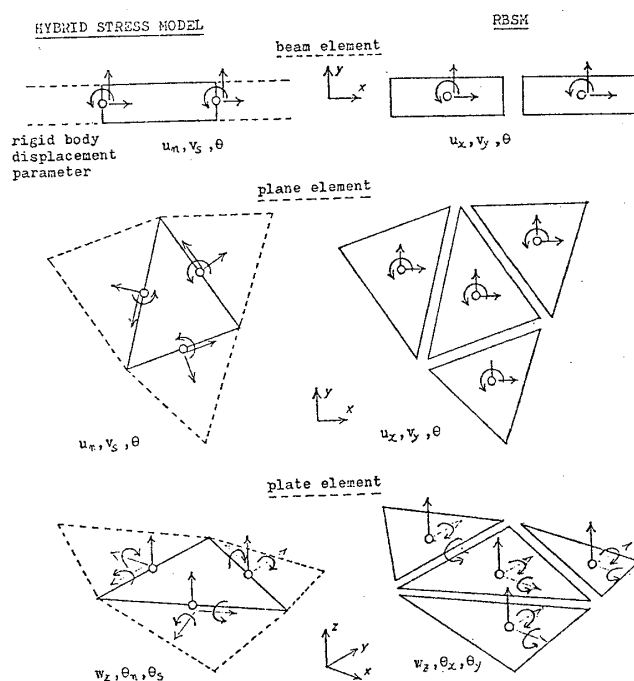


Fig. 16 Comparisons of the rigid displacement parameters

6 結 言

参 考 文 献

2次元、梁および板要素を統一した方法で、ハイブリッドストレスモデルとして導びいた。もちろん、この方法を拡張して3次元要素も容易に導出可能である。これらの要素は著者の一人川井が提案した RBSM の要素にそれぞれ対応しており (Fig.16 参照)、緒言で述べたような不明瞭さはなくなっている、いわば RBSM のメートル原器的役割を果たすものである。

定式化から明らかなように本論文で提案された一連の要素では、はり等の変位が不連続となる判定に要素の変形より決まるエネルギー (歪みエネルギー) から求まる量を用いている。つまり、等価節点力を用いて要素間の強度を調べていることになっている。本モデルによれば、要素内の強度も同時に考慮ができるのであるが、本論では材料を完全弾塑性体と考えた方法しか提示していない。両方を同時に考慮した解析は将来の課題として残されている。

最後に、本モデルの収束性について簡単に付記しておく。梁要素については述べる必要もないので、2次元と板要素について触れる。三角形の midpoint でのみ変位の連続性が満たされている非適合モデルである。(5) 式の汎関数に基づくハイブリッドストレス法は、要素内応力分布と要素境界辺上の変位分布の仮定の任意性から、ほとんど無数の要素が導けよう。前述したように RBSM の各要素^{3)~5)}との比較を目的としているので、応力分布はできるだけ低次に、また要素境界辺には剛体変位を仮定する要素に主眼を置いてきた。この枠を外せばもっと収束のよい要素に作れる可能性はいくらでも残されていると思われる。Fig.14 の例題で調べた結果、本モデルが収束することが確認された²⁾。大きめの値から薄板の理論解よりも少し小さめの値に収束していった。この傾向は2次元要素でも同じであった。これらを改善することも将来に残されている。

- 1) T. Kawai: New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集, 第141号 (1977), p.174.
- 2) 川井忠彦編: 生研セミナーテキスト (物理モデルによる連続体力学諸問題の解析), 生産技術研究奨励会第1回 (1978), 第2回 (1979).
- 3) 川井忠彦, 都井 裕: 弾塑性平面ひずみ問題の新しい離散化解析法, 日本鋼構造協会第11回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集 (1977), p.71.
- 4) T. Kawai & C. Chin: A Discrete Element Analysis of Beam Bending Problems Including the Effects of Shear Deformation, 生産研究, 30巻5号 (1978), p.165.
- 5) 渡辺正明, 川井忠彦: 保存則モデルによる板曲げの塑性解析, 土木学会第34回年次学術講演会講演概要集第1部 (1979), p.77.
- 6) 田中 尚: 構造物の極限解析, 建築構造大系 9, 彰国社 (1966).
- 7) 藤田 譲, 楠田忠雄, 川井忠彦: 塑性設計法, 森北出版 (1960).
- 8) 山本善之, 大坪英臣, 栗生和夫: 有限要素法による平板構造物の簡易弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第145号 (1979), p.125.
- 9) 堀田佳克: 塑性関節線による板の有限要素解析, 日本機械学会論文集, 43巻373号 (1977), p.3246.
- 10) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, コンピュータによる構造工学講座II-3-A, 培風館 (1972).
- 11) B. F. de Veubeke: Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon press (1964).
- 12) O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method, McGraw-Hill Book (1977).
- 13) R. E. Goodman, R. L. Taylor and T. L. Brekke: A Model for the Mechanics of Jointed Rock, Proc. ASCE, Vol.94, No. SM 3 (1968), p.637.
- 14) 岡本紀明: 有限要素法による非線形接触問題の解析, 日本機械学会論文集, 43巻374号 (1977), p.3716.