（昭和55年11月　日本造船学会秋季講演会において講演）

気泡核分布測定の一方法

正員 武　直　行*　正員 加藤洋治**

A Method of Estimating Bubble Nuclei Distribution

by Naoyuki Take, *Member*　Hiroharu Kato, *Member*

Summary

This paper introduces a newly devised method of estimating the nuclei distribution in a cavitation tunnel. Applying this method, which requires no particular equipment, the nuclei distribution can be estimated by measuring the bubble cavity distribution on a test body in the test section of the tunnel. By the method the distribution of nuclei can be measured fairly accurately for larger nuclei which have major influence on the bubble cavity distribution, although the accuracy becomes poorer for smaller nuclei.

The nuclei distribution was estimated by applying this method to photographes of bubble cavities on hemispherical and ITTC headforms tested in a cavitation tunnel at University of Tokyo. There was no direct measuring device at hand, so the estimated distributions at three different conditions were compared each other and it was found that this method was promising for rough estimation of nuclei.

1 緒　言

キャビテーション初生の研究の目的は，ある与えられた条件下で，キャビテーションが発生するか否か，またいつ発生するかを決定することである。

実船プロペラに発生するキャビテーションを予測するために模型実験が行なわれるが，そのときの初生キャビテーション数 σ_i の一致は，必ずしも良好でない。また，同一の試験体を用いた初生実験においても，実験室（キャビテーション・タンネル）ごとに異なる初生値を示すことはむしろ普通であり，さらには同一タンネルにおいても再現性が良くないことがある。

その原因は，キャビテーション数 $\sigma(\equiv(p_\infty-p_v)\Big/\frac{1}{2}\rho V_\infty^2)$ 以外にキャビテーションの初生に影響を及ぼす因子がいくつかあり，それが模型と実船で，またタンネルごとに異なるからである。

その中でも特に，水中の気泡核の分布がキャビテーションの初生に大きな影響を及ぼすことはよく知られている[1~4]。従って，その時々の気泡核分布の把握なしに，キャビテーション初生を論ずることは到底できないはずであるが，その測定には特別な機器を必要とし，現実には不可能な場合が多い。そこで本論文においては，軸対称試験体を用いて，キャビテーション・タンネルのテスト・セクションでの気泡核分布を定量的に測定する簡便な一方法について述べ，その可能性・限界について考察する。

児玉[2] は，予め分布のわかっている水素気泡核を，その運動方程式と成長方程式によって追跡し，軸対称体（半球状軸対称体およびITTC軸対称体）上に発生するバブル・キャビティの分布を計算し，実際に観察されたキャビティ分布との間に，良好な一致を見ている。本論文で述べる方法は，この結果に基礎をおき，バブル・キャビティの分布から逆に気泡核分布を推定しようとするものである。

以下に，本方法の手順の概略を示す。

［1］ 試験体まわりの軸対称流場を計算し，種々の初期半径の単独球形気泡核が，種々の初期位置から試験体近傍へ進入してきたときの運動・成長を計算する。

［2］ ［1］の結果から，初期位置に関する適当な補間を行なうことによって，単一初期半径の気泡核が，単位密度で進入してきたときの，ある瞬間における試験体上のバブル・キャビティ分布が計算できる。これを種々の初期半径に対して計算する。

［3］ ［2］の結果から，初期半径に関する適当な補間を行なうことによって，任意の気泡核分布に対応する，ある瞬間の試験体上バブル・キャビティ分布が計算できる。これによって，気泡核分布とバブル・キャビティ分布との間に，一対一の対応が生ずる。

*　元．東京大学船舶工学科大学院
**　東京大学船舶工学科

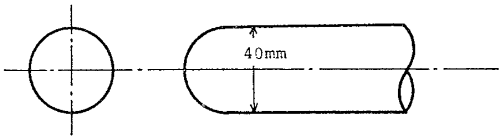

Fig. 1　Hemispherical axisymmetric body

[4] [3]を逆に解くことによって，観察されたバブル・キャビティ分布から，気泡核分布を求めることができる。

本方法の特徴は，原理上任意の軸対称体を，テスト・セクションに直接設置して測定できる点と，特別な装置を必要とせず，実験室におけるルーティン・ワーク化が可能であると思われる点にある。

以下において，標準的軸対称体として直径 40mmの半球状軸対称体 (Fig. 1) を採り，本方法を詳説する。

2　基礎方程式と流場計算

2.1　基礎方程式

流れの中を球形の気泡が流される場合，その運動は一般に流体自身の運動とは一致しない。それは次の運動方程式に従う[5)]。

$$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3\rho\dot{\boldsymbol{v}}_b=\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_b)|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_b|C_D\pi r^2-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3\nabla p+2\pi\rho r^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_b)\dot{r} \quad (1)$$

ただし，$\boldsymbol{v}_b$：気泡の速度ベクトル

$\boldsymbol{v}$：流速ベクトル

C_D：気泡の流体中での抵抗係数

r：気泡の半径

p：流体の圧力

ρ：流体の密度

$\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

また，ドットは時間微分を表わす。

C_D としては，5) に従って，次の Haberman の実験式を用いる。

$$C_D=24R_b^{-1}+4.728R_b^{-0.37}+6.24\times10^{-3}R_b^{0.38} \quad (2)$$

ただし，R_b は，気泡の流れに対する Reynolds 数，

$$R_b=2r|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_b|/\nu \quad (\nu：流体の動粘性係数) \quad (3)$$

である。

圧力変化のある流体中の球形気泡の半径 r は，次の Rayleigh-Plesset の方程式に従うことは，よく知られている。

$$\rho\left(r\ddot{r}+\frac{3}{2}\dot{r}^2\right)=p_v-p-\frac{2s}{r}+\frac{g}{r^3}-4\mu\frac{\dot{r}}{r} \quad (4)$$

ただし，p_v：液体の蒸気圧

s：液体の表面張力

g：気泡中のガスのモル数と温度によって決まる定数

μ：液体の粘性係数

他は既出

与えられた流場の中で，(1) と (4) を連連立させて解けば，気泡の運動と成長が求まる。

2.2　気泡核の臨界キャビテーション数

ここで (4) 式を静的な側面から考察する。(4) で時間微分の項を省略すると，

$$f(r)\equiv p_v-p-\frac{2s}{r}+\frac{g}{r^3}=0 \quad (5)$$

$f(r)=0$ の関係をグラフにすると，Fig. 2 のようになる。曲線上の実線部分が，気泡が安定に平衡する領域である。

さて，g は各気泡核に固有の値であるが，Fig. 2 からわかるように，p が g によって決まるある値を下回るとその気泡核は，もはや平衡する r をもたなくなる。このようなとき，その気泡核は“発泡する”ということにすると，各気泡核は，それぞれの固有の“臨界発泡圧力”

$$p_c=p_v-\frac{4s}{3}\sqrt{\frac{2s}{3g}} \quad (6)$$

をもつことになる。さらに，簡単な計算からわかるように[6)]，通常の気泡核は，それが発泡するような低圧にさらされない限り，バブル・キャビティとして認められる程には成長しないと考えてよい。

今，圧力 p_∞ なる無限遠方において，半径 r_0 で平衡していた気泡核を考えると，その g は (5) より，

$$g=(p_\infty-p_v)r_0^3+2sr_0^2=\frac{1}{2}\rho V_\infty^2\sigma r_0^3+2sr_0^2 \quad (7)$$

ただし，V_∞ は一様流速，σ はキャビテーション数。この気泡核が，流れの最低圧力点で臨界発泡圧力にさらされるとすると，(6) より，

$$\frac{1}{2}\rho V_\infty^2C_{P\min}+p_\infty-p_v=-\frac{4s}{3}\sqrt{\frac{2s}{3g}} \quad (8)$$

ただし，$C_{P\min}$は最低圧力係数。(8)の両辺を$\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$で割って平方し，$g$ に (7) を代入して整理すると，

$$27\rho^3V_\infty^6r_0^3\sigma^3+54\rho^2V_\infty^4r_0^2(\rho V_\infty^2r_0C_{P\min}+2s)\sigma^2$$

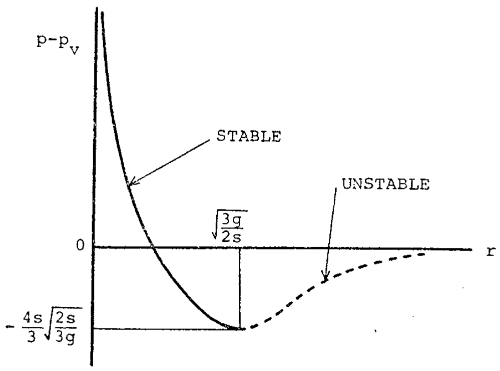

Fig. 2　Equilibrium of a bubble

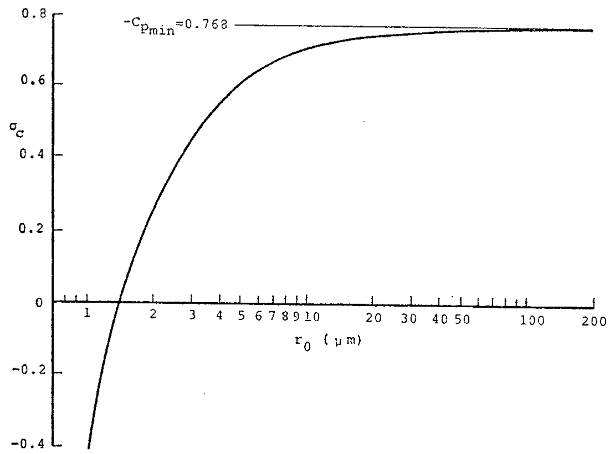

Fig. 3 Relation between bubble nucleus radius and its critical cavitation number ($C_{P\min}=-0.768$, $V_\infty=10$ m/s)

$$+27\rho^2 V_\infty^4 r_0^2 C_{P\min}(\rho V_\infty^2 r_0 C_{P\min}+8s)\sigma$$
$$+108\rho^2 V_\infty^4 r_0^2 s C^2_{P\min}-256s^3=0 \quad (9)$$

（9）は，V_∞, $C_{P\min}$ および，各物性値が決まれば，σ に関する三次方程式であり，その解の1つが，この気泡核が最低圧力点に十分長い時間さらされるとき，そこで発泡するための最大の σ の値 σ_c を与える。σ_c をこの気泡核の“臨界キャビテーション数”と呼ぶことにする。

壁面影響がない場合の半球状軸対称体の値 $C_{P\min}=-0.768$ (Fig. 4) を用い，$V_\infty=10$ m/sec とし，各物性値に 20℃ における値を使って（9）を解いた結果が Fig. 3 である。

さて，バブル・キャビティの分布から気泡核分布を求める本方法においては，発泡しない気泡核は何ら情報を与え得ないから，検出し得る気泡核の最小半径が存在し，それはキャビテーション数によって決まる。例えば $\sigma=0.70$ とした場合，Fig. 3 より検出限界はほぼ半径 10 μm の気泡核である。原理的には，σ を下げればいくらでも，検出限界は下がるが，実際には後述するような理由から，あまり広い範囲にわたる気泡核分布を求めることはできない。また，ここで用いている半球状軸対称体のような層流剥離を有する試験体の場合には，ある σ においてバブル・キャビティに取ってかわってシート・キャビティが発生してしまうから，その点からも σ の値をあまり下げることはできない。

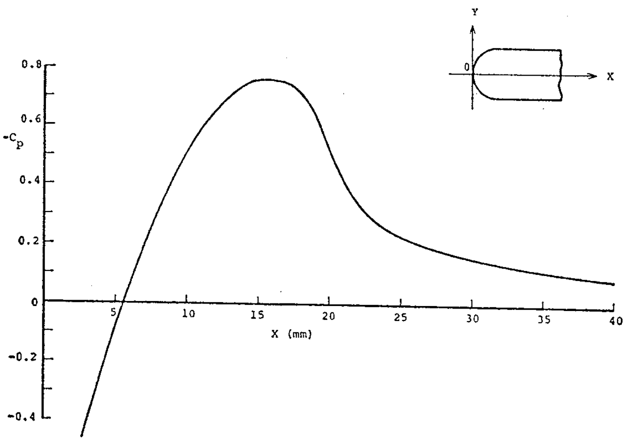

Fig. 4 Calculated pressure distribution on hemispherical body (without wall effect); by Hess & Smith method

2.3 流 場 計 算

軸対称試験体まわりの流場を計算するために，軸対称流に関する Hess & Smith 法を用いる[7]。これから計算される半球状軸対称体上の圧力分布を Fig. 4 に示す。

さて，（1）と（4）を連立させて差分法で数値的に解くのであるが，差分の各ステップごとに，Hess & Smith 法によって流速 $\boldsymbol{v}$ や圧力勾配 ∇p を計算するのでは，全体の計算時間が非常に長くなる。そこで計算時間を短縮するために，Fig. 5 に示すように，流場を適当に格子分割し，各格子点での $\boldsymbol{v}$ を Hess & Smith 法により予め計算しておき，一般の点での $\boldsymbol{v}$ は格子点での $\boldsymbol{v}$ から補間して求めることにする。補間の方法としては，Fig. 6 に示すように取り囲む 16 個の格子点での値から，二重三次の Lagrange 補間式によって計算する。気泡の計算においては，試験体近傍における $\boldsymbol{v}$ の値が重要であるが，格子点での $\boldsymbol{v}$ の計算は勿論試験体の外部でしかできないから，そのままでは試験体近傍で，Fig. 6 のような補間ができない。そこで，格子点での $\boldsymbol{v}$ の値を三次式外

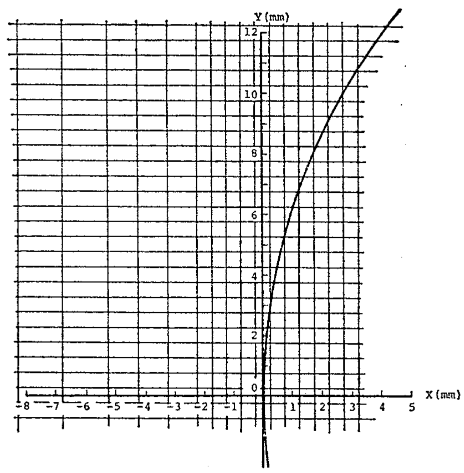

Fig. 5 Mesh division of flow field

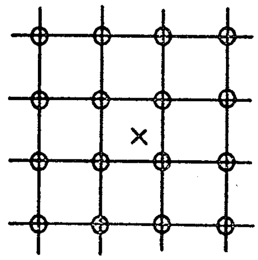

Fig. 6 Interpolation of flow field

挿法によって，試験体内部にまで拡張する。

このような補間法による誤差を評価するために，Hess & Smith 法において軸対称体を近似する各微小折線 (Segment) の中点 (Control Point) での $\boldsymbol{v}$ を補間法によって計算し，直接計算した値と比較した。その結果によると，$|\boldsymbol{v}|$ の誤差は最大で一様流速の 0.4% 程度，また $\boldsymbol{v}$ の向きの誤差も，試験体の先端近くを除いて，おおむね 0.5° 以下であった。

3 球形気泡の仮定の検討——軸対称気泡の計算

3.1 気泡の球形からのずれ

これまでは，式（1）をはじめ，気泡は十分成長した段階まで含めて，常に球形を崩さないという仮定の下で議論してきた。しかし，試験体表面で実際に観察される十分成長したバブル・キャビティは，かなりひしゃげた形をしている。その原因としては，主に流線に垂直な方向の圧力勾配と，試験体による壁面影響の組合わせによるものが考えられる。気泡の収縮過程では界面が不安定となり球形を保てなくなるが，収縮過程は成長過程に比べて極めて急激なためその時間は無視できるとして，ここでは圧力勾配と壁面影響の組合せが，成長過程における気泡に及ぼす影響を計算によって調べ，球形気泡の仮定について検討する。

3.2 基礎方程式

Fig. 7 に示すような，X軸方向に圧力が変化し，Y軸を壁面とするような静止流場（非粘性，非回転）に，内圧が蒸気圧 p_v に等しい球形気泡が置かれた状態を考える。ただし，$p(X)$ は気泡が置かれる以前の圧力場である。以後の流れは，常にX軸に関して軸対称である。

さて，このとき次の圧力方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+P+\Omega=0 \qquad (10)$$

ただし，ϕ：速度ポテンシャル

q：流速の大きさ

$P=p'(X,t)/\rho$ （p'：圧力，ρ：流体の密度）

Ω：外力のポテンシャル

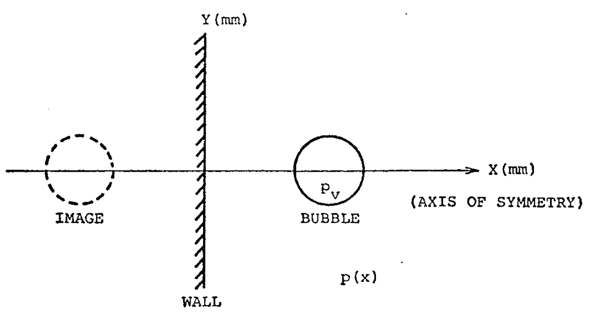

Fig. 7 Axisymmetric bubble near solid wall and its image

t：時間

ここで，気泡が置かれる以前の静止流場で (10) を考えると，

$$\Omega=-\frac{p(X)}{\rho} \qquad (11)$$

となる。実際の流場においては，流線が曲率をもつことによって，流線に垂直な方向に圧力勾配が生ずるのであるが，ここでは Fig. 7 のX軸に関して軸対称な流場を扱うために，X軸方向に圧力勾配をもたせるには，(11)で決まる外力のポテンシャルが必要である。

速度ポテンシャルϕの Lagrange 微分を考えると(10)より，

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\phi$$
$$=\left(-\frac{1}{2}q^2-P-\Omega\right)+q^2=\frac{1}{2}q^2-P-\Omega \qquad (12)$$

液体の表面張力を無視して，(12)を気泡の表面で考えれば，

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{1}{2}q^2+\frac{p(X)-p_v}{\rho} \qquad (13)$$

差分の形で書けば，

$$\Delta\phi=\left\{\frac{1}{2}q^2+\frac{p(X)-p_v}{\rho}\right\}\Delta t \qquad (14)$$

(14) を解けば，気泡の成長が求まる。

3.3 軸対称気泡の成長の計算

(14) 式を基礎にして，次の手順に従って計算を行なう。

［1］ 初期気泡形状および，その表面上での速度ポテンシャルと流速ベクトルの初期値 ϕ_0, $\boldsymbol{v}_0$ を与える ($\phi_0=0, \boldsymbol{v}_0=0$)。

［2］ (14) により，微小時間 Δt の後の ϕ の値を気泡表面の各点について計算する ($\phi=\phi_0+\Delta\phi$)。

［3］ 時間 Δt 後の気泡表面各点の流速 $\boldsymbol{v}$ を求めるために［2］で求めた気泡表面上のϕから，ϕ＝関する境界値問題を解く。ところが，境界（気泡表面）そのものが未知であるから，近似仮想境界として，気泡表面の各点が $\boldsymbol{v}_0\Delta t$ だけ移動してできるものをとる。

［4］ 境界値問題の解として$\boldsymbol{v}$が求まるが，その値を使って真の気泡形状を計算する。すなわち，気泡表面の各点が，はじめの状態から，$(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v})\Delta t/2$ だけ移動したものとして気泡形状を求める。

［5］ ［2］に戻って［2］～［4］をくり返す。

ここでは［3］の境界値問題を解くのに，軸対称流に関する Hess & Smith 法を用いる。すなわち気泡表面を適当な個数の微小折線 (Segments) で近似し，ϕに関する境界条件をみたすように吹出し分布を決定し，その吹出し分布が誘起する流速として$\boldsymbol{v}$を求める。また壁面影響は Fig. 7 に示すように鏡像効果を用いて表わす。

3.4 計算の結果および考察

初期気泡半径 $R_0=25\mu$m，壁面から初期気泡中心までの距離 $D=0.5$mm，また圧力場が，

$$p(X)=-3.0\times10^{-4}+1.0\times10^{-3}(X-0.5) \quad [\text{kgw/mm}^2]$$

で与えられる場合について計算した結果が Fig. 8 である。Segments の数は 20, $\Delta t=5.0\times10^{-6}$sec である。図中の破線は，それぞれ同時刻における球対称解であり，外圧 $p=-3.0\times10^{-4}$kgw/mm^2（それは初期気泡中心の圧力に等しい）の下で，Rayleigh-Plesset の方程式（4）を Runge-Kutta 法で解いたものである（ただし表面張力，ガス分圧は無視する；$s=g=0$）。

Fig. 8 からわかるように，軸対称解は十分成長した段階において，圧力勾配と壁面影響のために，横長にひしゃげた形になっている。ところが同時刻における球対称解と比較してみると，その長径が球対称解の直径とほぼ一致する。このことは，長径の時間的変化をグラフにした Fig. 9 からさらにはっきりする。

実際の流場を運動する気泡は，流線に垂直な方向の圧力勾配のみならず，流線方向の圧力勾配をも受ける。しかし，それは主に気泡の運動を変化させるもので，気泡の変形にはあまり関与しないと考えられる。従って，気泡の変形のメカニズムについては，ここで考えたモデルで十分説明しうると思われる。この観点から計算結果をみれば，球形気泡の仮定について，次のように結論することができる。“球形気泡の仮定の下で計算された球対称バブル・キャビティの直径は，実際に観察される非球形バブル・キャビティの長径に対応する。また，このような対応を行なうならば，球形気泡の仮定は許される。”

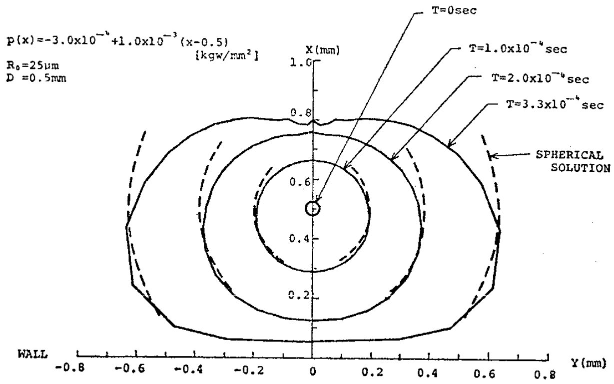

Fig. 8 Axisymmetric bubble growth near solid wall and in pressure gradient

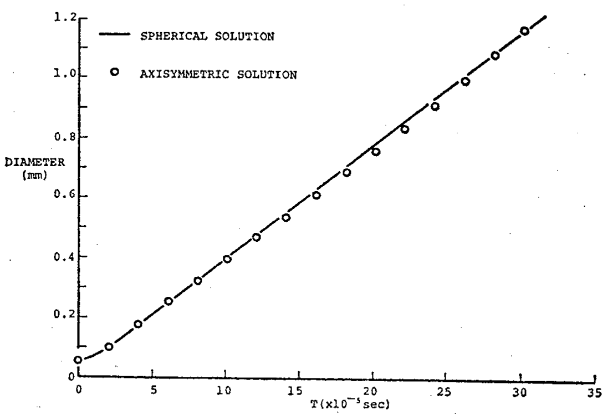

Fig. 9 Comparison of axisymmetric and spherical solutions

4 分布マトリックスの計算

4.1 分布マトリックスの計算法

気泡核分布と，それから生ずるバブル・キャビティ分布との間の対応を具体的に与えるのが“分布マトリックス”である。次にその計算法を述べる。

まず，気泡核に関して次の仮定を置く。

［1］ 気泡核密度（単位体積 1mm^3 の水中に含まれる気泡核の個数）の分布密度関数 $f(R_0)$ は，Fig. 10 のような折線関数である。ただし，ここで R_{01} は使用する試験体の $C_{P\,\min}$，流速，キャビテーション数によって決まる検知限界であり（2.2 参照），R_{04} は予め仮定された最大気泡核半径である。R_{04} の推定は難しい場合が多いが（4.2 参照），そのときは適当に大きくとっておく。また，f_1, f_2, f_3 は未知数であり，これらの値が決まれば，気泡核分布が決定する。

［2］ 気泡核は試験体上流において，空間的に一様な密度でやってくる。

［3］ 各気泡核は十分成長した段階も含めて，相互作用を及ぼさず，それぞれ単独に方程式（1），（4）に従う。また，試験体による壁面影響も受けない（3.4 参照）。

以上の仮定の下で，次の手順に従って計算する。

［1］ 測定に使用する流速 V_∞ および，キャビテーション数 σ を決める。

［2］ 気泡核半径 $R_{01}\sim R_{04}$ から適当な個数（多いほどよい。もちろん，$R_{01}, R_{02}, R_{03}, R_{04}$ 以外を含んでいて

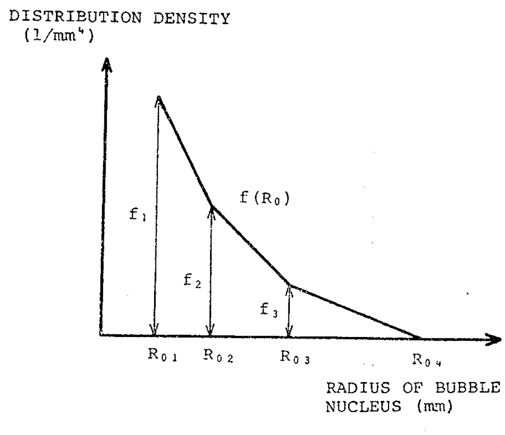

Fig. 10 Distribution density function $f(R_0)$ of bubble nuclei

よい）の代表半径を選び，気泡の初期Y座標 Y_0（座標系については，Fig. 5 参照）を変えながら，2.3 で計算した流場の中で，方程式（1），（4）を連立させて解き，［1］で決めた条件下での気泡の運動と成長を求める。

［3］［2］の結果を踏まえて，試験体上で測定されるバブル・キャビティの半径の階級 (range)を決める。階級の数は，未知数 f_i の数と等しくする。また，階級の幅をあまり狭くすることは，測定精度上好ましくない。誤差をなるべく避けるための最適な階級の決め方については，次の 4.2 で実際に計算を行なうときに述べる。階級を小さい方から $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ とする。

［4］［2］の結果から，単一半径 R_0（［2］で選んだ代表半径のうちの1つ）の気泡核が，単位密度1個/mm³ で上流から進入してきたときの，ある瞬間における試験体上のバブル・キャビティ個数 $M_i(R_0)$ が，各階級 Γ_i ごとに計算される。すなわち，

$$\begin{aligned} M_i(R_0) &= \int_0^\infty dM_i(R_0) \\ &= \int_0^\infty V_\infty (2\pi Y_0 \cdot dY_0) \cdot (1\text{個}/\text{mm}^3) \cdot T_i(R_0, Y_0) \\ &= 2\pi V_\infty \int_0^\infty Y_0 \cdot T_i(R_0, Y_0) dY_0 \qquad (15) \end{aligned}$$

ただし，ここで $T_i(R_0, Y_0)$ は，初期半径 R_0，初期Y座標 Y_0 の気泡核が成長して，階級 Γ_i に留まる滞在時間である (Fig. 11 参照)。Y_0 が大きくなると，$T_i(R_0, Y_0)=0$ となるから，(15) の積分区間は有限に帰する。ここでは，$T_i(R_0, Y_0)$ を計算点での値から Y_0 に関して線形補間して (15) を計算する。

［5］［4］の結果から，任意の密度関数 $f(R_0)$ に対して，それに対応するバブル・キャビティ分布（すなわち，ある瞬間に試験体上に存在する，各 Γ_i に属するキャビティ個数 $N_i(f)$）が求まる。すなわち，

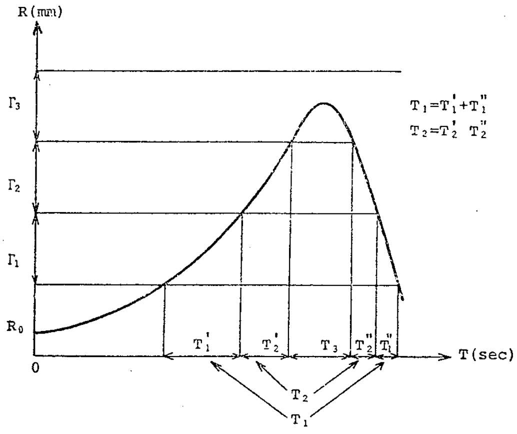

Fig. 11 Bubble growth and its duration in Γ_1, Γ_2 and Γ_3

$$N_i(f) = \int_{R_{01}}^{R_{04}} f(R_0) M_i(R_0) dR_0 \qquad (16)$$

ここでfは密度関数そのものであるが，先の仮定［1］により，fは3つの数 f_1, f_2, f_3 によって決まるから，(16) を次のように表わす。

$$N_i(f) = N_i(\boldsymbol{f}) \qquad \text{ただし，} \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

(16) の積分も，$M_i(R_0)$ を計算点での値から R_0 に関して線形補間して計算する。

［6］ さて，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とし，$N_i(\boldsymbol{e}_j) = a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ とおく。すると明らかに，気泡核分布 $\boldsymbol{f}$ と，それに対応するキャビティ分布 $N_i(\boldsymbol{f})$ との間には，次の関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{f}) = \begin{bmatrix} N_1(\boldsymbol{f}) \\ N_2(\boldsymbol{f}) \\ N_3(\boldsymbol{f}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

行列 $A=(a_{ij})$ を分布マトリックスと呼ぶ。$A^{-1}=B=(b_{ij})$ とすれば，(18) より，

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

(19) により，測定された N_i の値から，気泡核分布 $\boldsymbol{f}$ を求めることができる。

4.2 計算結果

測定条件として，$V_\infty=10$ m/sec, $\sigma=0.70$ を選び，4.1 の手順に従って分布マトリックスを計算した。$R_{01}=10\,\mu$m (2.2 参照), $R_{02}=20\,\mu$m, $R_{03}=50\,\mu$m, $R_{04}=100\,\mu$m とし，方程式（1），（4）を実際に解く代表半径としては，$R_0=10\,\mu$m, 15 μm, 20 μm, 30 μm, 50 μm, 70 μm, 100 μm の7個を選んだ。またその際，気泡核はその初期位置 ($X_0=-30$ mm, $Y_0=1, 2, 4, 6, 8, 10$ mm) において，そこでの圧力で平衡しているものとしてgの値を決め，さらにその点での流速に等しい初速をもつものとして計算をスタートさせた。方程式(1)，(4)の解法にはRunge-Kutta 法を用いた。Fig. 12 に気泡の運動の軌跡の一例を示すが，これからもわかるように，気泡はおおむね試験体上に到達し，試験体が通常のように凸の場合には，その後も試験体から離れることはない。従って本計算においては，気泡の中心が試験体表面に達した後は，（1）および（4）を曲線上の一次元問題として解いている。

いろいろな R_0 と Y_0 に対する気泡の最大到達半径を，Table 1 および Fig. 13, 14 に示す。

さて後に 4.3 で述べるような理由から，分布マトリックスAは上三角行列，すなわち，

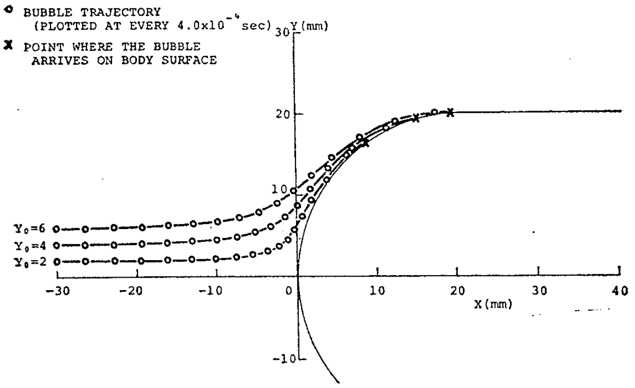

Fig. 12 Calculated trajectories of bubbles around hemispherical body

Table 1 Maximum bubble radius ($V_\infty=10$ m/s, $\sigma=0.70$)

R_0 (μm)	Y_0 (mm)					
	1	2	4	6	8	10
100	0.89	0.89	0.91	0.67	0.25	0.17
70	0.79	0.79	0.79	0.60	——	——
50	0.70	0.70	0.70	0.51	0.12	——
30	0.60	0.60	0.61	0.30	0.06	——
20	0.52	0.52	0.53	0.08	——	——
15	0.46	0.46	0.43	0.04	——	——
10	0.27	0.27	0.03	——	——	——

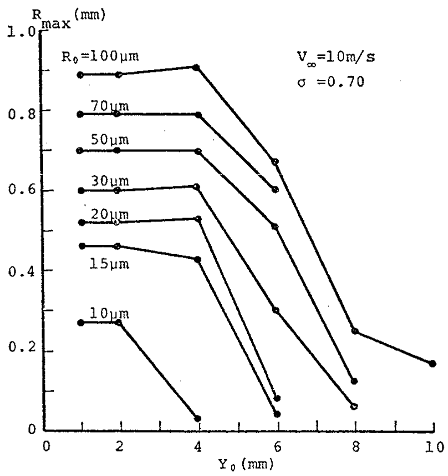

Fig. 13 Relation between initial bubble position Y_0 and maximum bubble radius $R_{\max}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (20)$$

の形の行列であることが望ましい。そのためにはTable 1あるいはFig. 14から，キャビティ半径の階級$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$を次のように決めればよい。

Γ_1 : $R=0.28\sim0.54$ mm

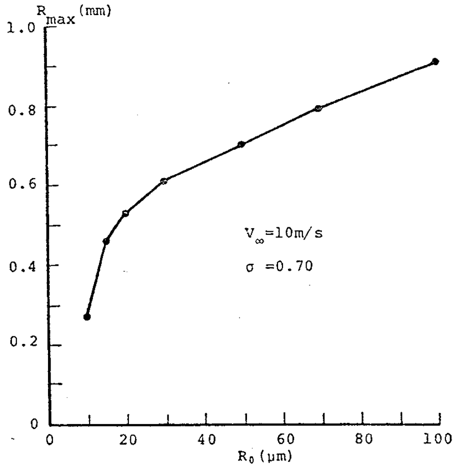

Fig. 14 Relation between initial bubble radius R_0 and maximum bubble radius $R_{\max}$

Γ_2 : $R=0.54\sim0.71$ mm

Γ_3 : $R=0.71\sim0.91$ mm

ここでもし，半径が0.91 mmより大きいキャビティが観察されたならば，R_{04}を100 μmより大きくとらなければならない。また逆に，観察されたキャビティ半径の最大値から，Fig. 14（必要ならばR_0のさらに大きな値まで追加したもの）によってR_{04}の推定をすることもできる。

各Γ_iに対して，4.1の（4）の$M_i(R_0)$を計算した結果がTable 2である。ただし$T_i(R_0, Y_0)$は，$Y_0=0$ mmに対しては計算できない（それは対称軸であるX軸上を進む気泡に対応する）ので，$Y_0=1$ mmでの$T_i(R_0, Y_0)$で代用した。

これから4.1の［5］に従って，分布マトリックスAを計算することができる。結果は，

$$A=\begin{bmatrix} 0.730 & 6.194 & 16.953 \\ 0 & 1.910 & 10.402 \\ 0 & 0 & 3.249 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

また，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1.369 & -4.440 & 7.071 \\ 0 & 0.524 & -1.676 \\ 0 & 0 & 0.308 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

4.3 結果の考察

計算に先立って設けた仮定の下で，理論上は測定されたバブル・キャビティ分布$\boldsymbol{N}$と気泡核分布$\boldsymbol{f}$の間には，

$$\boldsymbol{f}=A^{-1}\boldsymbol{N} \qquad (23)$$

によって一対一の対応が成り立つ，ところが実際には$\boldsymbol{N}$がいくばくかの誤差を含んでいるのが普通である。従って分布マトリックスAとしては，$\boldsymbol{N}$の誤差が$\boldsymbol{f}$においてなるべく拡大されないようなもの，すなわちいわゆる特異性の小さいものが望ましい。そのための一対策として，Aを上三角行列にとったのである。これによって，

Table 2 Calculated values of $M_i(R_0)$

R_0 (μm)	Γ_i (mm)		
	Γ_1	Γ_2	Γ_3
	0.28~0.54	0.54~0.71	0.71~0.91
100	420.555 sec	346.413 sec	293.634 sec
70	409.245	307.457	177.605
50	493.021	254.678	0
30	292.796	161.268	0
20	315.416	0	0
15	239.599	0	0
10	0	0	0

N_3 と f_3, N_2 と f_2, N_1 と f_1 の関係が，それぞれなるべく直接的になるように配慮されている。

(22) および (23) によって，$\boldsymbol{N}$ の誤差が $\boldsymbol{f}$ にどのように反映するかを調べてみよう。一例として，$\boldsymbol{f}$ の真の値を，

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}10\\5\\1\end{bmatrix} \tag{24}$$

とすると，対応する $\boldsymbol{N}$ は，

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}55.223\\19.952\\3.249\end{bmatrix} \tag{25}$$

である。今仮に，$\boldsymbol{N}$ の測定値 $\boldsymbol{N}'$ が α ％の誤差を含んでいるとすると，

$$\boldsymbol{N}'=\begin{bmatrix}55.223(1\pm\alpha/100)\\19.952(1\pm\alpha/100)\\3.249(1\pm\alpha/100)\end{bmatrix} \tag{26}$$

$\boldsymbol{f}'=A^{-1}\boldsymbol{N}'$ とすると，$\boldsymbol{f}'$ の各要素の誤差の限界は，

$$f_1 : 18.7\alpha\ (\%)$$
$$f_2 : 3.2\alpha\ (\%)$$
$$f_3 : \alpha\ (\%)$$

となる。このように，気泡核半径の小さいところほど誤差が大きくなっている。その理由は，半径の小さな気泡核ほどキャビティ分布へ及ぼす影響が小さいからである。すなわち，本方法が気泡核分布を直接に測るのではなく，それから決まるバブル・キャビティ分布を情報源としているために，キャビティ分布へ与える影響が小さい部分については，十分な量の情報が得られないのである。気泡核を単に量的に見るのではなく，バブル・キャビティの核という尺度で質的な要素を付加して見るのが本方法の特徴であり，また上述のような欠点にもつながる。しかし逆にキャビティ分布へ与える影響力が大きい部分については，十分な精度が得られるのであるから，ここで行なったような誤差評価をその都度行なうことによって，その時々の，キャビテーションに対する気泡核の質・量両面における影響力の大きさの程度を吟味しつつ用いるならば，キャビテーション・タンネルでの実用上，十分満足すべき結果が得られるものと思われる。もちろん，使用する試験体やキャビテーション数の最適な選択によって，分布マトリックス A の特異性を最小にしてやるということは当然考えられるが，前述のように A の特異性が，キャビテーション現象の本質的な性格に起因している関係上，そう大きな変化は望めないものと思われる。

5 気泡核分布の測定例

本方法の有効性を調べ，また測定の実際を示すために本方法を用いて，キャビテーション・タンネル内の気泡核分布の測定を行なった。試験体としては，半球状軸対称体とITTC軸対称体（ともに直径 30 mm）の2種類を用い，流速は常に V_∞=10 m/sec とし，キャビテーション数は前者については，σ=0.95 と 0.80 の2通り，後者については，σ=0.75 の1通りで，同一の試験水に対して都合3通りの測定を行なった。なおキャビテーション・タンネルは，東京大学の TE 型キャビテーション・タンネルを使用したが，本タンネルにおいては，壁面影響が大きいため，2.3 の流場計算では，その影響を考慮した[2]。最大気泡核半径 R_{04} は，いずれの場合にも50 μm とした。キャビティ分布の測定値は，ストロボ光の下で撮影した各 100 枚の写真から読みとり，平均した（3.4 参照）。ただし，写真に写る半周面のうち，カメラのレンズと平行に近い 1/6 周面（60°）のみについて計測し，それを6倍した。また，安定した気泡核分布を得るために，上流から水の電気分解によって生じた水素気泡核を流した[2]。

気泡核分布の測定結果を Fig. 15 に示す。ここで，Fig. 10 における R_{03} は，半球状軸対称体に対しては R_{03}=10 μm，ITTC 軸対称体に対しては R_{03}=20 μm とした。いずれの場合にも，R_{03} 以下の分布は誤差に埋没して得られないため，Fig. 15 には R_{03}~R_{04} の分布のみ示した。半球状軸対称体を用いた2つの結果の一致は極めて良好であるが，ITTC 軸対称体を用いた結果は，それらよりやや大きめに出ている。この差が分布マトリックスの計算における補間等の誤差によるものか，あるいは時間経過（約1日）によって実際に気泡核分布に変化が生じたことによるものなのかは不明である。しかし，いずれにしても三者の差は，気泡核分布というものの性格上からも，また他の文献に見られる種々の装置を用いた測定結果との比較からも，許容されてよい誤差範囲内にとどまっていると思われ，本方法が実際に有効であると結論してよいであろう。

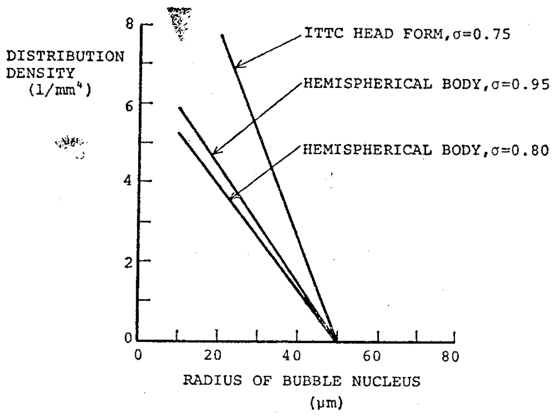

Fig. 15 Comparison of measured bubble nuclei distribution

6 結 言

本研究において得られた結果をまとめると，次のようになる。

［1］ 軸対称試験体を用いて，そこに発生するバブル・キャビティ分布を測定することによって，キャビテーション・タンネル内の気泡核分布を知ることが，理論的に可能である。本方法によれば，特別な装置を使用することなく，タンネルのテスト・セクションでの気泡核分布を簡単に測定することができる。

［2］ 本方法は，気泡核分布を直接に測定するのではなく，あくまでも，それから生じたキャビティ分布を情報源としているために，キャビティ分布へ与える影響力の小さい気泡核については，仮にその数が多くても，十分な精度で分布を求めることができない。この点が，本方法の本質的な欠点である。しかし，逆にキャビティ分布へ与える影響力の大きい気泡核については，十分な精度で分布が得られる。

［3］ 本方法を用いて，同一の試験水に対して，3通りの条件で実際に気泡核分布を測定したところ，結果はおおむね一致した。このことから，本方法が，少なくともオーダー的には有効であることがわかった。測定条件（試験体，キャビテーション数等の選択）の最適化，および測定方法の改善による精度向上，さらには他の測定法による測定結果との比較は，今後の課題である。

なお，本論文中の数値計算には，東京大学大型計算機センターの HITAC 8700/8800 を使用した。

参 考 文 献

1) Holl, J. W.: Nuclei and Cavitation, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, Series D, Vol. 92, December 1970.
2) 児玉良明：キャビテーションの初生に関する研究，東京大学博士論文，1978 年 12 月.
3) Albrecht, K., Björheden, O.: Cavitation Testing of Propellers in a Free Surface Tunnel Utilizing Micro Air Bubble Control, Journal of Fluids Engineering, Trans. ASME, December 1975.
4) Noordzij, L.: Some Experiments on Cavitation Inception with Propellers in the NSMB Depressurized Towing Tank, International Shipbuilding Progress, Vol. 23, September 1976.
5) Johnson, V. E., Hsieh, Jr. & T.: The Influence of Trajectories of Gas Nuclei on Cavitation Inception, 6th Naval Hydrodynamics, 1966.
6) 武 直行，赤崎鉄郎：キャビテーションの発生に関する研究，昭和 52 年度東京大学卒業論文.
7) Hess, J. L., Smith, A. M. O.: Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, Pergammon Press, New York, 1966.