（昭和55年11月　日本造船学会秋季講演会において講演）

混合法の一定式化から誘導される新しい要素
（第2報）
——殻要素とその振動問題に対する応用——

正員　神　田　芳　文*

New Elements Derived from One Type of Mixed Formulations (The 2nd report)
——Shell Element and its Applications to Vibration Problems——

by Yoshifumi Kanda, *Member*

Summary

Because there has been yet no simple and powerful element available, it has been experianced that some practical finite element analyses in industry lead to unsatisfactory results even in linear situation. Therefore, in order to gain useful and reliable informations for an actual structure by easy implimentation of finite element technique, it is necessary to develop the element which is accurate, economic and troubleless.

From this purpose, in a previous paper, the author proposed one type of mixed formulation based on Reissner's variational principle and derived several kinds of new elements such as plane stress, 3-dimensional brick and plate bending according to present formulation. Examinations using these elements in static and dynamic fundamental problems indicated that excellent results can be obtained.

In this paper, for the sake of shell analysis, both plane stress and plate bending elements introduced in the previous paper are combined and extended to a general shell element whose nodes are needless to be included in plane making use of present mixed formulation and isoparametric shell representation. Numerical results from several applications to vibration problems, which are intended to demonstrate the effectiveness and versatility of new element, show that natural frequencies and mode shapes are always predicted with good accuracy even by a very coarse mesh.

1　緒　　　言

現在においては複雑なシェル構造物の振動解析に有限要素法が用いられる機会が増えてきているが，その解析が失敗に終わるケースも未だ少なくない。この原因が要素自身の性能に起因していると思われる事例も多く，経済性，精度，信頼性，汎用性などの要求を実用レベルで十分に満足するシェル要素の出現が切望されている。

こういった状況から，現在においてもなお板曲げ要素[5]やシェル要素[2),3]の開発研究は盛んに行なわれているが，残念ながらわれわれの要求を十分に満足していないと思われる。そこで，著者は高性能のシェル要素の開発を目的として，混合法の一種とみなせる定式化を提案し，これに基づいて平面応力要素や平板曲げ要素を誘導し，前報[1]においてそれらの静的問題に対する有効性の高さを立証してきた。また，平板の自由振動問題に対しても本報の付録でこの平板曲げ要素の性能を調査し，良好な結果を得ている。

本報においてはこれらの平面応力要素や平板曲げ要素をもとに理論の拡張を行なって，4節点が必ずしも一平面上にない一般の場合に適用可能なシェル要素を誘導する。そして，このシェル要素の実際的な有用性を検証するため，タービン翼，旋盤ベッドおよびディーゼル機関のブロックなどの簡略模型の自由振動問題に適用し，計算結果を実験値や既存の要素による結果と比較する。

厚板で構成される構造において板が交差している場合に，中央面で代表される厚さのない板が交差しているとする従来のモデル化には無理があるように思われる。そこで，これら厚板の交線上に3次元梁を置いたモデル化を工夫し，エンジンブロックの振動解析に適用を試みる。

*　東京大学工学部

2 従来のシェル要素

数多く提案されているシェル要素のなかでも，平面シェルとアイソパラメトリックシェルに属するものが，簡単でしかも精度が良いので使われる機会が多い。

平面シェル要素においては単に平面応力要素と平板曲げ要素を組み合わせて使用するだけであるから，改めてシェルとしての要素の誘導は不要である。従って，精度のよい平面応力要素と平板曲げ要素の中から，節点における適合性が満足される組み合わせが行なわれる。

曲面を多数の小さい平面で近似する訳であるから，三角形要素が幾何学的には有利である。しかし一般に四辺形要素の方が精度がよいので，折れ板や円筒殻ではよく使われる。その中でも平面応力要素 QM 6 (要素の名称は一般に通用しているものがある場合にはそれを用いているが，名称がなくて著者が勝手に命名したものも含むので第1報[1]を参照頂きたい) と平板曲げ要素 ACM の組は非常に精度がよく，薄板の長方形板で近似可能な形状に対しては最も有効なものの一つであるといえる。

アイソパラメトリックシェル要素は，3次元中実要素に板としての条件即ち中央面に対する法線の直線性の保持を拘束して得られるもので，せん断たわみの影響は当然含まれ，形状の近似度も高くしかも簡単である。通常，変位法に基づいて剛性マトリックスが誘導され，そのとき薄板における Kirchhoff 仮説を強制するため，Reduced (あるいは Selective) integration が行なわれる[7]。

精度と経済性の兼ね合いから8節点要素が用いられることが多いが，4節点要素の使い易さは大きな魅力であって，Kanok-Nukulchai は最近 BDS という名の4節点アイソパラメトリックシェル要素を提案している[2]。しかしながらこれら4節点や8節点アイソパラメトリックシェル要素にはいくつかの欠陥を含んでいて，とてつもない結果を導いてしまうことがある。

こうした欠陥は薄板としての条件を満足させる機構に原因があるので，平板において顕著に現われる[8]。従って，いわゆる Mindlin 板において克服されているべきものであるから，著者は第1報[1]においてこの問題を扱い，混合法定式化が有効であることを見いだし，これらの欠陥を克服した Mindlin 板要素 BM 6 を導いた。

ところが，BDS は Mindlin 板要素 HTK の含む欠陥の本質的解決を何ら行なうことなくシェルに発展させた要素であるから，HTK の持つ欠陥をそのまま受け継いでいる。

MSC/NASTRAN の4節点アイソパラメトリックシェル要素 QUAD 4[3] では，数値積分点の工夫と剛性の修正によって欠陥の防止を図っているが，抜本的対策とはいい難く信頼性に欠けるように思われる。

3 混合法によるシェル要素の誘導

第1報において誘導した平面応力要素 MX 2 と平板曲げ要素 BM 6 の性能の良さはすでに前報までで実証済みであるから，これらを組み合わせて平面シェルとして使用すれば高性能のシェル要素となることは十分に期待できる。しかし，平面シェルのままだと形状が四辺形であることから使用が限定されてくるので，これを4頂点が一平面上にない一般的なシェル要素に拡張しておく必要性は大きいといえる。

そこで，ここでは第1報で報告した混合法定式化に基づいて一般的なシェル要素の誘導を行なうが，その正確な記述を行なおうとするとあまりにも冗長になり過ぎる。ところが幸いにも MX 2 や BM 6 からのスムーズな拡張であるから，そのほとんどの内容は第1報の記述から無理なく類推できる。従って，ここでは誘導の流れを説明するに留める。

これから誘導する混合法4節点シェル要素を MFS と名付け，その形状と使用される座標系を Fig. 1 に示す。

Cartesian 座標系 X-Y-Z が全体座標系で，Cartesian 座標系 x-y-z が要素に固定した基準の座標系で，Cartesian 座標系 x'-y'-z' が要素内の各点での局部座標系で，アイソパラメトリック表示の親要素における座標系が ξ-η-ζ 座標系で Cartesian 座標系に記入すると一般には直交しない。x-y-z 座標系はもともと不必要なものであって，普通に行なわれているように X-Y-Z 座標系と x'-y'-z' 座標系で記述可能であり，プログラムの作成においては経済上の理由から用いないが，誘導の説明には平板からの類推を容易にする目的で用いている。

板としての条件を課すると，板厚方向の特性はその中央面に代表させることが可能である。これが理論の大きな前提である。z 軸は4節点の重心点における中央面の

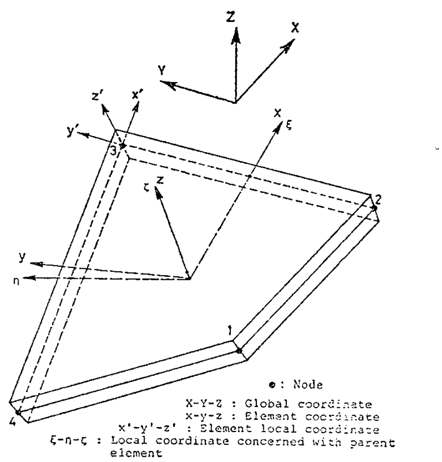


Fig. 1 Coordinate system of mixed type four-node shell element

法線方向に，x軸は辺 23 と辺 14 の各中点を結ぶ直線の辺 23 側に向いて，y軸はこれらと直交するようにとられる。このときξ軸とζ軸はそれぞれx軸とz軸に一致し，η軸は辺 34 と辺 21 の各中点を結ぶ直線の辺 34 側に向いてとられる。こうすると，x, y, ξ, η の各軸は同一平面内にあり，この平面に中央面上の代表的諸量を投影することによって平板との対応が行なわれる。z'軸は中央面の各点の法線方向にとり，y' 軸は x 軸を平行移動して z' 軸と交わらせて決まる平面に垂直にとり，x' 軸は z' 軸と y' 軸に直交するようにとられる。

このような座標系が決定されると，シェル要素の幾何学的形状を定義する要素内の任意点の x, y, z 座標値は次のように表現できる。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_1^4 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \left(\sum_1^4 N_i \frac{\zeta t_i}{2} \right) \boldsymbol{n} \qquad (1)$$

ただし，

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

および

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sum_1^4 N_i \boldsymbol{V}_{3i}}{\left| \sum_1^4 N_i \boldsymbol{V}_{3i} \right|} \qquad (3)$$

ここで，x_i, y_i, z_i は節点座標，t_i は節点における板厚，$\boldsymbol{V}_{3i}$ は節点における中央面の長さ t_i の法線ベクトル，$\boldsymbol{n}$ は要素内の任意点での中央面の単位法線ベクトルである。

（1）式は中央面が hyperbolic paraboloid であるような板の幾何学的形状を正確に表現している。

次に，変位場の仮定に移るが，その前に x'-y'-z' 座標系から x-y-z 座標系への座標変換マトリックスの方向余弦マトリックス $[T]$ をベクトル表示しておく。すなわち，

$$[T] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1{}^T \\ \boldsymbol{v}_2{}^T \\ \boldsymbol{v}_3{}^T \end{bmatrix} \qquad (4)$$

こうした準備の後，変位場は次のように仮定される。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_1^4 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_1^4 [F_i] \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} + \sum_1^4 N_i \frac{\zeta t_i}{2} [\phi_i] \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

ただし，

$$[\phi_i] = [\boldsymbol{v}_{1i} \ -\boldsymbol{v}_{2i}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{2i}^T \\ \boldsymbol{v}_{1i}^T \end{bmatrix} \qquad (6)$$

および

$$[F_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_i & B_i & C_i \end{bmatrix} \qquad (7)$$

ここで，u_i, v_i, w_i は節点でのそれぞれ x, y, z 軸方向の変位であり，$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ は節点でのそれぞれ x, y, z 軸まわりのたわみ角である。また，（5）式の右辺第2項は BM 6 で用いた w に関係する2次のバブルモードであって，（7）式中の A_i, B_i, C_i は第1報の A_i, B_i の定義を3次元に拡張したものである。

汎関数のエネルギー項の計算に必要なひずみは，数値積分点での x'-y'-z' 座標系で表現されていることが必要であるから，（5）式から変位の微係数を x-y-z 座標系に対して求め，$[T]^T$ を用いてこれを x'-y'-z' 座標系に変換する。これらの操作は変位法による場合と同様であるから，文献 7) の経済的処理方法がほとんどそのまま利用できる。

一定応力状態の剛性は，MX 2 や BM 6 の場合と同様に，関係するひずみエネルギー項を1点 Gauss 積分することによって評価できる。しかし，1点 Gauss 積分では要素の体積 V が正しく計算されないことから，このとき使用される積分点 $\xi=\eta=\zeta=0$ での Jacobi 行列の行列式 $\det[\boldsymbol{J}_0]$ を $V/8$ に置き換えた計算を行なう。厳密に要素の体積 V を正しく求めるためには $3\times3\times2$ Gauss 積分が必要であるが，それではあまりにも面倒である。しかし幸いなことに，$2\times2\times1$ Gauss 積分による値は実用上無視できる程度の誤差しか生じない上に，高次の応力場の剛性計算の際に必然的に求まってくるからこれを用いることにする。

高次の応力状態における剛性の誘導を行なうため，高次の応力場の仮定を行なう。変位場の場合と異なり，いきなり x'-y'-z' 座標系で仮定することが可能と思われる。従って，次のような仮定が行なわれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma^H_{x'} &= \sigma^H_{x'm} + \frac{6\zeta}{t^2} M^H_{x'} \\ \sigma^H_{y'} &= \sigma^H_{y'm} + \frac{6\zeta}{t^2} M^H_{y'} \\ \tau^H_{x'y'} &= \tau^H_{x'y'm} + \frac{6\zeta}{t^2} M^H_{x'y'} \\ \tau^H_{z'x'} &= \frac{3Q^H_{x'}}{2t}(1-\zeta^2) \\ \tau^H_{y'z'} &= \frac{3Q^H_{y'}}{2t}(1-\zeta^2) \end{aligned} \right\} \qquad (8)$$

ここで，t は4つの節点における板厚の平均値。$\sigma^H_{x'm}$, $\sigma^H_{y'm}$, $\tau^H_{x'y'm}$ は膜応力による成分で，MX 2 の高次の応力場と同様な形に書ける。$M^H_{x'}, M^H_{y'}, M^H_{x'y'}, Q^H_{x'}, Q^H_{y'}$ はモーメントおよびせん断力であって，BM 6 の高次の応力場と同様な形に書ける。なお，これらで平板と異なるのは，x-y-z 座標が x'-y'-z' 座標になっていることだけ

である。

(5)式の変位場と(8)式の高次の応力場を用いて,第1報で提案した混合法定式化に従えば,高次の応力状態における剛性が誘導できる。なおこのとき,Jacobi 行列の行列式 $\det[\boldsymbol{J}]$ を $V/8$ で置き換えてエネルギー項の計算を行ない,計算の簡略化と正解への収束性にMX 2 や BM 6 と同程度の効果を期待した。

以上のようにして得られた一定応力状態と高次の応力状態の剛性マトリックスを単に加え合わせて,シェル要素の剛性マトリックスが誘導される。これで十分であるが,こうして得られた要素には中央面の法線まわりの回転 $\theta_{z'}$ に対応する剛性は含まれていない。一般に,こういった剛性を正しく評価することは非常に困難である上に影響も小さいから含めない場合が多い。しかし,計算プログラムの簡略化と多少の精度向上のため,このような剛性の評価を試みることは意味があるように思われる。

シェルの膜成分のその法線まわりの平均回転角ωが

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}-\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) \tag{9}$$

で与えられることはよく知られている。これと $\theta_{z'}$ とのずれが膜内で高次のせん断ひずみ $\gamma^H_{x'y'}$ を生ずると考えられる。このとき,$\gamma^H_{x'y'}$ は

$$\gamma^H_{x'y'}=\theta_{z'}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}-\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) \tag{10}$$

と書ける。この $\gamma^H_{x'y'}$ が一定応力(一定ひずみ)状態と独立であることは容易に理解できるから,第1報の混合法定式化に従えばせん断弾性係数を G として $G\gamma^H_{x'y'}$ が高次の応力場を表現しているものと考えられる。

この $\gamma^H_{x'y'}$ に対する剛性は,ひずみエネルギー

$$V_T=\frac{1}{2}\int_A \kappa_T G t\left\{\theta_{z'}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v'}{\partial x'}-\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)\right\}^2 dA \tag{11}$$

を停留化することによって得られる。ここで,κ_T は要素内での $\gamma^H_{x'y'}$ の分布を修正するための係数である。κ_T の値の変化が計算結果に及ぼす影響は小さいことが知られている[2)]から,κ_T の決め方にそれ程神経を使う必要はないが,1に近い値が自然であるように思われる。そこで,ここでは $\kappa_T=5/6$ が用いられる。なお,(11)式の数値積分には 2×2×1 Gauss 積分が合理的であると考えられる。

このように,混合法定式化に従って MX 2 と BM 6 を一般のシェルに拡張し,法線まわりのねじり剛性を付加して,新しいシェル要素 MFS が得られる。ただし,法線まわりのねじり剛性は必ずしも考慮される必要はなく,それの除外によって大幅な経済化が行なえる場合には含めない方が賢明である。

MFS は要素の形状が平面の場合には,互いに独立な3つの成分,すなわち MX 2,BM 6 および面内の回転剛性に正しく分解される。なお,任意の形状の MFS の剛性マトリックスの固有値と固有モードを計算すれば,6個の剛体運動を含んでいることが確認できる。MFS はその誘導過程から見て,浅くないシェルに対する適用には無理が感じられるが,この点は実際の応用結果の実績を通して評価されるべきものである。

最後に,振動解析に必要である質量マトリックスについては,MFS の場合にも付録において扱っている BM 6 の場合と同様に,(5)式の変位場の第2項のバブルモードを除外したものを用いて,consistent mass と lumped mass の平均である mean mass を誘導して,これを使うことにする。

4 数値解析例

はじめに MFS の静的な問題に対する性能を,Hyperbolic paraboloid シェルの変形解析を通して行ない,次に本研究の目的の一つである実際の構造物の振動解析に対する MFS の適用性を調べるため,それらの簡略模型の自由振動解析を行なって実験値や他の要素による結果と比較する。

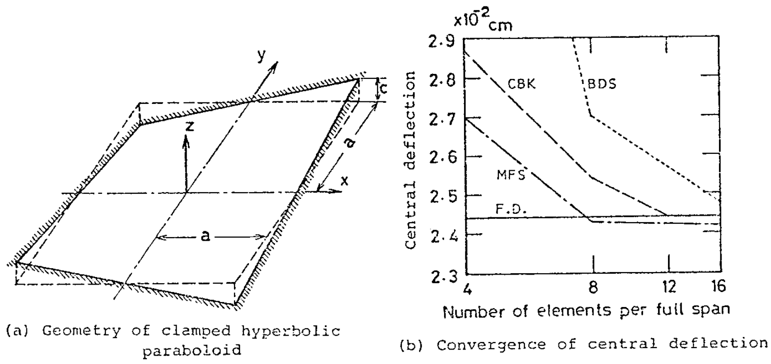
4.1 Hyperbolic paraboloid シェルの静的変形

建築構造物に用いられることの多い Hyperbolic paraboloid シェルが全周固定で一様圧力 p_n を受ける場合の変形を計算する。この問題に対しては,MFS はその幾何学的形状を正確に表現できる。Connor らが誘導した Kirchhoff-Love 仮説に従うシェル要素 CBK と差分法による解は文献 10) から,BDS による解は文献 2) から引用して比較に利用している。

シェルの形状が Fig. 2 (a) に,中央点における変位の収束が Fig. 2 (b) に,中央線に沿っ変位分布が Fig. 2 (c) に示されている。厳密解がないので細かなことについては断言できないが,MFS と差分法による結果はよく一致しているのに反し,BDS による結果はこれらからいくぶんずれていることなどがわかる。

4.2 片持円筒殻の振動

ファンの翼の基本的特性を調べるのに片持円筒殻が模型として用いられる場合が多いが,Fig. 3 に示すものはその中でも最も簡単なものの一つであって,板厚は一定である。模型の半分について,対称振動と逆対称振動とを別々に,MFS, BDS, ACM+QM 6 (ACM と QM 6 を重ね合わせた平面シェル) の各要素を用いて,固有振動の解析を行なった。結果を Table 1 と Fig. 4 に示すが,Olson らによる実験結果を文献 11) から,QUAD 4 による計算結果を文献 3) から引用して比較の材料とした。なお,この問題を他の多くの要素で解いた結果が文献 9)



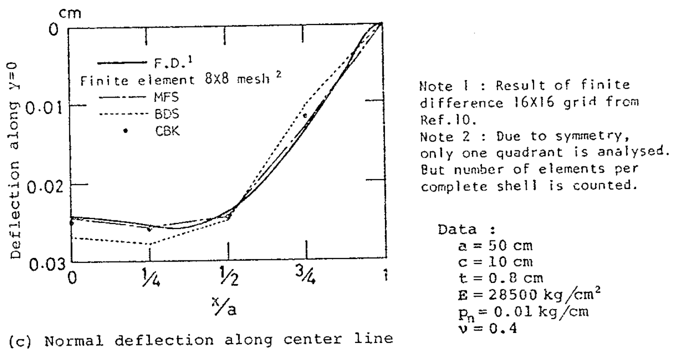


Fig. 2 Deflection of clamped hyperbolic paraboloid under uniform normal pressure

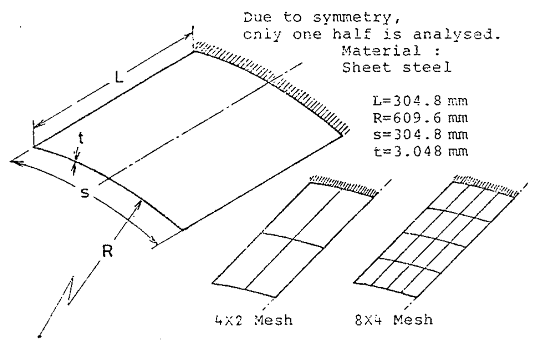


Fig. 3 Geometry and meshes of cylindrical fan blade

で比較してあるので参照頂きたい。

この表からわかるように，大まかに見ればどの要素による結果も似たような精度であるが，その中でも ACM＋QM 6 による結果が最も精度がよく，MFS による結果がそれに次いでいる。また，Fig. 4 に示すように，MFS による振動モードも実験結果とだいたいにおいてよく似ている。

4.3 ねじれた片持板の振動

タービン翼の最簡単模型である先端が根元に対して 30° だけねじれた等板厚の片持板の固有振動を MFS を用いて解析した。模型の形状と材料定数などを Fig. 5

Table 1 Natural frequencies of cylindrical fan blade

Mode No. and Symmetry	Finite element predictions (Hz)								Experiment (Ref. 11) (Hz)
	ACM+QM 6		BDS		QUAD 4		MFS		
	4×2	8×4	4×2	8×4	4×2	8×4	4×2	8×4	
1—A	86.1	86.5	83.6	86.4	86.8	86.0	82.9	85.8	85.6
2—S	135.8	139.5	139.0	139.9	139.1	139.5	131.8	138.3	134.5
3—S	240.7	247.9	279.5	255.3	279.2	253.7	243.1	245.5	259
4—A	357.9	347.5	423.2	381.1	416.6	371.0	284.2	342.6	351
5—S	385.9	386.3	483.7	424.5	455.3	413.6	290.5	374.3	395
6—A	404.0	527.4	688.0	574.2	672.7	564.3	454.7	511.5	531
7—A		720.0		868.4		818.6		699.4	743
8—S		714.9		832.9		867.5		699.5	751

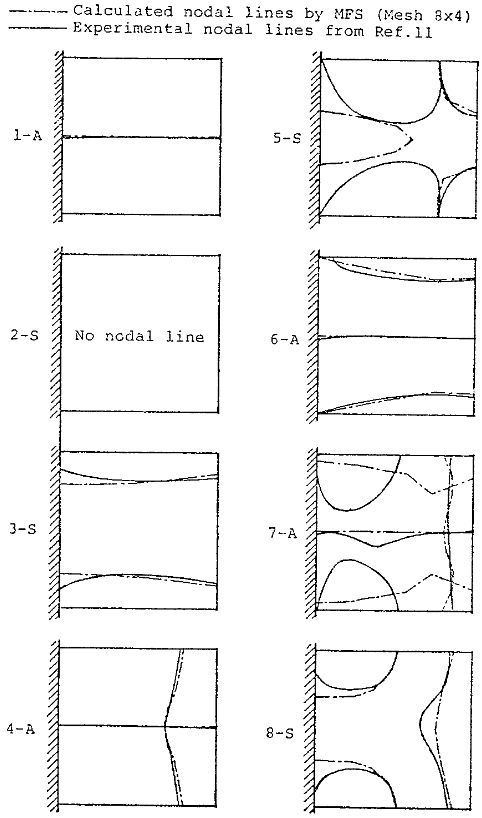


Fig. 4　Mode shapes of cylindrical fan blade

これらの比較によって，MFS による結果は要素数が少ないにも拘らず固有振動数とモードの両方が実験値と非常によく一致していることがわかる。

4.4　旋盤ベッド模型の振動

旋盤ベッドの基本的な振動特性を調べるため，Fig. 7 に示すような形状の片持の模型を製作し，実験を行なって固有振動数と振動モードを測定し，これらを数種類の要素による計算結果と比較した。

模型は厚さ 3.2mm の軟鋼板を電気溶接によって接合した後，すみ肉の盛り上がった部分を機械加工によって除去して，規定の寸法および形状を正しく実現している。また，固定端は3個の中実の軟鋼角材の間に模型をはさみこんでボルト締めしてある。固有振動数の測定に

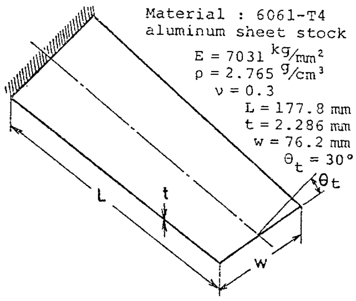


Fig. 5　Geometry of twisted cantilevered plate

に，計算結果を Table 2 と Fig. 6 に示す。ここで，メッシュ分割は先の例題と同じく，(弧方向の要素数)×(長さ方向の要素数) で表現してある。MacBain が文献12) において行なっている実験結果が比較の対象であり，彼が同時に行なった NASTRAN の要素 CQUAD 2 による計算結果も併記しておいた。

Table 2　Natural frequencies of twisted cantilevered plate

Unit : Hz

No.	Mode	Finite element method: CQUAD 2 (10×23)	MFS (4×9)	MFS (6×12)	Experiment (Ref. 12)
1	1F	60	58.4	58.4	59
2	2F	340	334	334	332
3	1T	504	490	495	479
4	3F	998	991	993	1,006
5	2T	1,427	1,401	1,407	1,337
6	PM_1	1,543	1,806	1,817	1,743
7	4F	2,020	1,957	1,997	2,000
8	3T	2,248	2,209	2,222	2,149
9	PM_2	2,275	2,253	2,287	2,372
10	PM_3	2,912	2,668	2,773	2,929

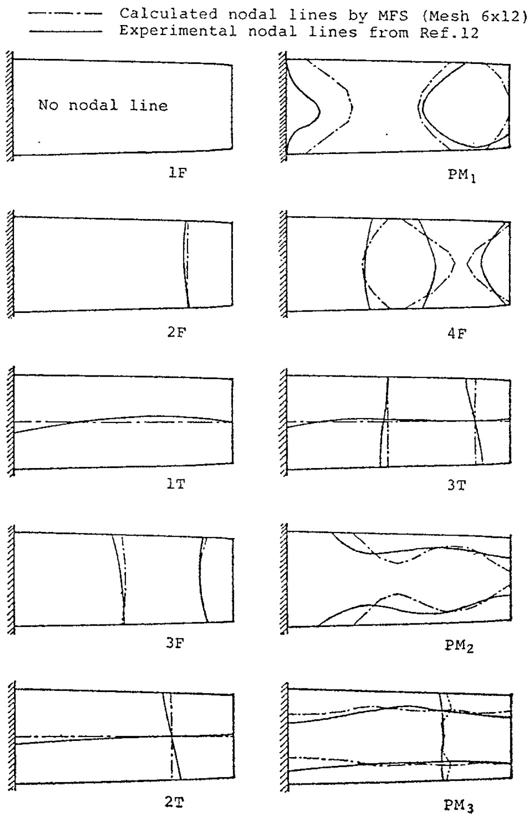


Fig. 6　Mode shapes of twisted cantilevered plate

Table 3　Natural frequencies of model lathe bed

No.	Mode	Calculation by FEM (Hz)				Experiment (Hz)
		BDS	ACM+QM 6	SAP IV	MFS	
1	1 st bending about Y axis	413.2	45.6	50.2	46.0	44.1
2	2 nd bending about Y axis	1,781.2	146.6	155.4	146.8	140.4
3	3 rd bending about Y axis	—	268.1	265.8	260.8	258.6
4	1 st torsion about X axis	278.7	255.7	281.3	279.4	265.5
5	1 st bending about Z axis	286.9	270.3	372.0	287.1	268
6	4 th bending about Y axis	—	388.8	359.0	360.7	384

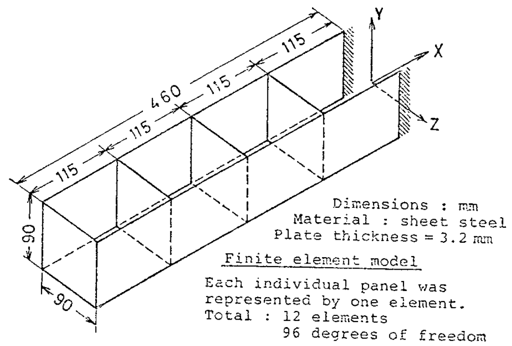


Fig. 7　Geometry of model lathe bed

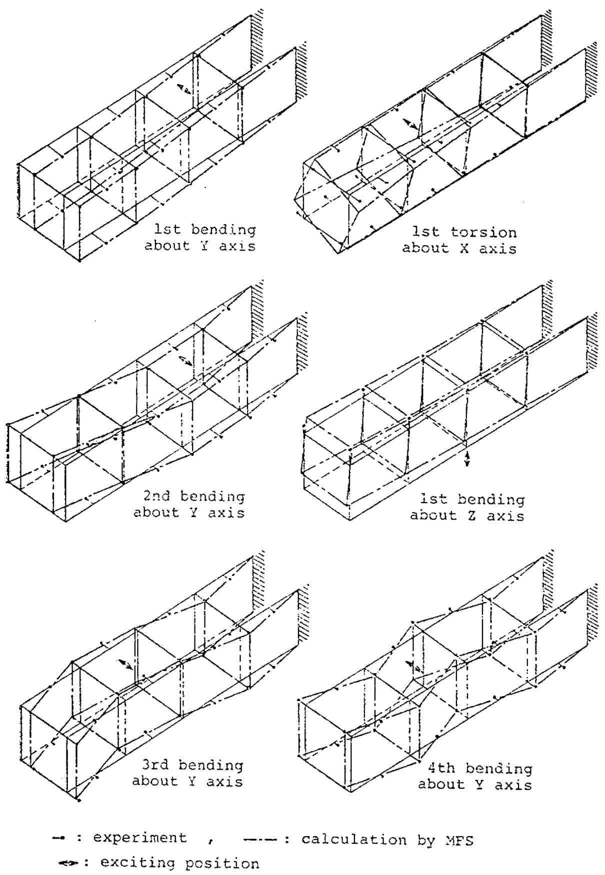


Fig. 8　Mode shapes of model lathe bed

は模型に余分なものが付加することを嫌って，電磁石で加振し，うず電流型非接触変位計で変位のピークとなる振動数を捜した。振動モードは動電型振動発生機を短いアルミ製パイプで模型に結合して加振し，うず電流型変位計と圧電型加速度計をモードによって使い分けて測定した。

計算は MFS, BDS, ACM+QM 6 の各要素と汎用プログラム SAP IV[15] を用いて行なわれた。結果を Table 3 および Fig. 8 に示すが，MFS と ACM+QM 6 による結果は非常に精度が良く，SAP IV ではこれらよりもいくぶん精度が悪くなり，さらに BDS による結果は Y 軸まわりの曲げに関して異常に高い値が得られてこの要素のもつ欠陥を暴露している。また，MFS によるモード形の計算結果も実験値によく似ている。

4.5　エンジンブロック模型の振動

Lalor らはトラック用ディーゼルエンジンの騒音研究に関連して，Fig. 9 (a) に示すような形状の直列 6 気筒エンジンのブロック模型の自由振動に対して実験と計算を行なっている[13),14)]。模型は鋳鉄で造られ，細いワイヤーで吊してある。彼らはこの模型に対して，せん断たわみの影響を含まない平面シェル要素を用いて解析しているが，その結果は相当に細かいメッシュ分割が行なわれているにもかかわらず，ほとんど失敗といえる結果に終わっている。

ここでは，MFS, BDS, ACM+QM 6 の各要素を用いて計算を行ない，Lalor らの実験結果[13)]と比較する。

有限要素モデルは Fig. 9 (b)，Fig. 9 (c) に示すような非常に粗い 2 通りのメッシュを用いるが，これらの自由度は全く同じである。Fig. 9 (b) のモデルは普通に行なわれる板だけのモデル化である。しかしこれでは模型の板厚が厚いため，板の交線上における幾何学的近似の妥当性に欠ける。そこで，Fig. 9 (c) に示すような板の交線上に 3 次元梁要素を配置したモデルが考案された。シェル要素の節点と梁要素の節点の位置のずれは，前者を後者の位置にオフセットすることで解決しており，その結果，解析に用いられる節点の個数と位置は Fig. 9

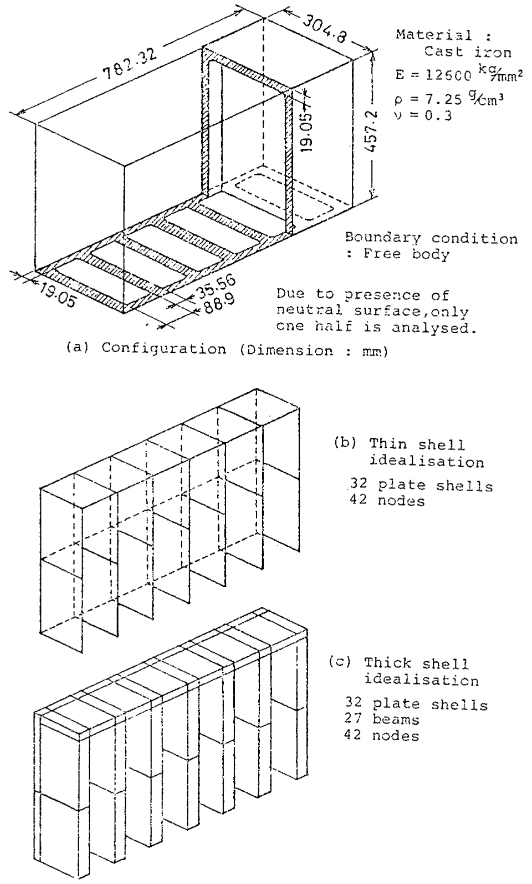


Fig. 9　Geometry and finite element idealisations of model engine block

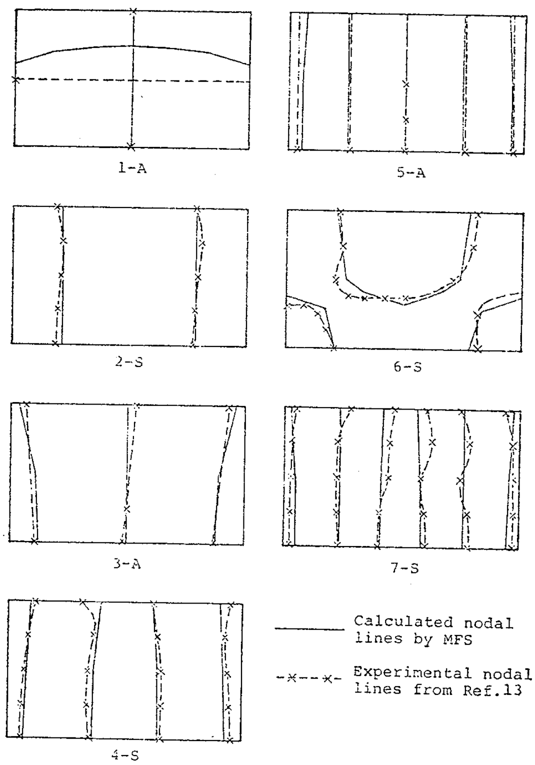


Fig. 10　Mode shapes of model engine block

Table 4　Natural frequencies of model engine block

Unit : Hz

Mode	Finite element method			Experiment (Ref. 13)
	Thin shell	Thick shell		
	ACM+QM 6	B D S	M F S	
1—A	370	618	452	470
2—S	530	783	629	635
3—A	846	1,268	997	1,023
4—S	1,050	1,891	1,316	1,350
5—A	1,224	2,613	1,595	1,620
6—S	—	1,779	1,595	1,700
7—S	—	—	1,807	1,884

(b) のものと全く同じになる。ACM+QM 6 に対しては Fig. 9 (b) のモデルを，MFS と BDS に対しては Fig. 9 (c) のモデルを用いて計算を行なった。

このようにして得られた結果を Table 4 と Fig. 10 に示すが，これらから MFS による結果は固有振動数およびモード形の両方が十分な精度で実験結果と一致していること，ACM+QM 6 や BDS による結果はほとんど使いものにならないことなどがわかる。

5　結　　　言

第1報で提案した混合法定式化に基づいて，簡単で高精度かつ高信頼性の一般的な4節点シェル要素 MFS を誘導した。MFS の有効性を実証するために，比較的応用性の高い構造模型の自由振動解析に適用して，既存の要素では十分な結果の得られないような問題に対しても，非常に良好な結果を得た。このことが，用いた混合法定式化の妥当性を示すとともに，MFS の実機への応用に対する実用性の高さをも明らかにしていると思われる。

終わりに，本研究を進めるにあたり，研究の実施に多大のご便宜をいただいた上に，有益なご助言とご鞭撻を賜わった東京大学工学部舶用機械工学科 津田公一教授ならびに同 酒井宏助教授に心から御礼申し上げます。

参　考　文　献

1) 神田芳文：混合法の一定式化から誘導される新しい要素（第1報）——平面応力要素，3次元中実要素および平板曲げ要素——，日本造船学会論文集，第 147 号，昭和 55 年6月.
2) W. Kanok-Nukulchai : A Simple and Efficient Finite Element for General Shell Analysis, Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 14, No. 2 (1979).
3) R. H. MacNeal : A Simple Quadrilateral Shell Element, Computers & Structures, Vol. 8, No. 2 (1978).

4) T. A. Rock and E. Hinton : A Finite Element Method for the Free Vibration of Plates Allowing for Transverse Shear Deformation, Computers & Structures, Vol. 6, No. 1(1976).
5) T. J. R. Hughes and M. Cohen : The "Heterosis" Finite Element for Plate Bending, Computers & Structures, Vol. 9, No. 5 (1978).
6) D. J. Dawe : A Finite Element Approach to Plate Vibration Problems, Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 7, No. 1 (1965).
7) O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too : Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 3, No. 2 (1971).
8) E. D. L. Pugh, E. Hinton and O. C. Zienkiewicz: A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with 'Reduced' Integration, Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 12, No. 7 (1978).
9) R. A. F. Martins and D. R. J. Owen : Structural Instability and Natural Vibration Analysis of Thin Arbitrary Shells by Use of the SEMI-LOOF Element, Int. J. num. Meth. Engng., Vol. 11, No. 3 (1977).
10) J. J. Connor, Jr. and C. Brebbia : Stiffness Matrix for Shallow Rectangular Shell Element, J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 93, No. EM 5, 43～65 (1967).
11) M. D. Olson and G. M. Lindberg : Dynamic Analysis of Shallow Shells with a Doubly-Curved Triangular Finite Element, J. Sound and Vibration, Vol. 19, No. 3 (1971).
12) J. C. MacBain : Vibratory Behaviour of Twisted Cantileverd Plates, Journal of Aircraft, Vol. 12, No. 4 (1975).
13) N. Lalor and M. Petyt : Modes of Engine Structure Vibration as a Sourse of Noise, SAE Paper No. 750833 (1975).
14) D. M. Croker, N. Lalor and M. Petyt : The Use of Finite Element Techniques for the Prediction of Engine Noise, Noise and Vibrations of Engines and Transmissions, I. Mech. E., C 146/79, 131～140 (1979).
15) K. J. Bathe, E. L. Wilson and F. E. Peterson : SAP IV-A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems, Report of Earthquake Engineering Research Center, Univ. of California, Berkeley, No. EERC 73-11, revi. Apr. 1974.
16) O. C. Zienkiewicz : The Finite Element Method, 3 rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
17) E. Hinton and N. Bićanić : A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate Elements for Free Vibration Analysis, Computers & Structures, Vol. 10, No. 3 (1979).

付録 平板の振動

第1報[1]で著者が誘導した平板曲げ要素 BM 6 を自由振動問題に適用し，得られた結果を既存の要素である ACM および HTK による結果や実験値と比較することによって，その性能を検証する。

剛性と質量の関係を見るため，Reissner の汎関数を平板の場合に限らない一般的な表示で考える。慣性力は含むが体積力は作用せず，幾何学的境界条件が予め満足されている場合の Reissner の汎関数 Π_R は次のように書ける。

$$\Pi_R=\int_{t_1}^{t_2}\sum_n\Bigg[\int_{V_n}\Big\{-\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i})-\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^2\Big\}dV-\int_{S\sigma_n}\bar{T}_i u_i dS\Bigg]dt \qquad \text{(A-1)}$$

ここに，σ_{ij} は応力テンソル成分，u_i は変位成分，C_{ijkl} は弾性コンプライアンス成分，ρ は材料の密度，・は時間 t に関する微分，V_n は要素の体積，$\bar{T}_i$ は要素境界での作用力，$S\sigma_n$ は要素の力学的境界条件の課せられる部分，$\sum$はすべての要素にわたっての総和を意味する。

この汎関数において，運動エネルギー項は応力 σ_{ij} を含まないから要素レベルでの応力に関する停留化の操作に全く無関係である。従って，剛性マトリックスを第1

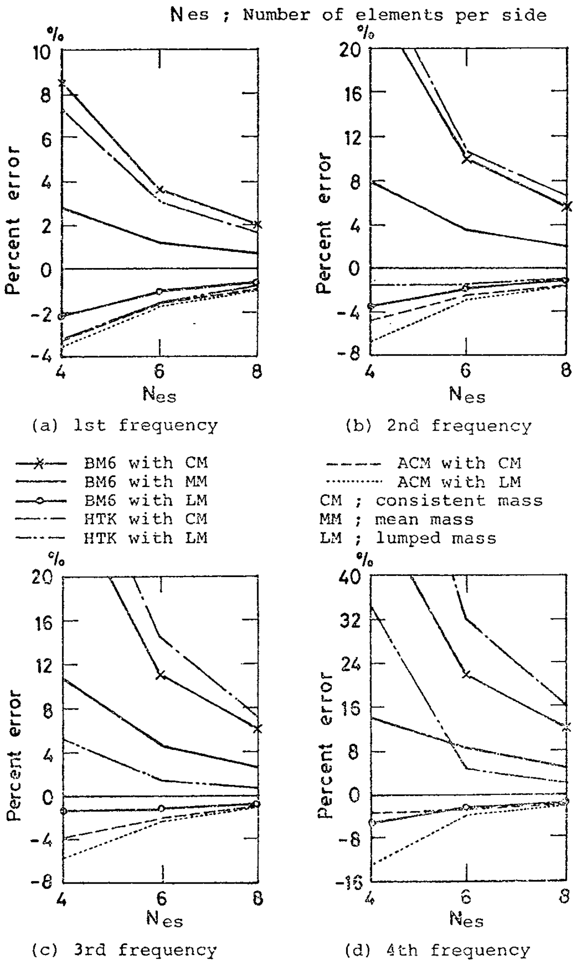


Fig. 11 Convergence of frequencies for simply supported thin ($t/L=0.01$) rectangular plate (aspect ratio$=\sqrt{2}$)

報の混合法定式化から，質量マトリックスを通常の変位法と全く同一の定式化から誘導することによって離散的な運動方程式が得られる。

質量マトリックスとしては剛性マトリックスの誘導に用いた変位関数 N_i を用いて算出される consistent mass（略して CM）の他に，経済上の利点から節点に要素内の質量を集中して振り分ける lumped mass（略して LM）が用いられることも多い。この LM は要素内で区分的に定数であるような変位関数 $\hat{N}_i$ から算出されたものと解釈でき[16]，具体的な算定方法の一つに，要素の全質量を CM の対角項の比に分配する方法[4),17)]がある。

後述の数値計算結果からわかるように，Mindlin 板要素において要素分割が粗い場合には CM と LM とでは精度の上から一長一短があって，曲率変化の激しい振動モードでは CM が，曲率変化がゆるやかな振動モードでは LM が精度の悪い結果を与える傾向がみられる。そこでこれを改善するための方策として，CM と LM の中庸的な質量マトリックスを用いれば効果的であろうことが期待できる。すなわち，質量マトリックスの算出に新たな変位関数 $\tilde{N}_i$ として

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{N}_i=\lambda N_i+(1-\lambda)\hat{N}_i\\ \text{ただし，}0\leqq\lambda\leqq1\end{array}\right\}\qquad (\text{A-2})$$

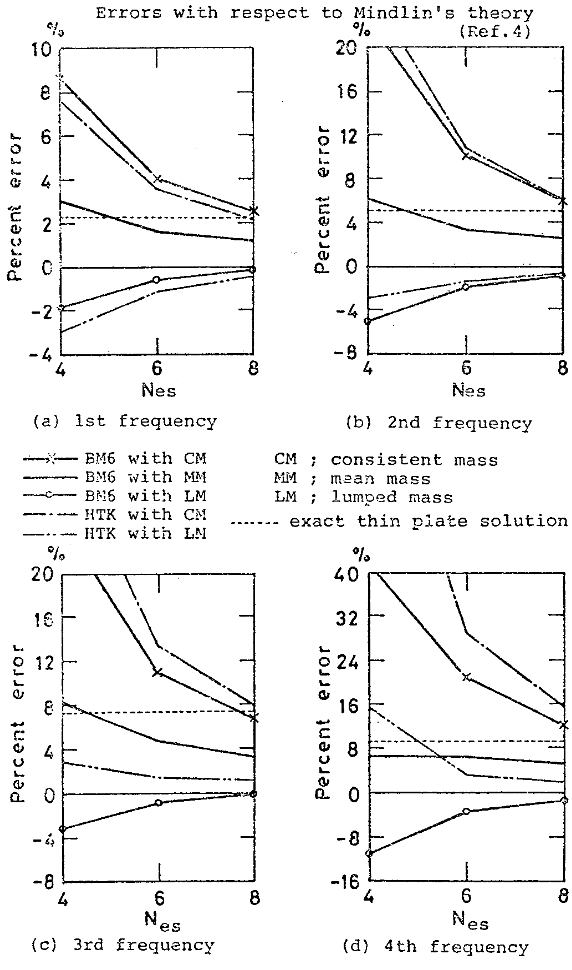


Fig. 12 Convergence of frequencies for simply supported thick ($t/L=0.1$) rectangular plate (aspect ratio$=\sqrt{2}$)

を用いたとみなして，CM と LM にそれぞれ λ と $(1-\lambda)$ を掛けて両者を加え合わせた質量マトリックスが考えられる。ここでは，$\lambda=0.5$ を用いることとし，これを mean mass（略して MM）と呼ぶことにする。

なお，BM 6 の変位 w には2次のバブルモードを含むが，一般によく行なわれているように質量マトリックスの算出にはこのバブルモードを除外する。

数値計算例として，$L\times\sqrt{2}L$ の全周単純支持長方形板の薄板と厚板および片持正方形薄板の低い方から4個

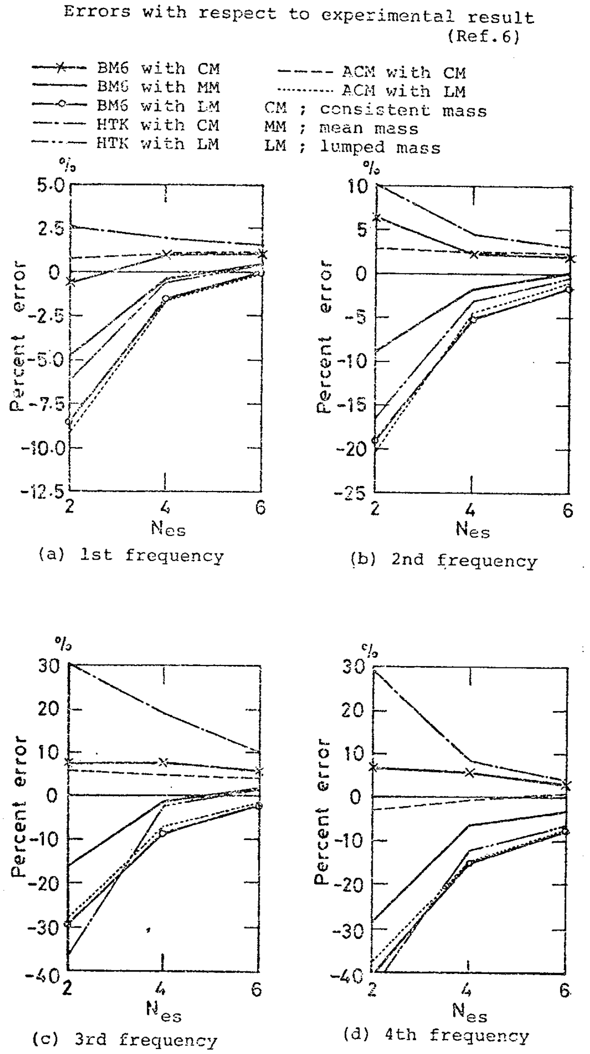


Fig. 13 Convergence of frequencies for cantilever thin ($t/L=0.01$) square plate

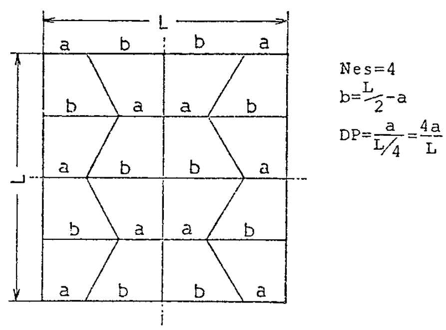


Fig. 14 Definition of mesh distortion parameter DP

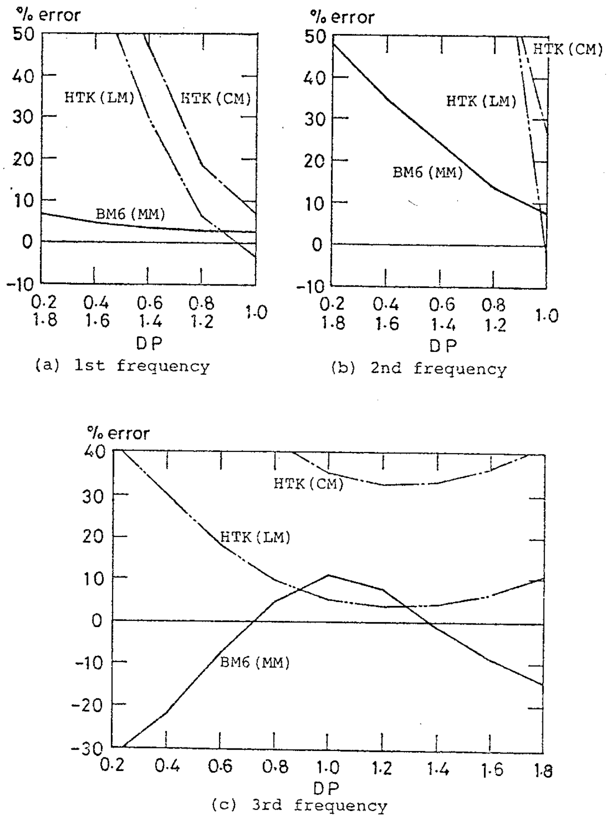


Fig. 15 Percentage error of the lower three frequencies for simply supported thin ($t/L=0.01$) square plate as a function of DP

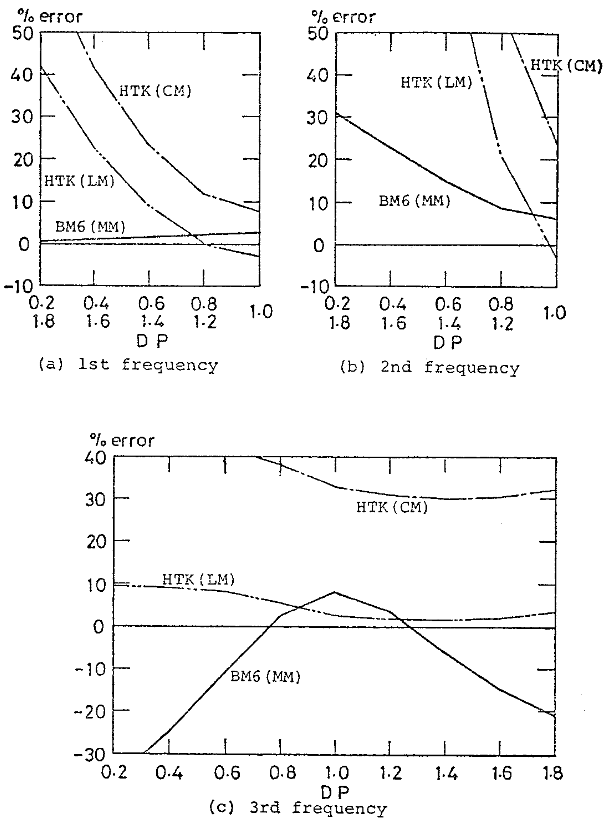


Fig. 16 Percentage error of the lower three frequencies for simply supported thick ($t/L=0.1$) square plate as a function of DP

の固有振動数の収束をそれぞれ Fig. 11, Fig. 12, Fig. 13 に示す。なお，図中の N_{es} は一辺当りの要素数を意味している。次に，要素のゆがみの影響を調べた例として，全周単純支持正方形板を Fig. 14 に示すようなゆがんだ要素で分割し，ゆがみの程度を Hinton ら[17]のいう distortion parameter (略して DP) で表わし，DP を変えて低い方から3個の固有振動数の誤差の変化を見た図を薄板と厚板に関してそれぞれ Fig. 15, Fig. 16 に示す。

これらの図から，BM 6 と HTK では単純支持板において CM が，片持板において LM が精度の悪くなる傾向にあること，MM ではこれらの精度低下がかなり緩和されること，厚板においてはせん断たわみの影響が相当にあって Mindlin 板の必要性が窺えること，MM を用いた BM 6 は HTK に比べて要素のゆがみに対する精度の低下が少ないことなどがいえる。このように，MM を用いた BM 6 はこれらの平板の自由振動問題に対して実用上十分な精度の解を与えることが示された。