（昭和56年11月　日本造船学会秋季講演会において講演）

# 波浪外力下における構造物の構造強度確率パターン

## （作用応力および疲労強度の確率パターン）

正員　堀　　　徹*　　清　水　　昇*
堀　雅　子*

# Stochastic pattern of structural strength of structures under random wave loads

## (Stochastic pattern of working stress and fatigue strength)

by Tohru Hori, *Member* Noboru Shimizu
Masako Hori

Summary

The design concept of ocean structures is now changing from the "design by rules" concept to the "design by analysis" concept, where starting from load analysis, various kinds of analysis such as stress analysis and failure analysis are carried out in a same flows. And it can be also pointed out as a special feature of the "design by analysis" that safety of structures is estimated from probabilistic point of view instead of the decisive estimation which has been adopted for long time.

In the case of probabilistic estimation of structual safety, it is necessary to handle the two kinds of probability, the probability of structural strength which is originated from randomness of external loads, and the probability of material strength caused by scatterness of material qualities. And in the present report, the former problem is investigated mainly.

In order to investigate probabilistic problems of the structural strength, it is firstly required to know stochastic characteristics of external loads, wave loads in case of ocean structures, and working stress induced by the loads. Therefore the stochastic pattern of working stress under wave loads is studied mainly experimentally, based on an experiment carried out for two years using a ship on service. Then, taking the stochastic characteristics of working stress into consideration, strength of fatigue strength which is regarded as a most usual mode of failure is investigated from stochastic point of view. Finally the results obtained are compared with the results presented in such codes as BS and AWS.

## 1 緒　　言

現在は設計概念に関する変革期にあるものと思われ，いわゆる“ルールによる設計”概念から“解析による設計”概念への移行が静かに進行しているものと思われる。

“解析による設計”の場合，外力解析，応力解析，破壊解析といった従来各々独自に行われていた解析を一つのフローの中で合理的に精度よく実施する所に特徴があるが，従来長い間行われてきた決定論的な評価を確率論的に実施しようとしている所にも大きな特徴があるものと思われる[1)3)]。

構造物の強度を確率論的に評価する場合には，外力のランダム性に由来する構造強度の確率パターンおよび構造物を構成する材料の材料強度確率パターンを知る必要があるが，本報では前者を研究の対象とした。

このとき，構造強度の原因となる波浪外力，もしくはそれによってもたらされる作用応力がどのような確率パターンを構成するかを知る必要があるが，本報では先ず筆者らが2年間にわたって実施した実船実験の計測結果により，波浪外力下の作用応力が構成する確率パターンについて，いわば実証的な説明を行う。次にこれらの結果を基に，最も一般的な破壊モードと考えられる疲労強度が，どのような確率パターンを構成するかについて述べる。最後に，得られた結果を実際に応用した場合について検討を行い，他コードとの比較を行った。

* 日立造船(株)技術研究所強度研究室

## 2　波浪外力下の作用応力確率パターン

ここでは，2年間にわたって実施した実船実験計測結果を基に波浪外力下において，船に働く応力がどのような確率パターンを構成するかについて説明を行う（参考文献10参照)。

（a）　短期分布

比較的短い時間内であれば波浪外力は近似的にエルゴード性を満足し，一つの定常確率過程を構成する。このような外力下における応力の各種確率分布を短期分布としてここでは取り扱うことにする。

（1）　解析過程

短期分布を求めるに当り現状において一般に行われている解析過程を以下に概説する[2)9)]。

（i）　定常正規確率過程の場合，そのスペクトラムによって，その内容を表わすことができる。波浪外力の場合，ISSC のスペクトラムで，このスペクトラムを近似するのが普通である。ISSC のスペクトラムは平均波周期 $\bar{T}$，有義波高 $h_s$，船と波がなす角度 $\chi$ の関数として与えられる。

（ii）　スペクトラムが与えられた場合にはその確率過程の標本関数を求めることができる。

（iii）　波浪外力の標本関数に対する応力応答を求めることによって，応力の標本関数を求める。この過程では通常ぼう大な応力解析を系統的に実施する必要があり最も労力を必要とする過程といえる。

（iv）　応力応答の標本関数により応力確率過程のスペクトラムを求めることができる。

（v）　確率分布としては，延性強度，ぜい性強度，座屈強度など応力の extreme value* が問題となる場合には極値の確率分布が必要となり，疲労強度，亀裂伝播強度の場合には変動範囲（または振幅）の確率分布が必要となる[4)]。

（vi）　現状では極値，変動範囲の分布とも，Rayleigh 分布で近似するのが普通で，応力確率過程の分散によって，その分布を求める。

（vii）　このようにして得られた確率分布は，平均波周期 $\bar{T}$，有義波高 $h_s$，船の迎え角 $\chi$ が与えられた場合のいわゆる条件付分布であって次のように表現できる。

$$p_C(x)=p(x|\bar{T},h_s,\chi) \qquad (1)$$

ここに $x$ は，応力極値，または応力変動範囲を表わす。

（2）　実船実験結果

本報では疲労強度を対象とするため，応力変動範囲に焦点をしぼって結果を述べる。応力変動範囲の求め方にはいわゆるピーク・トウ・ピークの変動範囲，ゼロクロスの変動範囲の2種が考えられるがここでは後者によった。また計測の対象は船体縦曲げ応力**である。

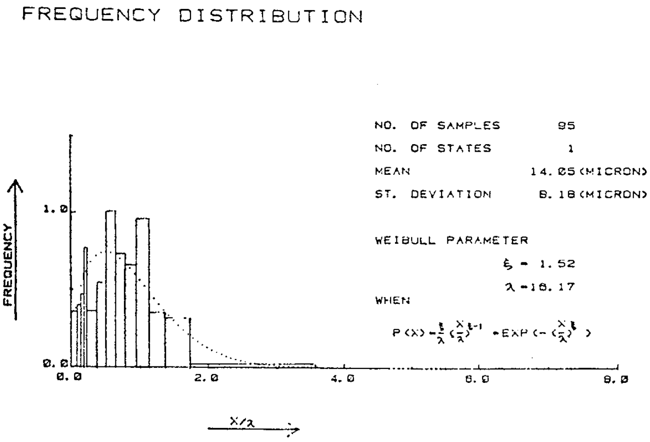


Fig. 1　An example of short term distribution

Fig. 1 は実験より得られた短期分布の一例である。図に示すような観測値の確率論的特質を求める場合，対応する確率分布を理論的に求めるのが一般的方法と考えられるが，変動範囲の場合，理論分布は未だ導入されておらず，また導入されたとしても，その分布は数学的に非常に複雑な算式となることが予想される。そこでここでは，数学的な取扱いが便利な Weibull 分布により観測値の分布を近似し，分布を決定する2つのパラメータによって，その確率論的な特質を論ずることにする。Weibull 分布は次式によって与えられる。

$$p(x)=\frac{\xi}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\xi-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\xi}\right\} \qquad (2)$$

ここに $\xi$ は shape parameter と呼ばれ，分布形状を決定する。また $\lambda$ は scale parameter と呼ばれ分布の大きさを決定する。Fig. 1 では実験データに最小自乗法を適用し，実験データを最もよく説明する，パラメータ $\xi$ および $\lambda$ を求め，その分布形状を併記している。図に示すように，本例の場合，shape parameter はほぼ2に近い値を示している。これは，分布が Rayleigh 分布に近い形状を有していることを示す。

Fig. 2 は，各短期分布に対して上記の Weibull 分布のあてはめを行い，パラメータ $\xi$ および $\lambda$ がどのような確率分布を構成するかをみたものである。Fig. 2（a）は $\xi$ の分布を表わすが，図にみるごとく，$\xi$ は，その平均が約2でバラツキの比較的小さい分布をすることが判る。また Fig. 2（b）は scale parameter $\lambda$ の分布を示すものであるが，図にみるごとく，非常にバラツキの大きい分布であり，分布を再び Weibull 分布で近似すると，その shape parameter は 0.89 となり，指数分布よりさらに変動係数の大きい分布であることが判る。この scale parameter の分布は，後述の時間分布を求める場合に重

*　例えば20年に一度の最大値

**　計測は歪ゲージによって求めており，歪の形で結果を示す。

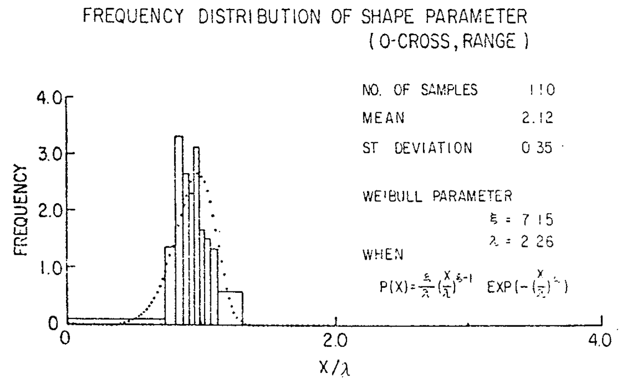


Fig. 2(a) Frequency distribution of Weibull shape parameters

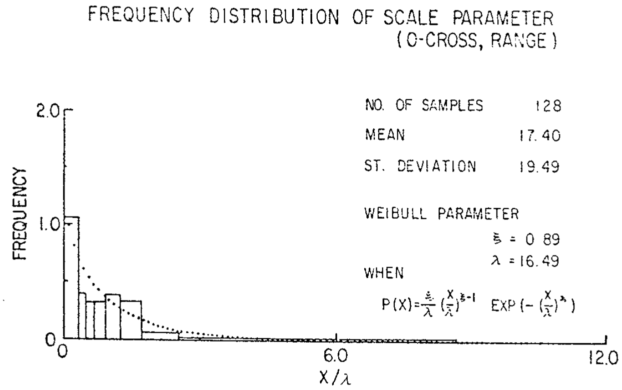


Fig. 2(b) Frequency distribution of Weibull scale parameter

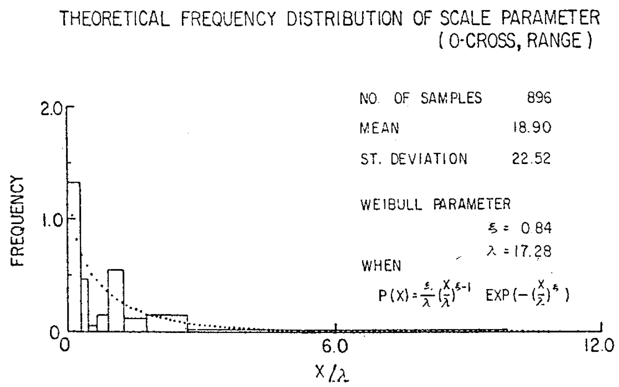


Fig. 3 Frequency distribution of Weibull scale parameter (calculated distribution based on Hogben Lamb's table)

要な意味を持っており，作用応力を確率論的に特徴づける分布ということができる。Fig. 3 は Fig. 2(b) に対応して数値計算上求められた分布である。つまり，実験船の航路である日本～ペルシヤ湾間の波浪の発生頻度を参考文献 5) に示す方法によって求め，次に各波浪状態における船体縦曲げ応力の標本関数から，応力変動範囲の短期分布を求め，そのときの scale parameter を，波浪の発生頻度により加重平均することによって求めたものである。このような数値計算を行うと，波浪発生頻度テーブルの分割の粗さのため Fig. 3 にみるように，分布形状にかなりのバラツキが現われる。Fig. 2(b) と Fig. 3 を比較すると，数値解析で得られた分布は実験値に定性的定量的に非常によく一致していることが判る。

(b) 時間分布

強度解析などに必要な確率分布は (a) に述べた短期分布ではなく，予め定められた時間間隔を対象にその時間間隔内での確率分布であり，一般にいくつかの短期分布の累積分布と考えられる。

現状ではこの時間分布を近似するものとして次に述べる周辺分布を考えるのが普通である[2)]。

$$p_m(x)=\iiint p_c(x|\bar{T},h_s,\chi)p(\bar{T},h_s)\cdot p(\chi)\times d\bar{T}\,dh_s\,d\chi \quad (3)$$

しかしながら，(3)式の周辺分布は，いわば時間分布に関する平均値的な分布であって 20 年間などといった非常に長い時間間隔の場合には精度よく実際を表わすと考えられるが，例えば 10 日間といった比較的短い時間間隔を対象とする場合にはあまり有用とはいえない。このような短い時間間隔内での確率分布は，(3)式のような画一的な分布で表わされるのではなく確率分布そのものが一つの確率パターンを構成すると解すべきであろう。

ところでこの時間分布を現状において求めるには必要な情報がかなり不足しているものと思われる。そこでここでは以下に述べる仮定条件の基に時間分布について考察を行う。

(i) 一つの定常確率過程の継続時間を一定とする。したがって対象とする時間間隔が与えられれば，その時間間隔に累積される短期分布の数 $N_s$ が求められるものとする。

(ii) 一つの定常確率過程に対応する短期分布は Weibull 分布によって表わすことができ，その shape parameter $\xi$ は確率論的に一定と考え，scale parameter $\boldsymbol{\lambda}$ は，確率変数と考え一つの Weibull 分布(shape parameter $\eta$, scale parameter $\tau$) に従うものとする。このとき，短期分布に対応する確率変数 $X_i$ について次式が得られる。

$$\overline{X_i}=\lambda_i\Gamma_1,\quad \overline{X_i^2}=\lambda_i^2\Gamma_2 \quad (4)$$

ここに，

$$\Gamma_1=\Gamma\left(1+\frac{1}{\xi}\right),\quad \Gamma_2=\Gamma\left(1+\frac{2}{\xi}\right),\quad \Gamma:\text{Gamma 関数} \quad (5)$$

(4) 式の $\lambda_i$ は仮定のごとく確率変数であって，次式が求められる。

$$\overline{\lambda_i}=\tau\Gamma_1',\quad \overline{\lambda_i^2}=\tau^2\Gamma_2' \quad (6)$$

ここに，

$$\Gamma_1'=\Gamma\left(1+\frac{1}{\eta}\right),\quad \Gamma_2'=\Gamma\left(1+\frac{2}{\eta}\right) \quad (7)$$

今 $N_s$ 個の短期分布が累積されたとすると，累積分布に対応する確率変数 $Y$ は次式で表わされる。

$$Y=\frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s}X_i \tag{8}$$

したがって，確率変数 $Y$ の平均 $\bar{Y}$ は（4）式より次のように求められる。

$$\bar{Y}=\frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s}\bar{X}_i=\frac{\Gamma_1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s}\lambda_i \tag{9}$$

（9）式より，平均値 $\bar{Y}$ そのものが，確率変数 $\lambda_i$ の関数で表わされる確率変数で，その平均 $E(\bar{Y})$，分散 $V(\bar{Y})$ は（4），（6）式より次のように求められる。

$$E(\bar{Y})=\frac{\Gamma_1}{N}\sum_{i=1}\bar{\lambda}_i=\tau\Gamma_1\Gamma_1' \tag{10}$$

$$\begin{aligned}V(\bar{Y})&=E[\{\bar{Y}-E(\bar{Y})\}^2]\\&=E(\bar{Y}^2)-\{E(\bar{Y})\}^2\\&=\frac{\Gamma_1^2}{N^2}E\left[\left\{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right\}^2\right]-\tau^2\Gamma_1^2\Gamma_1'^2\end{aligned} \tag{11}$$

（11）式の右辺第1項の計算に当って，確率変数 $\lambda_i$ 間の統計学的独立を考えると

$$\overline{\lambda_i\lambda_j}=\bar{\lambda}_i\cdot\bar{\lambda}_j=\tau^2\Gamma_1'^2 \quad i\neq j \tag{12}$$

（11）式において（12）式を考慮すると

$$\begin{aligned}V(\bar{Y})&=\frac{\Gamma_1^2}{N_s^2}\{N_s\tau^2\Gamma_2'+N_s(N_s-1)\tau^2\Gamma_1^2\}\\&\quad-\tau^2\Gamma_1^2\Gamma_1'^2\\&=\frac{\tau^2}{N_s}\Gamma_1^2(\Gamma_2'-\Gamma_1'^2)\end{aligned} \tag{13}$$

次に確率変数 $Y$ の分散 $s_Y^2$ を求めると

$$s_Y^2=\frac{1}{N_s}E\{X_i-\bar{Y})^2\}=\frac{1}{N_s}\sum E(X_i^2)-\bar{Y}^2$$

（4）式および，（9）式を代入して，

$$s_Y^2=\frac{\Gamma_2}{N_s}\sum\lambda_i^2-\frac{\Gamma_1^2}{N_s^2}(\sum\lambda_i)^2 \tag{14}$$

（14）式より，分散 $s_Y^2$ は確率変数 $\lambda_i$ の関数として与えられることが判るが，その平均を求めると（12）式を考慮して次のように求められる。

$$\overline{s_Y^2}=\left(\Gamma_2\Gamma_2'-\frac{N_s-1}{N_s}\Gamma_1^2\Gamma_1'^2-\frac{\Gamma_1^2}{N_s}\Gamma_2'\right)\tau^2 \tag{15}$$

以上時間分布の平均および分散について考察を行ったが，Fig. 4 は実際実験で計測された，短期分布から無作為に 10 個取り出し，その累積分布を求め，分布の平均 $\bar{Y}$ の確率分布を示したものである。Fig. 2（b）より，（6），（7）式の $\eta,\tau$ を求めると，$\eta=0.89$，$\tau=16.4$ であることが判る。また短期分布の shape parameter $\xi$ を 2 とすれば，短期分布 10 ケースの累積分布においてその平均および分散は（10），（13）式より次のように求められる。

$$E(\bar{Y})=15.4,\quad V(\bar{Y})=29.5,\quad \sqrt{V(\bar{Y})}=5.43$$

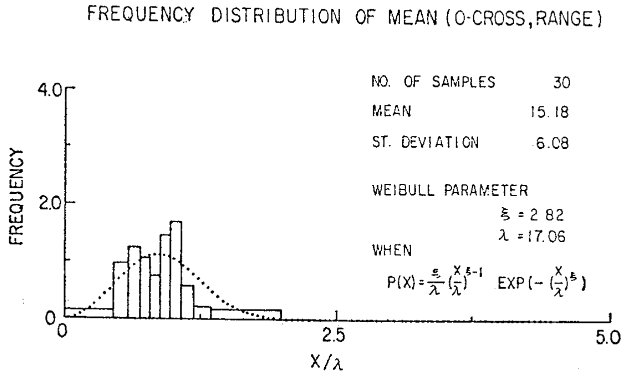


Fig. 4 Distribution about means of multi-ergodic distribution

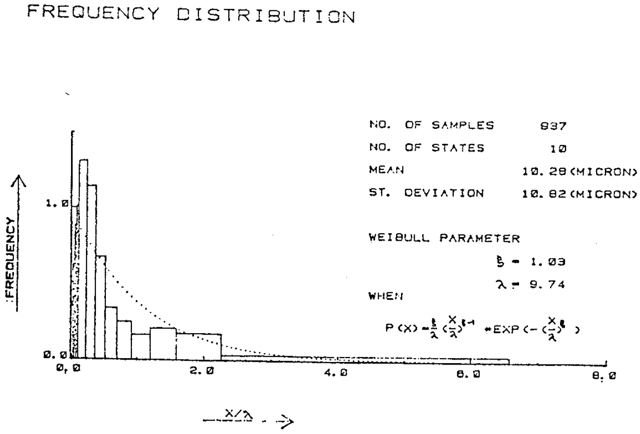


Fig. 5 An example of multi-ergodic distribution

この値を Fig. 4 で得られた値を比較すると（10）式，（14）式は実際をかなりよく説明しているものと思われる。

次に時間分布の分布形状について考察すると，Fig. 5 は 10 ケースの短期分布を累積した場合の分布形状の例を示す。図にみるごとく，この場合には，指数分布に近い分布形状を有していることが判るが，図に示すごとく，時間分布についても Weibull 分布による近似が成立することがうかがわれる。

Fig. 6 は時間分布を Weibull 分布で近似した場合に，そのパラメータが，どのような値になるかを実験結果から求めたものである。図において，横軸は累積された短期分布の数を示す。Fig. 6（a）によれば，shape parameter $\xi$ は短期の場合は 2 を中心としてばらつくのに反し，例えば 10 ケース累積した場合には著しく減少し，1 を中心にばらつき，分布形状が指数分布に近くなることを示しているが，この程度の累積では画一的な分布を与えるのは難しく確率分布そのものを確率論的に取り扱う必要があることを示している。

Fig. 6 では shape parameter，scale parameter とも累積個数が増加するに従い一定の値に収束しておりこの時の分布は前記の周辺分布に対応するものと考えられる。Fig. 7 は，今回計測された全ケースについて累積

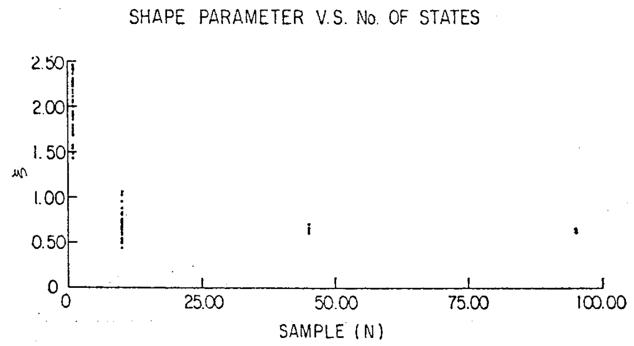


Fig. 6(a) Weibull shape parameters v.s. number of cumulated states

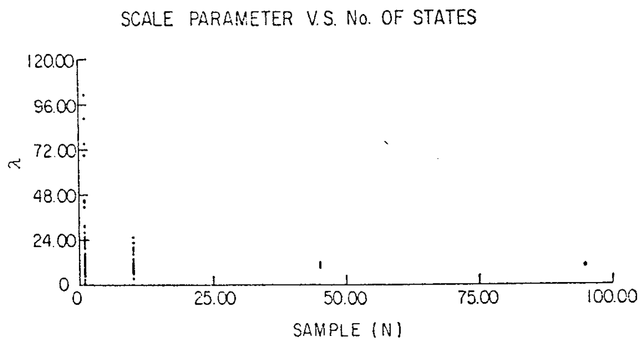


Fig. 6(b) Weibull scale parameter v.s. number of cumulated states

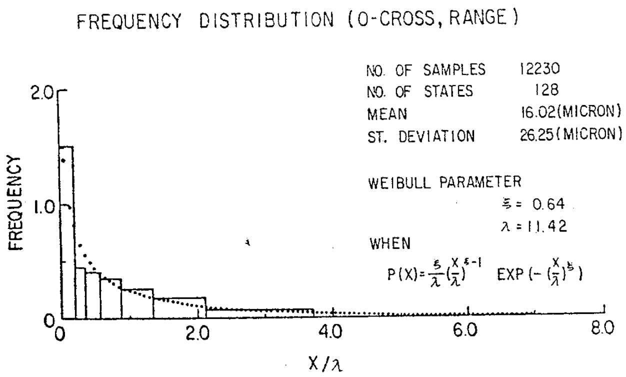


Fig. 7 Marginal distribution

した場合の分布を示している。

(10) 式 (15) 式より，$N_s$ が無限に大きくなった場合の変動係数 $v$ を求めると次のような値となる。

$$v=\frac{\sqrt{\bar{s}_Y{}^2}}{E(\bar{Y})}=\frac{(\Gamma_2\Gamma_2'-\Gamma_1{}^2\Gamma_1'^2)^{1/2}}{\Gamma_1\Gamma'}=1.37 \quad (16)$$

一方この周辺分布を Weibull 分布で表わす場合，その変動係数は，Weibull 分布の shape parameter $\xi'$ の関数として次のように与えられる。

$$v=\frac{\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\xi'}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{\xi'}\right)^2\right\}^{1/2}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\xi'}\right)}=1.37 \quad (17)$$

(17) 式を $\xi'$ について解くと，$\xi'\fallingdotseq 0.7$ となり，Fig. 7 で得られた値に近い値となる。

## 3 疲労強度確率パターン

(a) 前提条件

疲労強度の確率パターンを与えるに先立ち，その基となった前提条件について述べる[6)7)]。

(1) 応力変動範囲の確率分布

2章の結果によれば，疲労強度の場合に対象となる20年間という比較的長い時間間隔に対する応力変動範囲の確率分布は指数分布に近い分布を構成することを示した。ここではもうすこし分布形状に自由度を持たせ，Weibull 分布によって，確率分布を示すことにする[8)10)]。即ち

$$p(x)=\frac{\xi}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\xi-1}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\xi}\right\} \quad (18)$$

ここに $x$：応力変動範囲

(2) $S$-$N$ 関係式

$S$-$N$ 関係式として，次式が与えられるものとする。

$$N=\frac{K}{x^m} \quad (19)$$

ここに $K, m$ は材料定数，$N$：応力繰返し数

実際には応力変動範囲の全ての領域について (19) 式によって画一的に $S$-$N$ 関係を表わすのは若干無理が，あるが，この点については後述する。

(3) 疲労被害則

ランダムな外力下において，疲労被害をどのように評価するかについては未だはっきりした結論を得ていないのが現状と考えるが，ここでは通常よく用いられている Miner 則を用いるものとする。即ち

$$D=\sum_i\frac{n(x_i)}{N(x_i)} \quad (20)$$

ここに $N(x_i)$ は，応力変動範囲 $x_i$ が，繰り返し与えられる場合に疲労亀裂が発生すると考えられる繰返し数，$n(x_i)$ は応力変動範囲 $x_i$ が実際に繰り返される回数。

(b) 疲労強度確率パターン

(1) 1サイクル当りの疲労被害 $\boldsymbol{D_1}$

先ず最初に，荷重サイクルが一度与えられた場合の疲労被害の増分を $\boldsymbol{D_1}$ として，その確率論的特質を考える。(20)式の Miner 則より $\boldsymbol{D_1}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{D_1}=\frac{1}{\boldsymbol{N}} \quad (21)$$

(19) 式を代入すると，

$$\boldsymbol{D_1}=\frac{\boldsymbol{X}^m}{K} \quad (22)$$

(22) 式において応力変動範囲は (18) 式に従う確率変数であるので $\boldsymbol{X}$ て表示することにする。(22) 式おいて確率変数 $\boldsymbol{D_1}$ の平均を求めると，(18) 式を考慮して，

$$\overline{\boldsymbol{D_1}}=E(D_1)=\frac{1}{K}\int_0^\infty x^m p(x)dx$$

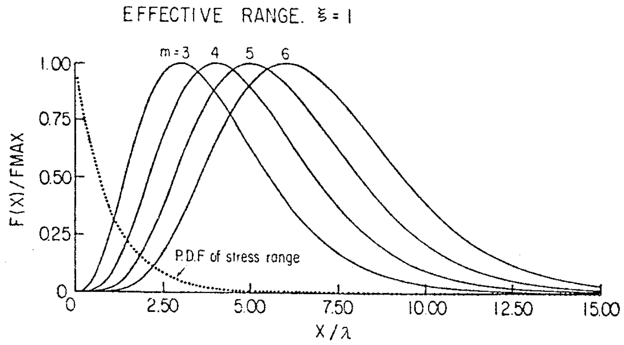


Fig. 8　Effective stress range for fatigue damage

$$=\frac{m}{K}\cdot\lambda^{m-1}\int_0^{\infty}f(x)dx \tag{23}$$

ここに

$$f(x)=\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{m+\xi-1}\cdot\exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\xi}\right\} \tag{24}$$

(24)式の $f(x)$ は，ランダム荷重下における疲労被害を考える上において非常に重要な意味を持っている。Fig. 8 は応力変動範囲の shape parameter を1と考え，種々の $m$ の値によって $f(x)$ がどのような分布形状を有するかを見てみたものである。

図にみるごとく，$f(x)$ は最大値を有し，その時の応力値 $x_p$ を求めると，

$$x_p=\beta^{1/\xi}\cdot\lambda,\quad \beta=(m+\xi-1)/\xi \tag{25}$$

またその時の最大値は，

$$f(x_p)=\beta^{\beta}\cdot e^{-\beta} \tag{26}$$

(23)式から判るように疲労被害は $f(x)$ を積分することによって与えられることを考えると，$x_p$ は疲労被害に最も効果的な応力変動範囲と解することができる。また Fig. 8 より，材料定数 $m$ により分布の幅が異なり，例えば $m=5$ の場合には $0.5\lambda$ から $12\lambda$ の間に分布しており，この範囲外の応力変動範囲はほとんど疲労被害に寄与しないことが判る。このことは(19)式の $S$-$N$ 関係式を求めるに際し，$x_p$ を中心に $0.5\lambda$ から $12\lambda$ までを精度よく近似する関係式を与える必要があることを示す。

次に確率変数 $\boldsymbol{D}_1$ の確率分布を求める。

$$P(\boldsymbol{D}_1>d_1)=P\{\boldsymbol{X}>(Kd_1)^{1/m}\} \tag{27}$$

であることを考えると(27)式右辺は，(18)式より次のように求めることができる。

$$P(\boldsymbol{D}_1>d_1)=\int_{(Kd_1)^{1/m}}^{\infty}p(x)dx$$

$$=1-\exp\left\{-\frac{(Kd_1)^{\xi/m}}{\lambda^m}\right\} \tag{28}$$

(28)式において

$$\xi'=\frac{\xi}{m},\quad \lambda'=\frac{\lambda^m}{K} \tag{29}$$

とすれば，

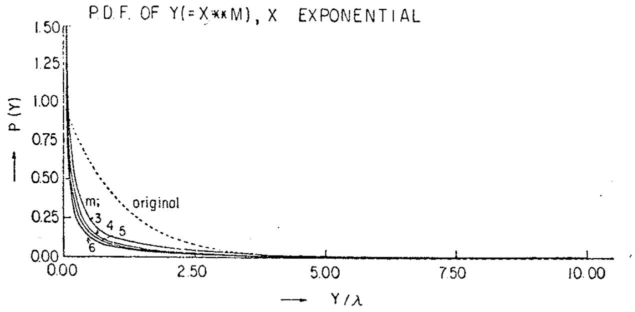


Fig. 9　Probability distribution of percycle fatigue damage

$$P(\boldsymbol{D}_1>d_1)=1-\exp\left\{-\left(\frac{d_1}{\lambda'}\right)^{\xi'}\right\} \tag{30}$$

(30)式は $\boldsymbol{D}_1$ は(29)式に示す2つのパラメータを有する Weibull 分布に従うことを示している。このとき，$\boldsymbol{D}_1$ の平均 $\bar{d}_1$ および分散 $s_{d_1}{}^2$ は次のように求めることができる。

$$\left.\begin{aligned}\bar{d}_1&=\lambda'\Gamma\left(\frac{1}{\xi'}+1\right),\\ s_{d_1}{}^2&=\lambda'^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\xi'}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\xi'}+1\right)^2\right\}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Fig. 9 は $\boldsymbol{D}_1$ の確率分布がどのような分布になるかを示したものであるが，図より，非常に変動幅の大きい分布であることが判る。

（2） $n_0$ サイクル後の疲労被害 $\boldsymbol{D}$

応力変動の総繰返し数を $n_0$ とすると，$n_0$ サイクル後の被害度 $\boldsymbol{D}$ は次式で表わすことができる。

$$\boldsymbol{D}=\sum_i^{n_0}\boldsymbol{D}_{1,i} \tag{32}$$

ここに $\boldsymbol{D}_{1,i}$ は (31) 式に示す平均，分散を持った Weibull 確率変数である。確率変数 $\boldsymbol{D}_{1,i}$ は互いに統計学上の独立を満足すると考えられるので，(32) 式の $\boldsymbol{D}$ の平均 $\bar{d}$ および分散 $s_d{}^2$ は次式によって求めることができる。

$$\left.\begin{aligned}\bar{d}&=\sum\bar{D}_{1,i}=n_0\bar{d}_1=n_0\lambda'\Gamma\left(\frac{1}{\xi'}+1\right)\\ s_d{}^2&=\sum(\boldsymbol{D}_{1,i}-\boldsymbol{d}_1)^2=n_0 s_{d_1}{}^2\\ &=n_0\lambda'^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\xi'}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\xi'}+1\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

ところで，確率変数 $\boldsymbol{D}$ がどのような確率分布になるかを理論的に求めるにはかなり複雑な計算を要する。Fig. 10 は数値実験により，$\boldsymbol{D}$ のサンプルを計算し，その分布をみたものであるが，図の場合，正規分布によりその分布を近似できることを示しているが，一般的にいって確率変数の和は加算する変数の数が十分に大きければ中心極限定理により正規分布に近づくといわれている。疲労被害度の場合それを構成する確率変数 $\boldsymbol{D}_1$ が非常に大きな変動係数を持っているため，正規分布で近似できるのはかなり大きな $n_0$ を有する場合に限られる。

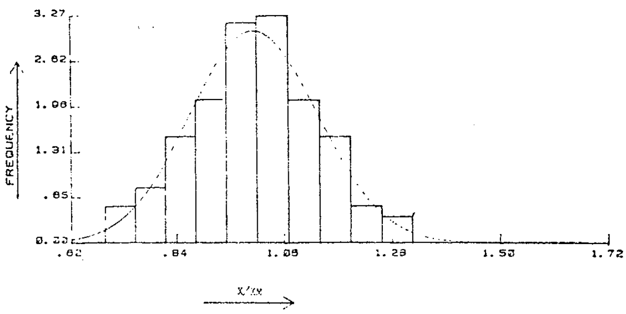


Fig. 10　A result of numerical experiment as to fatigue damage

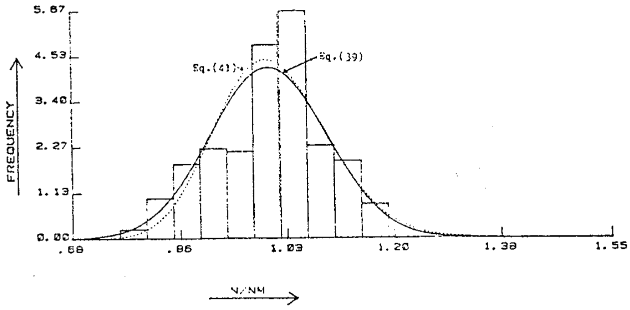


Fig. 11　A result of numerical experiment as to fatigue life

即ち $n_0$ が十分大きい場合には，$\boldsymbol{D}$ の確率分布を次のように与えることができる。

$$p(\boldsymbol{D})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_d}\exp\left\{\frac{(d-\bar{d})^2}{2s_d{}^2}\right\} \tag{34}$$

（3）　疲労寿命の確率パターン

ここでは，疲労被害度 $\boldsymbol{D}$ がある一定値 $d_0$ に達するまでの繰返し数 $\boldsymbol{N}$ を確率変数として取り扱う。(34)式より

$$P\{d_0<D<d_0+d(d)\,|\,\boldsymbol{N}=n_0\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_d}\exp\left\{-\frac{(d-\bar{d})^2}{2s_d{}^2}\right\}d(d) \tag{35}$$

しかるに(20)式の Miner 則より次式をうる。

$$d(d)=\frac{X^m}{K}dn \tag{36}$$

(36)式を(35)式に代入すれば，

$$P\{n_0<N<n_0+dn\,|\,D=d_0\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{s_d}\exp\left\{-\frac{(d-\bar{d})^2}{2s_d{}^2}\right\}\frac{X^m}{K}dn$$

確率変数 $X$ についての周辺分布を求めると，

$$p(N)dn=\frac{\bar{d}_1}{\sqrt{2\pi}\,s_d}\exp\left\{-\frac{(d_0-\bar{d})^2}{2s_{d_1}}\right\}dn \tag{37}$$

(37)式の $s_d{}^2, \bar{d}$ に(33)式を代入し，$n_0$ を $n$ とすれば，

$$p(N)dn=\frac{\bar{d}_1}{\sqrt{2\pi n}}\frac{1}{s_{d_1}}\exp\{-f(n)\}dn \tag{39}$$

ここに

$$f(n)=\frac{(n\bar{d}_1-d_0)^2}{2ns_{d_1}{}^2} \tag{40}$$

(39)式は疲労寿命 $N$ の確率分布を表わすが，若干複雑な形をしているので簡略化を試みる。

(40)式において，$f(n)$ を $n=\dfrac{d_0}{\bar{d}_1}$ のまわりに Taylor 展開すると，第1項，第2項は0となり $f(n)$ は次のように近似できる。

$$f(n)\fallingdotseq\left(\frac{1}{2s_{d_1}{}^2}\cdot\frac{\bar{d}_1{}^3}{d_0{}^3}\right)\cdot\left(n-\frac{d_0}{\bar{d}_1}\right)^2 \tag{41}$$

(41)式を(39)式に代入し，$n\fallingdotseq\dfrac{d_0}{\bar{d}_1}$ を考慮すると，(39)式は次に示す正規分布で近似できることが判る。

$$p(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s_N}\exp\left\{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2s_N{}^2}\right\} \tag{42}$$

ここに，

$$\left\{\begin{aligned}\bar{n}&=\frac{d_0}{\bar{d}_1}=\frac{d_0}{\lambda'\Gamma\left(\frac{1}{\xi'}+1\right)}\\ s_{Nf}^2&=s_{d_1}{}^2\cdot\frac{d_0{}^3}{\bar{d}_1{}^3}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\xi'}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\xi'}+1\right)}{\lambda'\Gamma\left(\frac{1}{\xi'}+1\right)^3}\cdot d_0{}^3\end{aligned}\right. \tag{43}$$

Fig. 11 は数値実験により，疲労寿命のサンプルを求め，その頻度分布を(39)式，(42)式の分布と比較したものである。

## 4　考　　察

3章において疲労強度における確率パターンについて考察したが，確率パターンはかなり多くのパラメータによって構成された。そこで，本章では船構造の疲労強度を念頭にもうすこし具体的な数値的考察を行うことにする。考察に当って次の条件を前提とする。

（i）　応力変動範囲の確率分布は2章に述べたが，ここでは最も一般的に使用される指数分布を考えるものとする。

（ii）　船の寿命を 20 年と考え，寿命期間における応力変動の繰返し数を $10^8$ 回とする。

（iii）　解析のベースとなる $S$-$N$ 関係式は SR-200 において提示された歪制御丸棒試験による実験データに基づくものとする。

先ず $S$-$N$ 関係式について述べると，Fig. 12 に示すごとく，実験点は下に凸な曲線に沿って分布している。通常このような傾向を評価に反映させるためにいわゆる疲労限を考え直線の傾きを一定の応力変動範囲を境に変化させる方法がとられるが，Fig. 12 のごとく，連続な曲線で近似する方がより合理的と思われる。

さて，(19)式による $S$-$N$ 関係式は Fig. 12 に示すように，$S$-$N$ 曲線を一つの直線で近似することになるが，どのような直線で近似すれば最も合理的かという問題が生じる。Fig. 8 によれば，疲労被害に最も影響を与える応力変動範囲は(25)式に示す $x_p$ であるので，$x_p$ 近傍

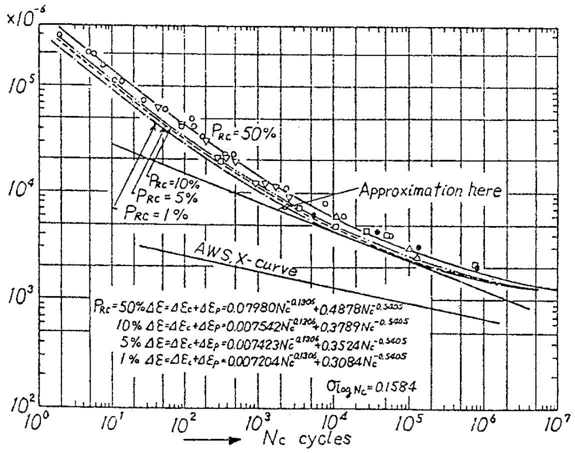


Fig. 12 $S$-$N$ curve obtained by strain controlled fatigue tests

において，最も精度よく実際を表わす $S$-$N$ 関係式が望ましい。しかるに，$x_p$ は，材料定数 $m$ および応力変動範囲の関数となっており，サイクル数 $10^8$ において疲労被害 $\boldsymbol{D}$ が1になること前提に $x_p$ を定め最も合理的な $S$-$N$ 関係式を求めるには何回かの繰返し計算を要する。Table 1 にその結果をまとめた。表より以下のことが判る。

（i） 20 年に一度の最大応力範囲期待値が 80 kg/mm²～95 kg/mm² である場合に亀裂発生が予想される。

（ii） このとき，疲労に最も影響を与える応力範囲は 26 kg/mm² 近傍であることが判る。

（iii） $S$-$N$ 関係式の指数 $m$ は 5.8 程度となり，通常の codes に示される値よりは若干大きめの値となる。仮に $m≒6$ と考え Fig. 8 を参照すると疲労被害度に影響を与える変動範囲は $X/\lambda$ が，1から 15 の間であることが読みとれ，1% 確率の場合を例にとると 4.4 kg/mm²～66 kg/mm² の応力範囲（歪範囲でいうと 200 $\mu$～3000 $\mu$）が被害度に影響を与え，この範囲外の応力範囲は被害度に影響を与えない。したがって疲労実験データとしては上記範囲におけるデータが重要であることを示している。

（iv） 実験データのばらつきは結果にそれほど影響を与えない。つまり，1%確率に対応した実験から得られた結果は 50% 確率に対応した実験式から得られた結果

Table 1 Allowable stress in terms of fatigue strength

| prob. level | A1 *1 | A2 *1 | B1 *1 | B2 *1 | contact to S-N curve N *2 | contact to S-N curve $\Delta\sigma_p$ *3 | m *4 | K *4 | $\lambda$ *5 | $\Delta\sigma_{max}$ *6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 % | 151 | 6480 | −0.131 | −0.541 | $1.89\times10^6$ | 25.6 kg/mm² | 5.79 | $2.64\times10^{14}$ | 4.42 kg/mm² | 81.4 kg/mm² |
| 5 % | 156 | 7400 | −0.131 | −0.541 | $1.98\times10^6$ | 26.2 〃 | 5.68 | $2.36\times10^{14}$ | 4.61 〃 | 84.9 〃 |
| 10 % | 158 | 7956 | −0.131 | −0.541 | $2.08\times10^6$ | 26.6 〃 | 5.63 | $2.25\times10^{14}$ | 4.71 〃 | 86.8 〃 |
| 50 % | 168 | 10240 | −0.131 | −0.541 | $2.55\times10^6$ | 28.0 〃 | 5.48 | $2.16\times10^{14}$ | 5.12 〃 | 94.3 〃 |

*1 material constants as to S-N curves when the S-N curve in approximated by the following for wnla, $\Delta\sigma = A1N^{B1} + A2N^{B2}$

*2 no of cycles corresponding to the most effective stress range $\Delta\sigma_p$

*3 most effective stress range

*4 material constants as to the S-N relation $N=\frac{K}{\Delta\sigma^m}$

*5 limiting scale parameter of the exponential distribution

*6 limiting maximum expectation of stress range conesponding to the probability $10^{-8}$

Table 2 Statistics about fatigue strength

| reliability level *1 | $\xi'$ *2 | $\lambda'$ *2 | Per cycle damage $\bar{d}_1$ | Per cycle damage $Sd_1^2$ | Per cycle damage $Vd$ *3 | $10^8$ cycles damage $\bar{d}$ | $10^8$ cycles damage $Sd^2$ | $10^8$ cycles damage $Vd$ *3 | fatigue life when D=1 $\bar{N}$ | fatigue life when D=1 $S_N^2$ | fatigue life when D=1 $V_N$ *3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 % | 0.173 | $2.07\times10^{-11}$ | $1.0\times10^{-8}$ | $7.16\times10^{-14}$ | 26.7 | 1.0 | $7.16\times10^{-6}$ | $2.67\times10^{-2}$ | $10^8$ | $7.16\times10^{10}$ | $2.67\times10^{-2}$ |
| 5 % | 0.176 | $2.49\times10^{-11}$ | 〃 | $5.99\times10^{-14}$ | 24.5 | 〃 | $5.99\times10^{-6}$ | $2.45\times10^{-2}$ | 〃 | $5.99\times10^{10}$ | $2.45\times10^{-2}$ |
| 10 % | 0.178 | $2.73\times10^{-11}$ | 〃 | $5.63\times10^{-14}$ | 23.7 | 〃 | $5.63\times10^{-6}$ | $2.37\times10^{-2}$ | 〃 | $5.63\times10^{10}$ | $2.37\times10^{-2}$ |
| 50 % | 0.182 | $3.57\times10^{-11}$ | 〃 | $4.61\times10^{-14}$ | 21.5 | 〃 | $4.61\times10^{-6}$ | $2.15\times10^{-2}$ | 〃 | $4.61\times10^{10}$ | $2.15\times10^{-2}$ |

*1 reliability level as to S-N relation

*2 Weiball shape parameter and scale parameter of stochastic variable $D_1$

*3 coefficient of variation = (standard deviation)/(mean)

Table 3 Fatigue strength obtained by *S-N* relation recommended by the codes

| Class | K | m | $\sigma_0$ *1 (kg/mm²) | $K'$, *2 $(=K\sigma_0^{m'-m})$ | $m'$ *2 | fatigue damage D *3 | $\Delta\sigma_{max}^{cr}$ *4 (kg/mm²) | fatigue damage D' *5 | $\Delta\sigma_{max}^{cr}$ *6 (kg/mm²) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BS-E | $6.73\times10^{8}$ | 3 | 4.08 | $1.12\times10^{10}$ | 5 | $8.92\times10^{-1}f^{3}$ *7 | 19.1 | $1.49\times10^{-1}f^{3}\Gamma(4,\frac{4.08}{f})$ $+8.93\times10^{-3}f^{5}\,\Gamma(6)-\Gamma(6,\frac{4.08}{f})$ | 21 |
| BS-F | $1.10\times10^{9}$ | 3 | 4.80 | $2.53\times10^{10}$ | 5 | $5.45\times10^{-1}f^{3}$ | 22.5 | $9.09\times10^{-2}f^{3}\Gamma(4,\frac{4.80}{f})$ $+3.95\times10^{-3}f^{5}\,\Gamma(6)-\Gamma(6,\frac{4.80}{f})$ | 25 |
| BS-D | $1.61\times10^{9}$ | 3 | 5.41 | $4.71\times10^{10}$ | 5 | $3.73\times10^{-1}f^{3}$ | 25.6 | $6.21\times10^{-2}f^{3}\,\Gamma(4,\frac{5.41}{f})$ $+2.12\times10^{-3}f^{5}\,\Gamma(6)-\Gamma(6,\frac{5.41}{f})$ | 28 |
| BS-B | $1.09\times10^{11}$ | 4 | 10.2 | $1.13\times10^{13}$ | 6 | $2.20\times10^{-2}f^{3}$ | 47.8 | $9.17\times10^{-4}f^{4}\Gamma(5,\frac{10.2}{f})$ $+8.85\ 10\ f\ \ \Gamma(7)-\Gamma(7,\frac{10.2}{f})$ | 50 |
| AWS-X | $4.07\times10^{10}$ | 4.3 | 10.1 | $1.89\times10^{14}$ | 7.95 | $9.35\times10^{-2}f^{4.3}$ | 31.9 | $2.46\times10^{-3}f^{4.3}\Gamma(5.3,\frac{10.1}{f})$ $5.29\times10^{-7}f^{7.45}\,\Gamma(8.75)-\Gamma(8.75,\frac{10.1}{f})$ | 35 |
| present report | $2.64\times10^{14}$ | 5.79 | — | — | — | $1.83\times10^{-4}f^{5.79}$ | 81.4 | —— | — |

*1 limiting stress range below which effect of low stress range appears
*2 material constants for the stress range below $\sigma_0$
*3 fatigue damage without consideration about low stress range
*4 critical maximum stress range for 20 years without consideration about low stress range
*5 fatigue damage with consideration about low stress range
*6 critical maximum stress range for 20 years with consideration about low stress range
*7 $f(=\Delta\sigma_{max}/8\ln10)$ scale parameter of marginal distribution of stress range

の 15% 弱減であるにすぎない。

次に Table 1 に得られた値を基に3章で与えた各統計量を求め Table 2 に示す。表より疲労被害 $\boldsymbol{D}$, 疲労寿命 $\boldsymbol{N}$ とも，その平均に対して分散の値は非常に小さく，かなり低い確率レベルを考えてもその変動は1%程度にすぎない。したがって 20 年といった長期の場合，被害度，寿命はほとんど，決定論的に取り扱えることを示している。

最後に本報に得られた結果を AWS, BS において与えられた方法と比較し，その結果を Table 3 に示した。表より次のことが判る。

(i) このような疲労強度評価に当って，最も注意すべき点は評価に当って応力（範囲）をどの程度の精度で求めるかという点にあるものと思われる。

(ii) BS の場合，構造要素別に *S-N* 関係式を与えており，表のクラス D, E, F はいずれも主として突合せ継手に対するもので仕上げ精度に従い各々を使いわけることになっている。class B は平滑母材に対応している。BS の場合，応力計算の方法については特に規定がなく，評価の対象となる応力はいわゆる公称応力と考えられ，梁計算で得られる程度の応力値に対応している。

(iii) AWS の場合も BS の場合と同様，構造要素別に *S-N* 関係式を与えているが，特徴的なのは，これら要素別の線図と同列に一つの *S-N* 関係式 (X-curve) を与えており，これに対応する応力として hot spot stress なるカテゴリーを与えている。hot spot stress は該部の応力計算において溶接止端などミクロの応力集中を除いた精密応力計算値と解せられる。通常溶接止端におけるミクロの応力集中率が，2～4程度であることを考えると，AWS X-curve による評価値と本報告による評価値はよい一致をみせる。

(iv) 低応力範囲で *S-N* 関係式の傾きを補正することの影響はここで考えているような条件下では比較的小さく脚注3および6に対応する夫々の応力範囲を比較すると高々 10% 程度の影響であることが判る。

## 5 結 言

波浪外力のランダム性に由来する疲労強度の確率論的特質について検討するために，先ず実船実験結果より波浪外力下の作用応力の確率パターンを求めた。次に作用応力の確率論的特質を考慮し，疲労被害度，疲労寿命の確率パターンを求めた。最後に船構造を対象に疲労強度を数値的に検討し，*S-N* 関係式の求め方，疲労強度上の許容応力などについて検討した。

## 参 考 文 献


1) 小西，他：不規則現象と安全性，J. S. S. C. Vol. 11, No. 110, No. 111 (1975).
2) J. Fukuda : Long-term prediction of wave bending moment, selected papers from J. S. N. A. Vol. 5 (1968).
3) V. V. Bolotin : Statistical method in structural mechanics, Holder Day (1969).
4) E. J. Gumbel : Statistics of Extreme, 広川書店 (1962).
5) 永元，他：波浪中における船速低下と波浪外力について，西部学会誌，46号 (1972).
6) J. H. Vught, et al.: Probabilistic fatigue analysis of fixed offshore structure, O. T. C. OTC-2606 (1976).
7) K. B. Nolte, et al.: Closed form expression for determining the fatigue damage of structure due to wave, O. T. C. OTC-2606 (1976).
8) T. Hori, et al.: Stress behaviour of LNG ship tank, Sympo. "PRADS" 1977.
9) T. Hori, et al.: Statistical estimation of tank stress by total system analysis for spherical tank LNG Carrier (Phase II), Hitachi zosen tech. review, Vol. 39, No. 2 (1978).
10) 新田，他：セミメンブレン LPG 船の就行中計測，日本造船学会発表 (1981).