（昭和57年5月　日本造船学会春季講演会において講演）

細長体の非線形揚力特性について

——新しい渦面モデルの導入とその検討——

正員　松村清重*　正員　田中一朗*
正員　佐久間　俊**

Nonlinearity in Lift of Slender Bodies at Incidence

——Introduction of a New Vortex Layer Model——

by Kiyoshige Matsumura, *Member*　Ichiro Tanaka, *Member*
Shun Sakuma, *Member*

Summary

Nonlinearity in normal (lateral) force for a slender body with small incidence to flow is discussed by the asymptotic expansion method under the assumptions, $1\gg\beta\gg\varepsilon\gg1/\sqrt{R_n}$ and $(\varepsilon/\beta)^{1/2}\gg\beta$, where β is an angle of attack, ε a slenderness parameter, and R_n the Reynolds number. The theory is developed utilizing a slender body theory technique. The near field is composed of two vortex layers extending downstream infinitely in cross flow direction. Kirchhoff's dead water theory is applied to the cross flow with the inclusion of three-dimensional effect which increases the velocity between the vortex layers in a lateral section. The first term of the normal force coefficient is derived only from the near field consideration and expressed by lateral drag coefficient of the Kirchhoff's theory. The second term is derived by considering the increase of lateral flow velocity by the effect of vortex layers in the vortex field, which is a flow field existing between the near and far fields and consists of vortex layers of finite extension. The second term of the coefficient is obtained analytically by assuming the form of vortex layers and the strength of vorticity. The obtained results are compared with experimental results.

1　緒　　言

3次元剥離渦を伴う流場の解明は流体力学上で残された課題の一つであり，船舶流体力学においても抵抗，推進，操縦性の各分野でそれぞれ研究がなされてきたが，ことに操縦性分野では非線形的な横力特性を推定するうえで不可欠である。本論文は摂動論的観点からこの流場を従来とは異なる流場モデルで表わし，細長体の非線形揚力特性について論じたものである。

非線形揚力の推定法は Bollay[1] の積分方程式法が有名であるが，揚力の非線形特性は自由渦が物体背後に流出することにより生ずると考えられるから，この自由渦の取扱い方法により多くの理論が存在する。不破[2] は，細長体理論を応用した解法を提案し，近年では，渦格子法[3] といった流場をかなり厳密に表わした方法も現われるに至っている。しかしながら，これらは非粘性的な方法であり，物体側面からの自由渦層の流出は本質的には境界層の剥離現象に関係することであるから，何らかの意味で粘性流体力学的側面を持つ必要があると考えられる。特に角のない厚肉物体に対して非粘性的に計算を行う場合，あらかじめ剥離線を規定しなければならないという問題が生じる。これらの事情から Marshall & Deffenbaugh[4] は物体の各断面における横流れと2次元非定常流れとのアナロジーから，2次元非定常境界層理論を導入し，剥離線および渦の強さを決定した。しかし，以上のような理論では自由渦を離散化し渦糸として計算を行うため数値計算上困難も生じると考えられるから，解法上の別の困難を生じるにしても渦層として計算するのが望ましい。また，さらに境界層計算を行うとなると非常に複雑な計算を要しもっと簡単な解法が望まれる。

Allen & Parkins[5] は渦層や境界層を省略し，揚力の非線形影響を各断面での横流れによる抵抗係数を用いて表現した。このような断面固有の係数があるとすれば，

* 大阪大学工学部
** 三井海洋開発(株)(研究当時　大阪大学工学部在学)

船体のような場合にもデータの蓄積があれば可能であり実際上便利であると考えられる。ただ，純粋の2次元物体の場合には物体背後では総圧損失を伴う流れになっているのに対し，3次元物体では風下側でも長手方向の流速は0でないばかりか，むしろ一様流より増速しており総圧損失はほとんどないものと考えられるから，2次元物体の抵抗係数を用いることには疑問の余地がある。しかし断面固有の係数，あるいは断面固有の流れといった着想は Prandtl の揚力線理論[6]においても見られるものであり，その成功を見れば十分に高めてゆく価値があると考えられる。また従来の方法の基礎は線形理論にあり，この延長上で非線形性が考えられているが，船体のような細長体の場合には相対迎え角（迎え角/細長比）が比較的大きく非線形影響を受けやすいことを考えると，非線形特性が第0近似に現われるような理論が望まれる。

ところが，細長翼の理論においても，すなわち，揚力の発生原因があくまでも非粘性的な圧力低下にあると考えた場合にも細長比と迎え角について従来とは異なった仮定をすれば，断面固有の流れと呼ぶべき流れが存在し，かつ非線形揚力が第0近似に現われるように思われる。本論は，このような考えのもとに一般的な物体にも断面固有の流れとして，レイノルズ数が無限に大きい時成立する新しい渦面モデルを導入し，揚力の非線形特性について摂動論的な立場から論じたもので，不十分な部分もあるが，ここに御報告し，御批判を仰ぐ次第である。

2 Bollay の積分方程式による予備的考察

この章では，Bollay の積分方程式[1]（以後 B. I. E. と略記する）におけるパラメータの大きさに関する若干の考察を行い，パラメータが微小であるとした場合の漸近的な近似解法を考える。また，その近似解の物理的意味を明確にすることによって，本論の主題である，より厳密な摂動論的解法がいかにあるべきかを考察する。

さて，B. I. E. は Fig. 1 に示すような長方形翼に適用され，次のように表わされる[7]。

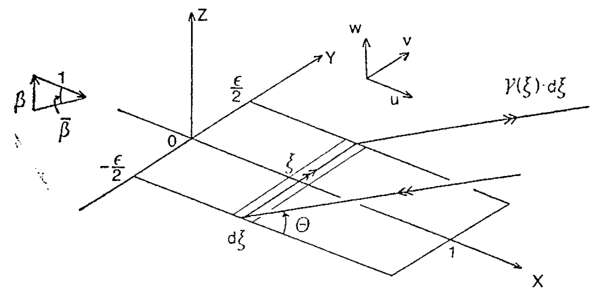

Fig. 1 Coordinate system and definitions of some basic quantities

$$\left\{\begin{aligned}&\beta=\frac{1}{2\pi}\oint_0^1\frac{1/2\cdot\varepsilon\cdot\gamma(\xi)}{(x-\xi)^2\cdot\sin^2\Theta+\varepsilon^2/4}\left[\cos\Theta+\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+\varepsilon^2/4}}{x-\xi}\right]d\xi \qquad (1)\\&\gamma(1)=0 \qquad (2)\end{aligned}\right.$$

ただし，座標系 x, y, z ならびにその方向の速度成分 u, v, w を図のようにとり，また，長さの次元は全長 l，速度の次元は x 方向無限遠流速 U_∞ を用いて無次元化を行った。ε は細長比，β は z 方向の無次元流速で迎え角 $\bar{\beta}$ と $\beta=\tan\bar{\beta}$ で関係づけられており，$\bar{\beta}$ が小さい時には β と $\bar{\beta}$ は同一視できる。また，γ は拘束渦の強さ密度を，Θ は自由渦の流出角を表わす。ξ は拘束渦の座標である。

（1）式は，ε, β の2つのパラメータによって支配されている。本来（1）式は ε が小さいという仮定の下で導出されているが，非粘性の仮定の範囲で厳密解を与えるダブレット分布法[8]と同様に第1種フレドホルム型の積分方程式であり，型が変化していないことから比較的厳密性が保たれた理論構造を有していると考えられる。従って，（1）式をダブレット分布法のように，どんな ε, β についても成立すると考えれば，ε, β の大きさに関する制限はなくなり漸近解法も多様になる。実際，$\varepsilon\ll1$ と仮定して細長体理論を構成するとしても，基本的には（i）$1\gg\varepsilon\gg\beta$，（ii）$1\gg\varepsilon$，$\beta/\varepsilon=O(1)$，（iii）$1\gg\beta\gg\varepsilon$，（iv）$1\gg\varepsilon$，$\beta=O(1)$ の4つの場合が生じるから，パラメータの大きさに関する仮定は明確にしておく必要がある。（i）[9]および（ii）の場合は従来から採用されている仮定であり，普通に細長体理論と呼ばれている。（iv）の場合は Bollay[1] 自身によって一部明らかにされており，揚力の非線形性が直接出てくる結果となっている。

ここでは（iii）の仮定を採用することによって，非線形揚力特性を考えることにする。この仮定は物理的には $x=O(1)$ の時渦面が z 方向に到達できる距離は $O(\beta)$ であり，物体の幅は $O(\varepsilon)$ であるから，$\beta\ll1$ であっても各断面で見れば渦面の長さは物体の幅に比べて十分に長いことを意味する。しかし，第0近似から第1近似に近似を高める段階においては，（iii）の仮定のみでは多様性が生じることになるため，

$$\varepsilon\ll1,\ \beta\ll1,\ \beta/\varepsilon\gg1,\ (\varepsilon/\beta)^{1/2}\gg\beta \qquad (3)$$

と仮定することによって，そのレベルの近似解でも全体が見通せるような場合を考える。

極限操作を行うに当っては $\Theta=\beta/2$ とし[7]，（1）式の積分範囲を $\xi=x$ の近傍とその前後の領域に分割し，各領域で核関数と γ を展開すれば，

$$\beta-\frac{\varepsilon}{2\beta}\log\frac{\varepsilon}{2\beta}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\beta}\gamma\right)$$
$$-\frac{1}{2\pi}\mathrm{pf}\int_0^{x/2}\frac{\varepsilon}{\beta}\cdot\frac{2/\beta\cdot\gamma(x-2\hat{\zeta})}{\hat{\zeta}^2}d\hat{\zeta}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{2/\beta\cdot\gamma(x)}{\bar{\zeta}^2+1/4}d\bar{\zeta} \qquad (4)$$

のような結果が得られる。ただし上式に現われる2つの積分記号中の積分変数は，後に述べるとおり物理的意味が明確になるように $\hat{\zeta}$ と $\bar{\zeta}$ に変換してある（Fig. 2 参照）。また pf$\int$ は発散積分の有限部分を意味する。

（4）式の漸近解法は，

$$\gamma_x(x)\equiv\frac{2}{\beta}\gamma(x)=\gamma_x^{(0)}(x)+\gamma_x^{(1)}(x)+\cdots\cdots \qquad (5)$$

と仮定し（4）式に代入する。なお，$2\gamma/\beta$ は $\Theta=\beta/2$ としているから x 軸方向の自由渦面の強さ密度の意味である。最低次の項は左辺第1項と右辺を等置することによって，

$$\beta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\gamma_x^{(0)}(x)}{\bar{\zeta}^2+1/4}d\bar{\zeta} \qquad (6)$$

より $\gamma_x^{(0)}=2\beta$ と求まる。$\gamma_x^{(0)}$ は定数となったから左辺第2項は無視され $\gamma_x^{(1)}$ は

$$-\frac{1}{2\pi}\mathrm{pf}\int_0^{x/2}\frac{\varepsilon}{\beta}\cdot\frac{\gamma_x^{(0)}(x-2\hat{\zeta})}{\hat{\zeta}^2}d\hat{\zeta}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\gamma_x^{(1)}(x)}{\bar{\zeta}^2+1/4}d\bar{\zeta} \qquad (7)$$

より $\gamma_x^{(1)}(x)=4\varepsilon/(\pi x)$ と求まる。

以上で第1近似まで解は求まったが $\gamma_x^{(1)}$ は $x=0$ で $1/x$ のように振まい，特異性が強いため垂直力を求めることはできない。またその特異性のため板の先端の $x=O(\varepsilon/\beta)$ 付近では（5）式の級数は非一様収束となると考えられる。これは（3）式の仮定でも $x=O(\varepsilon/\beta)$ では渦面の z 方向の到達距離と物体の幅が同じオーダーとなるためである。同様に（4）式では（2）式の Kutta の条件が考慮できないため，やはり $x=1$ の近くでも厳密解には収束しないと考えられる。

次にこれらの物理的意味について考える。(6)式右辺は，ある x の断面，$\bar{y}$-$\bar{z}$ 平面（近場）において縦渦面の強さ密度 γ_x＝一定の渦面が Fig. 2（a）のように配列した場合の，自由渦面のみによる原点での（$-\bar{z}$）方向の誘導速度を表わす。（6）式はその第0近似が横流れ一様流 β と釣り合うべきことを示している。この流場は渦面が $\bar{z}=\infty$ まで続き，γ_x が一定であることを特徴としている。

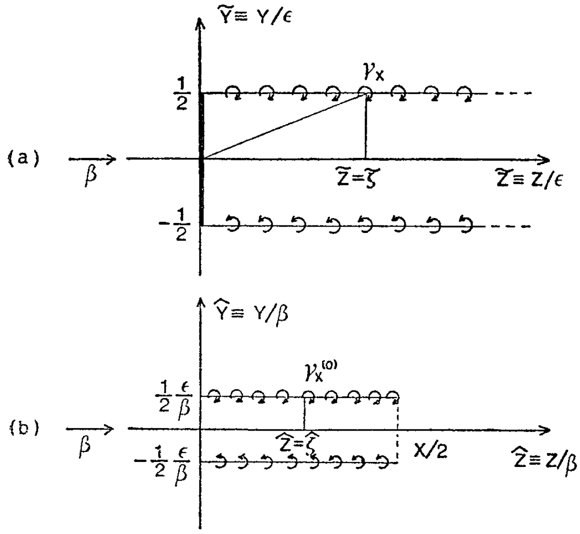

Fig. 2 Perturbational illustration of Bollay's flow model

負符号を除いた（7）式左辺は，$\hat{y}$-$\hat{z}$ 平面（渦場と称する）において，渦面が Fig. 2(b) のように配列した時二重渦面と近似して得られる，場の原点における（$-\hat{z}$）方向の誘導速度である。ただし，発散積分の有限部分をとっているため原点近傍の渦面による寄与を除いた誘導速度となっている。

(4)式左辺を近場での横流れ一様流と考えるならば，第3項は一様流 β からの増加を意味し，(7)式は近場における渦面の強さ密度が，横流れ一様流の増加に対応し $\gamma_x^{(1)}$ だけ増加することを意味する。あるいは近場で渦面が有限の広がりしか持たないとした場合の $\gamma_x^{(0)}$ からの修正量が（7）式から得られることを意味する。

このような近似解法は，Prandtl の揚力線理論においても見られる[6]もので，（4）式も Prandtl の方程式も大まかにいえば両者ともに第2種の方程式であり，近似的には積分項が省略できるという性質を持つから物理的な観点からも共通性が考えられるに違いない。実際両者ともに2次元的な断面固有の流れを考えており，本章の解析では Fig. 2(a) のような流れが，また揚力線理論では厳密な2次元翼周りの流れがそれに当る。ただ本章で得られた近場の流れは物体表面条件，渦面の運動学的・動力学的条件をほとんど満足しておらず，この流場を断面固有の流れと考えるのはやや近似的にすぎるように思われる。

以上のような特性を考え，次章で境界条件などを厳密にした新たな理論を考える。

3 理　論

本論におけるパラメータに関する仮定として前章と同様（3）式を基礎にする。ただし回転楕円体のような典型的厚肉物体を考える場合には，剝離線に関する情報が必要であるから新たにレイノルズ数 R_n を導入し，関係するパラメータを ε,β,R_n のみとする。R_n については現実に即して境界層厚さが物体の幅と比較して十分薄いとし，少なくとも

$$\varepsilon\gg1/\sqrt{R_n} \qquad (8)$$

のように仮定するが，必要な場合には非粘性的取り扱いが許され得る程度に R_n は大きいとする。流れの状態については，現実には多くの場合乱流と考えられるが，簡単のため R_n が大きくとも層流とし，渦層も不安定は示さず左右対称に流出するものと考える。

本論における考察の対象物体には何ら制限はないが，ただ記述に当っては前章との整合上長方形翼についてのみ詳述することにする。座標系その他は Fig.1 と同様で，x, y, z 方向の流速を u, v, w とする。境界条件については先に述べたことから渦層を理想化して渦面と考えることが許されるので，その形を

$$y=\pm g(x, z) \tag{9}$$

とすれば，渦面上において渦面の運動学的条件(K.C.)，動力学的条件(D.C.)が課せられ，さらに物体表面条件(H.C.)を境界条件とし，考える場については，前章と同様前端，後端の非一様性が生じる部分は無視し，近場，渦場のみとする。

3.1 近　場

$x=O(1)$ とし，$\tilde{y}, \tilde{z}$ を

$$\tilde{y}\equiv y/\varepsilon,\quad \tilde{z}\equiv z/\varepsilon \tag{10}$$

と定義することにより，物体近傍の様子を考える。無限遠での条件を考慮し，流場の諸量を

$$\left.\begin{aligned}
u&=1+\beta^2\tilde{u}^{(1)}+\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{u}^{(2)}+\cdots\cdots\\
v&=\beta\tilde{v}^{(0)}+\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{v}^{(1)}+\cdots\cdots\\
w&=\beta\tilde{w}^{(0)}+\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{w}^{(1)}+\cdots\cdots\\
p&=p_\infty+\beta^2\tilde{p}^{(1)}+\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\tilde{p}^{(2)}+\cdots\cdots\\
g&=\varepsilon\tilde{g}^{(0)}+\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$w_e\to\beta+\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{w}_\infty^{(1)}+\cdots\cdots\quad(\tilde{z}\to\infty) \tag{12}$$

と仮定する。ただし下添字 e は渦面の外部を表わす（内部における量には i を付し，渦面上での平均値には m を付すことにする)。

(10)，(11) 式より支配方程式は第0近似的には，

$$\left\{\begin{aligned}
&\tilde{v}^{(0)}\frac{\partial\tilde{u}^{(1)}}{\partial\tilde{y}}+\tilde{w}^{(0)}\frac{\partial\tilde{u}^{(1)}}{\partial\tilde{z}}=0 &(13)\\
&\tilde{v}^{(0)}\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}}{\partial\tilde{y}}+\tilde{w}^{(0)}\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}}{\partial\tilde{z}}=-\frac{\partial\tilde{p}^{(1)}}{\partial\tilde{y}} &(14)\\
&\tilde{v}^{(0)}\frac{\partial\tilde{w}^{(0)}}{\partial\tilde{y}}+\tilde{w}^{(0)}\frac{\partial\tilde{w}^{(0)}}{\partial\tilde{z}}=-\frac{\partial\tilde{p}^{(1)}}{\partial\tilde{z}} &(15)\\
&\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}}{\partial\tilde{y}}+\frac{\partial\tilde{w}^{(0)}}{\partial\tilde{z}}=0 &(16)
\end{aligned}\right.$$

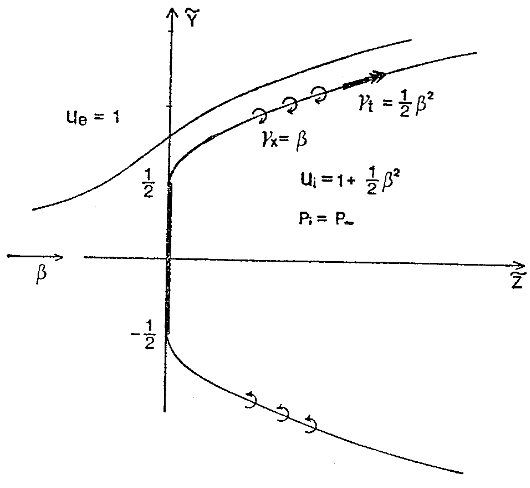

Fig.3 Flow configuration in near field

となる。一般に細長体理論では H.C. は物体表面上で，(断面内の法線速度)＝0 の条件となり，(14)～(16) 式が断面内の成分だけで表わされているから，流場は2次元的に定まることを示している。また，(14)，(15)式より x 方向の渦度 ω_x は断面内流線に沿って一定となるから，K.C. は物体表面より流出した渦面と断面内流線が一致するという条件になる。

ここで前章と同様に自由渦が $\Theta\doteqdot\beta/2$ の角度で流出するとすれば，$x=O(1)$ でかつ $O(\varepsilon)$ の物体近傍を考えているから渦面が $\tilde{z}=\infty$ まで続くと考えてよかろう。この時，$\tilde{v}^{(0)}, \tilde{w}^{(0)}, \tilde{g}^{(0)}$ を $p_i=p_\infty$ とした2次元の Kirchhoff の死水理論[10]から得られる量と考えることができれば，H.C. および K.C. を満足する。しかし2次元の死水流れは渦面の内部で総圧損失を伴うのに対し，斜航物体では Open-Separation 型の剥離[11]が生じているとすれば，渦面内部の流体は粘性の影響を受けない領域を通過しており，総圧 H_i は無限前方の総圧 H_∞ と等しく総圧損失を伴わないと考えられる。従って D.C. についてはあらためて吟味する必要がある。$H_i=H_e=H_\infty$ であるから自由渦面を通して H_i, H_e に差は生じず，渦面の強さ密度ベクトルと速度ベクトルの方向は正負を別にすれば一致する必要がある。$y>0$ の場合を考えると，渦面の強さ密度の x 方向成分を γ_x，接線方向成分を γ_t (Fig.3)，断面内流線の方向の流速を q とすると，渦面上で

$$\frac{\gamma_x}{u_m}=\frac{\gamma_t}{q_m} \tag{17}$$

が成立しなければならない。断面内では死水流れを考えているから，渦面上で $\gamma_x=\beta$，$q_m=\beta/2$，また (11) 式より u の最低次の項だけをとれば，$u_m=1$ であるから $\gamma_t=\beta^2/2$ となる。γ_t と u には $\gamma_t=u_i-u_e$ の関係があり，近場のみを考えているだけでは u_i, u_e の選び方には任意性があるが，次節で述べる渦場とのマッチングを考えると $\tilde{u}_e^{(1)}=0$ となる必要があり，従って $u_i=1+\beta^2/2$ となる。このように $H_\infty=p_\infty+(1+\beta^2)/2$ であることを考慮し，$H_i=H_e=H_\infty$ を要求すれば，渦面内部で u が1より増速することにより，3次元的に考えた場合にも渦面上では $\tilde{p}_i^{(1)}=\tilde{p}_e^{(1)}=0$ となり，$O(\beta^2)$ の項まで D.C. を満足している。この流れは第0近似的には H.C., K.C., D.C. の条件を完全に満足しており，また少なくとも境界層理論の立場からも何ら矛盾するところはなく合理的な流れとなっている。従って前節の Fig.2(a) の流れに対し，本論では死水流れを基礎とした Fig.3 のような流れを断面固有の流れと考える。

死水流れの一意性については，物体が角を持たない場合には剥離点に自由度があり，非粘性的考察のみでは一意に定め得ない。しかし物体と渦面からなる系に境界層を考えれば剥離線もやはり2次元的に決定できる。通常

死水理論によってあらかじめ与えた剝離点と，その圧力分布を用いて境界層計算を行った結果得られる剝離点とは異なるため，両者が等しくなるという条件を課せば剝離点は一意に，それに伴って死水流れも一意に定まる。例えば回転楕円体の場合には各断面形状は円であり，今は層流と仮定しているから剝離点は前方岐点より55°の点となる[12)13)]。

さて上記の渦面モデルは先に仮定したように $\tilde{z}\to\infty$ で渦面は閉じず，各断面の最大半幅（それを $\varepsilon\cdot\tilde{f}(x)$ と書く）とその断面での2次元の死水理論による抵抗係数 C_D を用いれば一般的に $\tilde{g}^{(0)}$ は

$$\tilde{g}^{(0)}\sim 2\sqrt{k(x)\cdot\tilde{z}} \tag{18}$$

$$k(x)=\frac{C_D(x)\cdot\tilde{f}(x)}{\pi} \tag{19}$$

のように表わされ，放物線的に増加し無限遠で特異性を持つことになる。また，どの断面においても $\gamma_x=\beta$ であり3次元性の影響は出てこない。これらについては，前章と同じく渦場を考えることにより，前者の問題は有限な渦面の広がりのうちの物体近傍の局所的な性質と考えることによって，後者の問題は渦場では γ_x が渦面に沿って変化し，近場での最低次の項がどの断面でも β であると考えることによって解決され得るものと考える。

第1近似は渦場を考えた結果決定されるものであるが，(11)，(12)式のように仮定しているため速度ポテンシャルに直して考えてみると，第1近似は第0近似と何ら変わらず，無限遠での条件のみが変化する。そこで $\tilde{v}^{(1)},\tilde{w}^{(1)}$ も第0近似同様，Kirchhoff の死水理論に一致すると考えると議論は同様に展開でき，

$$\left.\begin{aligned}v&=\{\beta+\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{w}_\infty^{(1)}\}\tilde{v}^{(0)}\\ w&=\{\beta+\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{w}_\infty^{(1)}\}\tilde{w}^{(0)}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

となる。u については (17) 式の関係を近似をあげて用いることにより，

$$\left.\begin{aligned}u_e&=1+\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\tilde{u}_e^{(2)}\\ u_i&=1+\beta^2/2+\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{u}_i^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

となり，$\tilde{u}_e^{(2)},\tilde{u}_i^{(2)}$ は $\tilde{w}_\infty^{(1)}$ と

$$\tilde{u}_i^{(2)}-\tilde{u}_e^{(2)}=\tilde{w}_\infty^{(1)} \tag{22}$$

の関係で結ばれている。

さて，次に z 方向の流体力（垂直力）を求めることを考える。垂直力係数 C_N を定義するに当っては通常の定義とは異なるが無次元化の一貫性という観点から，圧力は ρU_∞^2，面積に対応するものは l^2 を用いて無次元化を行うことにすれば，垂直力を N とすると C_N は

$$C_N=\frac{N}{\rho U_\infty^2\cdot l^2} \tag{23}$$

と定義される。この時各断面が分担する垂直力 dC_N/dx は近場における物体表面上の圧力積分

$$dC_N/dx=-\oint p\cdot n_z ds \tag{24}$$

で表わされる。ただし n_z は近場において物体境界上に立てた外向き単位法線ベクトルの z 方向成分，ds は境界の線素である。物体表面上での圧力は，物体表面上における第0近似の断面内流速を $\beta\tilde{q}^{(0)}$ とすると，

$$\left.\begin{aligned}p_e&=p_\infty+\beta^2\{1-(\tilde{q}^{(0)})^2\}/2\\ &\qquad-\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\{\tilde{w}_\infty^{(1)}\cdot(\tilde{q}^{(0)})^2+\tilde{u}_e^{(2)}\}\\ p_i&=p_\infty-\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{u}_i^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ここで (22) 式の関係を用いれば dC_N/dx は横流れ一様流が $\beta+\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\tilde{w}_\infty^{(1)}$ となった時の抵抗のような形で表わされ，

$$dC_N/dx=\{\beta^2+2\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\tilde{w}_\infty^{(1)}\}\cdot\varepsilon\tilde{f}\cdot C_D \tag{26}$$

と求まる。ただし C_D は前述のように Kirchhoff の死水理論による通常の定義に従った抵抗係数で，物体に垂直に当る一様流を w_∞，半幅を f，抵抗を D とすれば $C_D=D/(\rho w_\infty^2 f)$ である。(26) 式を積分すれば

$$\frac{C_N}{\varepsilon^3}=\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^2\int_0^1\tilde{f}\cdot C_D dx+\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{3/2}\int_0^1 2\tilde{w}_\infty^{(1)}\tilde{f}C_D dx \tag{27}$$

と求まる。このように物体形状が一つのパラメータ ε のみによって表示される相似物体に対しては，相対迎え角 β/ε に対して C_N/ε^3 をとれば ε の違いによらず垂直力は統一的に表現できることになる。また第0近似的には C_D の分布さえ知れれば垂直力を求めることができ，船体のような場合でもあらかじめ種々の断面形状に対して C_D を求めておけば単純な積分だけで事足りる。

3.2 渦 場

垂直力を第1近似値まで求めようとする場合，前節で示したように $\tilde{w}_\infty^{(1)}$ が求められる必要があるが，これは B.I.E. の近似展開の際に述べた通り渦面の広がりが有限であることにより生じるものである。近場で渦面が無限遠まで広がる結果になったのは K.C. が2次元的となったためであり，渦面の広がりが有限であることを考慮しようとするならば K.C. が3次元性を保有するような場を考える必要がある。このためには，B.I.E. の場合と同じく渦面の z 方向の広がりを $O(\beta)$ と考えればよい。そこで渦場として $x=O(1)$，$y,z=O(\beta)$ の領域を考えることにし，$\hat{y},\hat{z}$ を次のように定義する。

$$\hat{y}=y/\beta,\quad \hat{z}=z/\beta \tag{28}$$

この時渦面同志の間隔の半分を表わす g は近場とマッチングするためには $O(\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2})$ でなければならず，

$$g=\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\hat{g}(x,z)+\cdots\cdots \tag{29}$$

とする。これは渦場で見た場合相対的に間隔が $(\varepsilon/\beta)^{1/2}$ の程度となり，今は $\varepsilon/\beta\ll 1$ の場合を考えているので渦面は $\hat{z}$ 軸にはりついたように見えることを意味する。また物体は ε/β の程度に見えるから物体表面条件は無視してよいが，原点近傍は近場の影響下にあるから近場とのマッチング条件は考慮する必要がある。従って v などは $\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}$ 程度と考えられる。以上のようなことを考慮

して速度場の諸量を次のように仮定する。

$$\left.\begin{aligned} u_e&=1+\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\hat{u}_e{}^{(1)}+\cdots\cdots\\ v_e&=\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\hat{v}_e{}^{(1)}+\cdots\cdots\\ w_e&=\beta+\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\hat{w}_e{}^{(1)}+\cdots\cdots\\ p_e&=p_\infty+\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\hat{p}_e{}^{(1)}+\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\quad(30)$$

$$\left.\begin{aligned} u_i&=1+\beta^2\hat{u}_i{}^{(0)}+\cdots\cdots\\ v_i&=\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\hat{v}_i{}^{(1)}+\cdots\cdots\\ w_i&=\beta\hat{w}_i{}^{(0)}+\cdots\cdots\\ p_i&=p_\infty+\beta^2(\varepsilon/\beta)^{1/2}\cdot\hat{p}_i{}^{(1)}+\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\quad(31)$$

渦場においても近場同様 v, w は $\beta(\varepsilon/\beta)^{1/2}$ 程度までは2次元的な特性を有している。$\hat{w}_i{}^{(0)}$ については，近場のように0とすると $\hat{y}$ が x の関数でなくなり近場とマッチングしないため $\hat{z}$ の関数と考えなければならない。γ_x も

$$\gamma_x=\beta\hat{\gamma}_x+\cdots\cdots=\beta(1-\hat{w}_i{}^{(0)})+\cdots\cdots \quad(32)$$

であるから $\hat{z}$ の関数であり，γ_x を用いて v, w を非線形のまま表示すれば

$$\begin{aligned} w-iv=\beta&-\frac{\beta}{2\pi i}\int_0^{\hat{\zeta}_{\max}}\frac{\hat{\gamma}_x}{(\hat{z}-\hat{\zeta})+i(\hat{y}-(\varepsilon/\beta)^{1/2}\hat{y})}d\hat{\zeta}\\ &+\frac{\beta}{2\pi i}\int_0^{\hat{\zeta}_{\max}}\frac{\hat{\gamma}_x{}^{(0)}}{(\hat{z}-\hat{\zeta})+i(\hat{y}+(\varepsilon/\beta)^{1/2}\hat{y})}d\hat{\zeta} \end{aligned}\quad(33)$$

である。ここで，$\hat{y}$ は $\hat{z}$ に関して1価関数，すなわち大規模な渦面の巻き込みが生じないと考えている。ただそのように考えたとしても，渦面の端点 $\hat{z}=\hat{\zeta}_{\max}$ においては孤立した渦糸などを配置し[14]特異性を考慮する必要があると考えられるが，本論ではそれを高次の項として省略する。(33) 式は実際には $(\varepsilon/\beta)^{1/2}$ について展開して用い，特に K.C. を求めるために $\hat{y}=0_+$ の値を求めると

$$\begin{aligned} w_e-iv_e=\beta+\beta\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{1/2}\Big[&-i\frac{\partial\hat{y}}{\partial\hat{z}}\hat{\gamma}_x-i\hat{y}\frac{\partial\hat{\gamma}_x}{\partial\hat{z}}\\ &-\frac{1}{2\pi}\mathrm{pf}\int_0^{\hat{\zeta}_{\max}}\frac{2\hat{y}\cdot\hat{\gamma}_x}{(\hat{z}-\hat{\zeta})^2}d\hat{\zeta}\Big] \end{aligned}\quad(34)$$

$$\begin{aligned} w_i-iv_i=\beta(1-\hat{\gamma}_x)+\beta\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{1/2}\Big[&-i\hat{y}\frac{\partial\hat{\gamma}_x}{\partial\hat{z}}\\ &-\frac{1}{2\pi}\mathrm{pf}\int_0^{\hat{\zeta}_{\max}}\frac{2\hat{y}\cdot\hat{\gamma}_x}{(\hat{z}-\hat{\zeta})^2}d\hat{\zeta}\Big] \end{aligned}\quad(35)$$

となる。従って K.C. は $\hat{y}>0$ の場合についてのみ考えれば，$u\partial\hat{y}/\partial x+\hat{w}\partial\hat{y}/\partial\hat{z}-\hat{v}=0$ に (34)，(35) 式で得られた値を，e, i について適用して

$$\frac{\partial\hat{y}}{\partial x}+(1-\hat{\gamma}_x)\frac{\partial\hat{y}}{\partial\hat{z}}-\frac{\partial\hat{\gamma}_x}{\partial\hat{z}}\cdot\hat{y}=0 \quad(36)$$

また渦面の内外にベルヌーイの式を適用し，γ_x で書き換えると D.C. は

$$\frac{\partial\hat{\gamma}_x}{\partial x}+(1-\hat{\gamma}_x)\frac{\partial\hat{\gamma}_x}{\partial\hat{z}}=0 \quad(37)$$

となる。これらは境界条件というよりもむしろ $\hat{y}, \hat{\gamma}_x$ の支配方程式となっており，両式の境界条件に当るものは近場とのマッチング条件で，$\hat{z}\to 0_+$ の時

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\gamma}_x\to 1\\ &\hat{y}\to 2\sqrt{k(x)\cdot\hat{z}} \end{aligned}\right\}\quad(38)$$

となることである。これらの結果から $\hat{z}\to 0_+$ の時の $\hat{w}_e{}^{(1)}$ を求めれば近場の第1近似に必要であった $\tilde{w}_\infty{}^{(1)}$ を得る。すなわち，

$$\tilde{w}_\infty{}^{(1)}=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{pf}\int_0^{\hat{\zeta}_{\max}}\frac{2\hat{y}\cdot\hat{\gamma}_x}{\hat{\zeta}^2}d\hat{\zeta} \quad(39)$$

である。この物理的意味は，(38) 式を考慮するとともに，$\varepsilon\ll\alpha\ll\beta$ の任意の α を導入し

$$-\tilde{w}_\infty{}^{(1)}=\lim_{\beta\to 0}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\hat{\zeta}_{\max}}\frac{2\hat{y}\cdot\hat{\gamma}_x}{\hat{\zeta}^2}d\hat{\zeta}-\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\infty\frac{4\sqrt{k(x)\hat{\zeta}}}{\hat{\zeta}^2}d\hat{\zeta}\Big] \quad(40)$$

と書き直せば明らかとなる。$(-\tilde{w}_\infty{}^{(1)})$ は物体近傍における，渦面による $(-z)$ 方向の誘導速度であり，$\hat{z}=\alpha$ は近場では $\tilde{z}=\alpha/\varepsilon$ に対応し，物体から十分離れた点である。近場では $\tilde{z}=0$ から $\tilde{z}=\infty$ までの渦面による誘導速度は第0近似的には β であったが，渦面の広がりが有限であるから物体から十分離れたところでは渦面の形状も強さも近場の第0近似のそれらとは異なる。この修正量が (40) 式であり，まず $\tilde{z}=\alpha/\varepsilon$ から $\tilde{z}=\infty$ までの近場第0近似による寄与を右辺第2項によって引き去り，その代わりに渦場で求めた実際の $\hat{y}, \hat{\gamma}_x$ および広がりを持つ渦面による誘導速度を第1項によって取り入れることによって修正したものである。

しかしながら，マッチング条件を満足するような上記の方程式系の解は見出すことができなかった。これには多くの理由が考えられるが，まず第1には，種々の数値計算例が示すように渦面は巻き込み $\hat{\gamma}_x, \hat{y}$ が多価になるものと考えられ，本論ではその影響を無視していることがあげられる。第2には，(30) 式の仮定の問題であり，渦面の端点に強い特異性があれば第0近似的にも w_e は横流れ一様流 β とはできず，$O(\beta)$ ではあるが $\hat{y}, \hat{z}$ の関数と考える必要があり，また u_e にも $O(\beta^2)$ の項が生ずることになる。このように $O(\beta)$ あるいは $O(\beta^2)$ の項が単純になっている点も一つの理由に挙げられる。

第2の理由については4章で若干の検討を加えることにし，ここでは第1の理由によるものとの立場に立って，まず渦面の挙動の調査を行ってみることにした。渦面の巻き込みが問題になるため，(30)，(31)式の仮定にはこだわらずに自由渦面による誘導速度の計算の際には渦面の間隔が有限と考えることにし，渦面の形状および γ_x の計算に渦格子法的な取り扱いを行った。実際の数値計算に当っては渦面を離散化し渦糸におきかえるが，渦糸の強さは近場において拘束渦 γ_t の第0近似が $\beta^2/2$

と求まっているから，物体の Δx の間隔から流出する自由渦糸の強さを $(\beta^2/2)\cdot\Delta x$ とすればよい。結局，渦糸の位置のみが未知となり，これは渦糸が流れに沿うとして，

$$dx/u_m=dg/v_m=dz/w_m \qquad (41)$$

を解けば求まる。u_m, v_m, w_m は渦糸の対流速度であるが，ここでは渦場での諸特性は生かし，u_m は 1，v_m, w_m は (33) 式によって求めることにする。ただし，v_m, w_m の計算には物体表面条件を無視したとしてもマッチング条件は何らかの意味で取り入れられるべきであろうが，実際上それほど小さくはない ε，β について計算を行うため必ずしもそれは容易ではなく，ここでは自由渦の流出位置を物体上の剝離点にとるにとどめ，それ以上の操作を行わないで計算することにした。

Fig. 4 には長方形翼，Fig. 5 には回転楕円体の場合の渦面の挙動を示す。これらは $\varepsilon=0.1$，$\beta=0.25$ とし，x 方向には 30 分割，また渦面が落ち着くまで反復計算 (10 回) を行った後得られた結果である。なお図上の数値は x の位置を示している。また回転楕円体の場合 ε は全幅と全長の比で，計算には剝離点の位置を与えるのみならず，簡単のために剝離点を $z=0$ まで移動させた。長方形翼の場合の計算結果では，渦面は y 方向にはほとんどふくらまず幅の程度を保っている。回転楕円体では剝離点を前方岐点より 55° の点としているため，図に見るように渦面は y 方向には最大半径 0.05 にも達していないが，前半部では渦面は負の勾配を持ち，後半部では z が小さい間は正の勾配で比較的 $\sqrt{z}$ に近い挙動をする。このように物体の幅が小さいところから流出した渦糸の間隔は小さく，反対に大きいところから流出した場合には大きくなっており，渦面の形は物体の形に強く依存するようである。

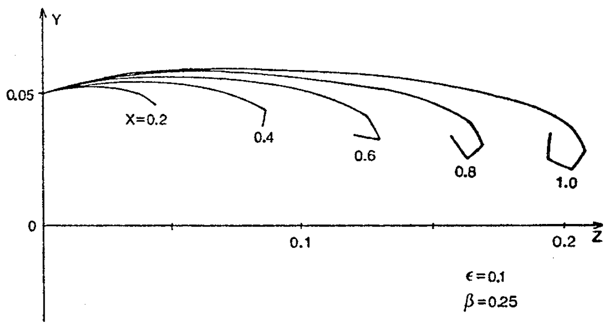

Fig. 4 Calculated vortex layers of a flat plate

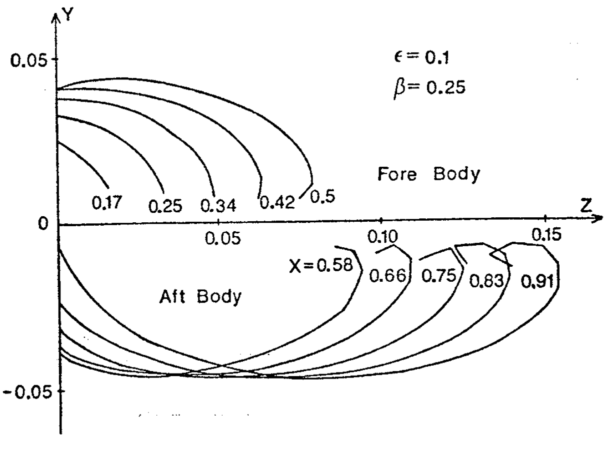

Fig. 5 Calculated vortex layers of a prolate spheroid

次に $x=1$ で近似的に $\beta^2/2=\zeta_{\max}\cdot\gamma_x$ が成立することから，γ_x のオーダーを見積るために $x=1$ での渦面の最長到達距離を調べてみる。近場では $\Theta=\beta/2$ が正確に成立しており，また通常 $\Theta=\beta/2$ の程度と考えられているから今の場合には $\zeta_{\max}=0.125$ 程度と期待される。しかし実際には長方形翼で0.2，回転楕円体では 0.16 と通常よりは大きい値を示す。これは渦糸の強さに近場から得られた第 0 近似の値を使用しているから全般的に渦糸の強さを実際より低く見積っていることにもよると考えられる。ことに先端部から流出する渦糸の強さは長方形翼の場合にはかなり低く見積られているから渦糸の巻き込みもあまり強くなく，従って最長到達距離も長くなるものと考えられる。回転楕円体の場合には巻き込む部分が先端部の半径の小さいところから流出しており，y 方向の間隔が小さいため反対側の渦面による誘導速度が大きく，最長到達距離は長方形翼の場合に比べて短くなっている。いずれの場合にも，$\zeta_{\max}>\beta/2$ であるから平均的な γ_x は β より小さくなっている。このことはまた平均的には渦面内部で逆流が生じていないことを意味し，第 0 近似的な結果にせよ，現実の流場をそれほど忠実に表わしているわけではないようである。

以上で離散的にではあるが $\hat{g}, \hat{\gamma}_x$ は求まり，(39) 式に従って $\tilde{w}_\infty^{(1)}$ が計算できるが，(39) 式の計算は発散積分の有限部分をとる計算になっており数値計算上困難でもあり，また近場とのマッチング条件が欠落しているから単に有限部分をとったにしても物理的な明確さを欠くことになる。

そこで本論では以上の数値計算結果をもとに，$\hat{g}$, $\hat{\gamma}_x$ を次のように仮定して計算することにした。すなわち，物体形状によらず一般に

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\gamma}_x=1\\&\hat{g}=2\sqrt{k(x-2\hat{z})\cdot\hat{z}}\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

とする。$\hat{\gamma}_x=1$ はマッチング条件を満足するとともに渦場でも死水流れを期待したものであり，これにより必然的に渦面の対流速度 w_m は $\beta/2$ となるので $\hat{g}$ の仮定にもこのことを反映させ，k を $(x-2\hat{z})$ の関数とした。またそうすることによって渦面が物体の形状を反映するという事実を考慮し，さらに $\hat{z}\to 0$ の時マッチング条件を満足するようにした。もちろんこのような仮定は D.C. は満足しても K.C. を満足するものではない。

具体的には長方形翼，回転楕円体の場合にはそれぞれ

$$\hat{g}=2\sqrt{\frac{C_D}{2\pi}\cdot\hat{z}} \tag{43}$$

$$\hat{g}=2\sqrt{\frac{C_D}{\pi}\sqrt{(x-2\hat{z})(1-x+2\hat{z})}\cdot\hat{z}} \tag{44}$$

とした。このような仮定をすると (39) 式の計算は解析的に実行でき，長方形翼の場合には

$$\tilde{w}_\infty{}^{(1)}=4\,C_D{}^{1/2}\cdot\pi^{-3/2}x^{-1/2} \tag{45}$$

回転楕円体の場合には積分変数を $2z/x$ で置きかえ級数展開したのち項別積分すればガウスの超幾何関数で表現でき

$$\tilde{w}_\infty{}^{(1)}=\frac{3}{\pi}(2C_D)^{1/2}\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(7/4)}x^{-1/4}(1-x)^{-1/4}\times F\left(-\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{4};\ x\right) \tag{46}$$

となる。

4 結果および考察

前章で $\tilde{w}_\infty{}^{(1)}$ が求まったから dC_N/dx, C_N は長方形翼に対しては

$$\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{dC_N}{dx}=\frac{C_D}{2}\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^2+4\left(\frac{C_D}{\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{3/2} \tag{47}$$

$$\frac{C_N}{\varepsilon^3}=\frac{C_D}{2}\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^2+8\left(\frac{C_D}{\pi}\right)^{3/2}\cdot\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{3/2} \tag{48}$$

と求まる。ただし $C_D=0.88$ とする[10]。また回転楕円体の場合には

$$\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{dC_N}{dx}=C_D\sqrt{x(1-x)}\cdot\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^2+6\sqrt{2}\frac{C_D{}^{3/2}}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(7/4)}x^{1/4}(1-x)^{1/4}\times F\left(-\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{4};\ x\right)\cdot\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{3/2} \tag{49}$$

ただし，$C_D=0.50$ とする[15]。C_N を求めるに当っては，第2項の F を級数展開し項別積分を行えば一般化超幾何関数 ${}_3F_2\left(1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{5}{4};\ \frac{5}{2},\ \frac{3}{4};\ 1\right)$ で表示でき，Γ 関数を用いて書き換えれば

$$\frac{C_N}{\varepsilon^3}=\frac{\pi}{8}C_D\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^2+\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{C_D{}^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\cdot\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{3/2} \tag{50}$$

となる。

Fig. 6 に Lamer[16] の長方形翼 ($\varepsilon=0.2$ および $\varepsilon=0.3$) の実験値，また，不破[2] ($\varepsilon=0.154$) と著者ら ($\varepsilon=0.25$) の回転楕円体に対する実験値を計算値とともに C_N/ε^3 と β/ε の関係として示す。実験値は ε によらずほぼ1本の曲線上にあり，三角翼のように錐相似性を持つ場合だけでなく[17]，このような表示の仕方が有効であると考えられる。

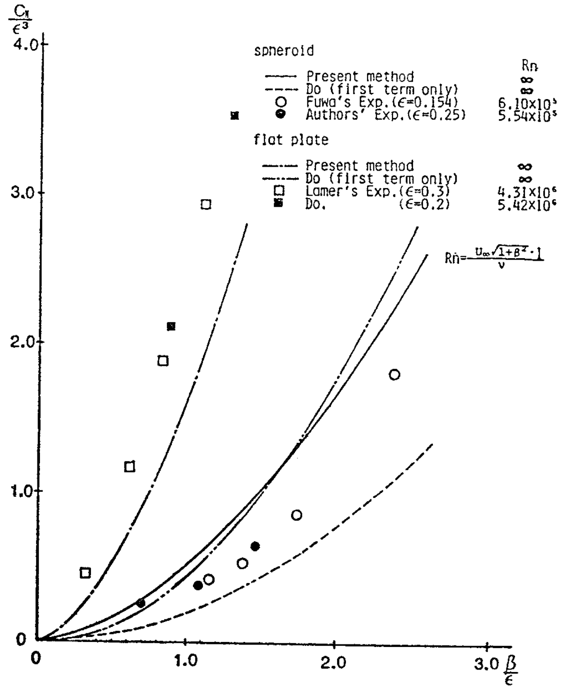

Fig. 6 Variation of lateral force coefficient with relative angle of attack

計算値は実験値と十分に一致しているとはいい難いが，非線形的傾向はよく表わしているものと考えられる。ただ長方形翼の場合には低めに，回転楕円体の場合には高めの C_N を与え，それぞれ逆の結果となっている。第0近似値のみに着目すれば両者ともに低めの値を与えるが，長方形翼の場合にそれが著しい。また初めに仮定したほど β/ε が1に比べて大きくはない領域で比較していることもあり，第1近似のみの寄与が第0近似値と同程度になっている。摂動展開が発散級数になることは致し方ないとしても，やはり第0近似値自体が小さすぎるように思われる。

これらの事情を調べるために，従来比較的よく調べられている長方形翼の場合について dC_N/dx の分布を Fig. 7 に示す。これは $\varepsilon=0.1$, $\beta=0.287$ ($\bar{\beta}=16°$) の場合

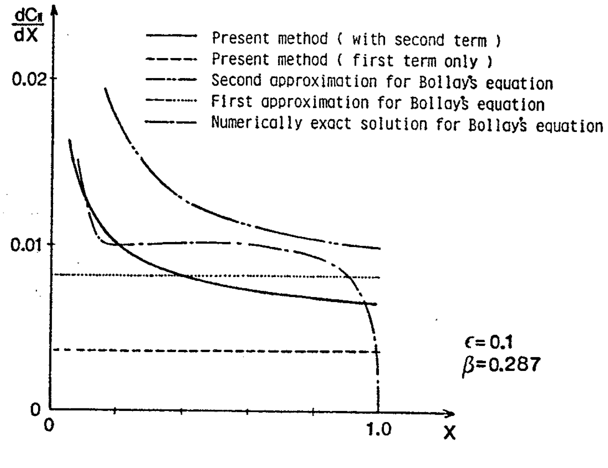

Fig. 7 Lengthwise lateral force distribution of a flat plate

で，比較のために本論の方法によるものと B. I. E. を $\Theta=8°$ として厳密に解いたもの，および第2章の近似解法によるものとを併せて示したものである。長方形翼の場合，B. I. E. を厳密に解いた解は実験値をよく説明するとされているからこれを比較の基準とすると，本論の結果は B. I. E. による近似解法と比べて傾向的には一致の方向にあると考えられる。先端部においても $x^{-1/2}$ のような特異性を簡単な計算にもかかわらずよく表現しているように思われる。ただ第0近似値のみを見ると，B. I. E. による近似解法の方が中央部の平坦さをよく表現しており，本論の結果は厳密解の 40% にも満たない。この差は近場では本論の場合 $\gamma_x=\beta$ であるが，B. I. E. の場合 $\gamma_x=2\beta$ となることによるものと考えられる。B. I. E. では近場における渦面内部では $\tilde{z}\to\infty$ の時 $w=-\beta$ となっており，境界条件が簡単化された結果にせよ，最低次の項で逆流がすでに取り入れられており，また，その結果拘束渦の強さ密度は β^2 となるため物体背後の渦面内部で $u=1+\beta^2$，従って圧力は p_∞ 以下となっている。本論では近場の横流れ一様流を β，基準圧力を p_∞ と考えたが，横流れ一様流を β より大きいとすれば近場全体の基準圧力を p_∞ より下げることができ，やはり死水理論を適用すれば C_D もそのままの値で議論は同様に展開できる。従って第0近似値は横流れ一様流が大きい分だけ上がることになる。

一方，第1近似値自体は第0近似値に比べて大きすぎるように思われるが，第1近似値は $\tilde{w}_\infty^{(1)}$ に関係して (39)，(40) 式のように近場第0近似の γ_x の値を用いて求めるため，その大きさに深くかかわっており，大小関係については即断はできない。しかし $\tilde{w}_\infty^{(1)}$ は渦場での $\hat{g}$，$\hat{\gamma}_x$ の仮定に直接結びついており修正の余地がある。実際，長方形翼の場合には Fig. 4 に見るように，渦面の数値計算結果は多くの条件を欠いているとはいえ，実際の流場の様子に定性的には近いものを与えると考えられる。しかし，今回は $\hat{g}$ は (43) 式のように仮定しているから $\hat{z}=x/2$ では大きく開いた形状をし，現実の流場より渦面の間隔は大きすぎる。また γ_x で考えた場合，dC_N/dx は $x=0$ で特異性を持つ，いい換えれば翼の先端部では拘束渦の強さが強く，流場に自由渦として流出した時渦場では渦面の端点にくるから，そこでは γ_x 分布に特異性がある。このように渦面の端点では特異性があり，また渦面の巻き込みの問題もあるから端点近傍は渦場全体とは別個に考える必要がある。本論では簡単化のため端点の取扱いを省略したが，$\hat{g}$，$\hat{\gamma}_x$ はこれらのことを考慮することによって改善可能であると思われる。C_N を求めるに当っては dC_N/dx の特異性は $x^{-1/2}$ 程度の弱い特異性であるから積分可能であり，本論ではその領域まで解を延長し計算を行った。

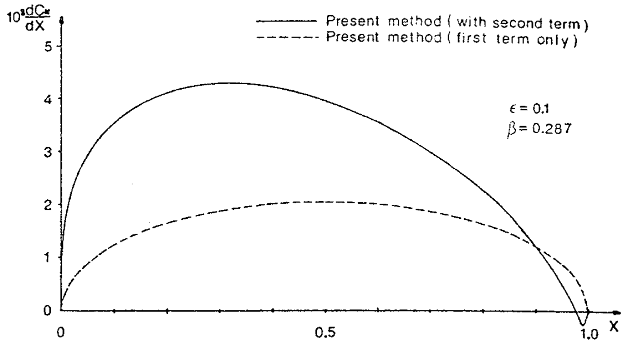

Fig. 8　Lengthwise lateral force distribution of a prolate spheroid

次に Fig. 8 に回転楕円体の場合の dC_N/dx を示す。長方形翼の場合と同様，$\varepsilon=0.1$，$\beta=0.287$ の場合である。dC_N/dx はほとんどの領域で正であり，後端近傍のみ若干負の領域が存在するが，通常の線形理論の場合には $(dC_N/dx)/\varepsilon^3=(\beta/\varepsilon)\pi(1-2x)$ であり，後半部においては負となるからかなり様子は異なる。線形項は Munk モーメントを生じさせるから工学的には重要な問題であるが，本論においては高次の問題であり，考慮していない。

回転楕円体のように前後対称で先端に特異性がない場合には非粘性的に取り扱う限り C_N の線形項は現われてこないが，長方形翼のような場合には線形項が現われるから長方形翼において C_N が低めの値を示したのはそのことによると考えられる。

5　結　　　言

以上，斜航物体に対して相対迎え角が大きいという仮定の下で，近場と渦場という2つの領域を考えることによって従来とは異なる細長体理論を構成した。その結果次のような知見を得た。

（1）　近場すなわち物体近傍では Kirchhoff の死水理論を基礎とする3次元性を考慮した新しい渦面モデルを導入し，このモデルが薄翼の場合を含めて回転楕円体のようなより一般的な物体に対しても適用可能であり粘性流体力学的にも矛盾のないものであることを示した。またその結果として，垂直力が死水理論による抵抗係数を用いて求め得ることを示した。渦場すなわち物体を無視できるような領域においては，渦面の形状および渦面の強さ密度を仮定することによって流場の諸量を求め，近場の解を修正した。しかし，これらの仮定の仕方には任意性が伴い，また渦場自体の構成の仕方にも問題があることもわかった。これらは今後の研究課題とする。

（2）　垂直力係数 C_N については，細長比 ε のみをパラメータとする相似物体に対しては C_N/ε^3 は β/ε のみの関数となることを示した。長方形翼，回転楕円体の実験値をその関係で整理すれば，実験点はほぼ1本の曲線

上に乗り，統一的に表現できることを明らかにした。計算値と実験値との一致はあまり良好とはいえないが，非線形的挙動はよく表現できる。

本稿を終わるに当り，貴重な文献を紹介していただき，また有益な御討論をいただいた大阪大学工学部 浜本剛実助教授に深く感謝いたします。また終始熱心な御討論をいただいた同大学 鈴木敏夫助教授に深く感謝いたします。また Boilay の積分方程式の計算プログラムを心よく御貸しいただいた同大学大学院の柏木正君に厚く御礼申し上げます。なお，本研究には文部省科学研究費の補助を受けたこと，また数値計算には大阪大学大型計算機センター ACOS/NEAC/900 を使用したことを付記し，関係各位に感謝する次第であります。

参考文献

1) Bollay, W.: A Non-linear Wing Theory and its Application to Rectangular Wings of Small Aspet Ratio, ZAMM (1939).
2) 不破 健：斜行中の船体にはたらく流体力について，日本造船学会論文集，第134号 (1973).
3) 大村 稔・高岡 力：揚力面理論による前縁剥離渦を伴う翼の特性推算，日本航空宇宙学会誌，第20巻，第226号 (1972).
4) Marshall, E. J. and Deffenbaugh, F. D.: Separated Flow over a Body of Revolution, J. Aircraft, Vol. 12, No. 2 (1975).
5) Allen, H. J. and Perkins, E. W.: A Study of Effects of Viscosity on Flow over Slender Inclined Bodies of Revolution, NACA Rep. No. 1048 (1951).
6) Van Dyke, M.: Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press (1964), p. 167.
7) 浜本剛実：翼理論とその流れ模型，関西造船協会誌，第166号 (1977).
8) Djojodiharjo and Widnall : A Numerical Method for the Calculation of Nonlinear Unsteady Lifting Potential Flow Problems, AIAA. J. Vol. 7, No. 10 (1969).
9) Thwaites, B.: Incompressible Aerodynamics, Oxford, Clarendon Press (1960), p. 405.
10) バチェラー，G. K.: 入門流体力学，東京電機大学出版局 (1972), p. 499.
11) Wang, K. C.: Separation Patterns of Boundary Layer over an Inclined Body of Revolution, AIAA J. Vol. 10, No. 8 (1972).
12) Kawaguti, M.: Discontinuous Flow past a Circular Cylinder, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 8, No. 3 (1953).
13) Smith, F. T.: Laminar flow of an incompressible fluid past a bluff body ; the separation, reattachment, eddy properties and drag, J. Fluid. Mech. Vol. 92, Part 1 (1979).
14) Roy, M.: On the Rolling-up of the Conical Vortex Sheet above a Delta Wing, Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 7 (1966).
15) Roshko, A.: On the Wake and Drag of Bluff Bodies, J. Aero. Sci. Vol. 22 (1955).
16) Lamar, J. E. :Extension of Leading-Edge-Suction Analogy to Wings with Separated Flow around the Side Edges at Subsonic Speeds, NASA, TR. R-428 (1974).
17) Mangler, K. W. and Smith, J. H. B.: A theory of the flow past a slender delta wing with leading edge separation, Proc. Roy. Soc. London. A Vol. 251 (1959).