

(昭和 57 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

薄肉構造の離散化極限解析 (その 2)

—一般シェル構造解析のための平板剛体要素モデル—

正員 都 井 裕* 正員 上 田 真 稔**
 正員 川 井 忠 彦***

Discrete Limit Analysis of Thin-Walled Structures (Part 2)

—Flat rigid element model for analysis of general shell structures—

by Yutaka Toi, *Member* Masatoshi Ueda, *Member*
 Tadahiko Kawai, *Member*

Summary

In the previous paper¹⁾ the general formulation of curved rigid element models was described for the discrete limit analysis of several standard shells defined by the orthogonal curvilinear coordinates. These elements were derived without the approximation of shapes of curved surfaces. In this paper the triangular flat rigid element model is introduced for the analysis of shell structures of arbitrary shape. This type of element, being also used in the conventional finite element analysis, is of great use in the development of the general-purpose computer program, though it includes the shape approximation.

The physical concept of the flat rigid element model can be obtained by the combined use of those of the plane strain and plate bending elements proposed by Kawai²⁾, and the development of the algorithm for the general thin shells was carried out recently by Toi³⁾.

In this report the formulation is limited to the elasto-plastic analysis of static problems under the assumption of small deformation. The outline of the method of discrete limit analysis by using the flat rigid element model is described with some numerical examples on the standard problems. The application to the plastic instability and dynamic collapse problems is now under way and will be reported in the further reports.

1 序

前報¹⁾では、直交曲線座標系により定義される工學上重要な数種のシェル構造を解析対象として、形状近似を含まない曲面剛体要素モデルの一般論を述べたが、本報では、任意形状を有する薄肉シェル構造の離散化極限解析に用いる三角形平板剛体要素モデルを誘導する。任意の曲面板構造を三角形平板要素により折れ板近似して解析する手法は有限要素法においても用いられており、形状近似を含むものの汎用的な薄肉構造解析プログラムの開発には欠かせない要素モデルである。

この離散化モデルは物理的には、すでに川井により提案されている平面問題および平板曲げ問題に対する剛体・ばねモデル²⁾の概念を組み合わせたものであり、任意

のシェル構造解析に適用するためのアルゴリズムは都井により構成されている³⁾。

本報告では定式化を静的弾塑性微小変形問題に限定し、簡単な解析例とともに、平板剛体要素モデルによる離散化極限解析法の概要を紹介したい。塑性安定問題、動的崩壊問題などへの応用については、次報以下で述べることとする。

2 平板剛体要素モデル

任意形状のシェル曲面を剛体平板三角形要素の集合体に分割し、隣接する2つの剛体三角形要素はその要素境界において、互いの相対的運動に抵抗するばね系により連結されているものとする。

通常の有限要素法により離散化された構造物の全体系剛性方程式は、要素座標系により記述された各要素剛性方程式の座標変換の過程を経て、単一の全体座標系に対して構成されるが、剛体要素モデルを用いた場合は、そ

* 東京大学工学部

** 竹中工務店

*** 東京大学生産技術研究所

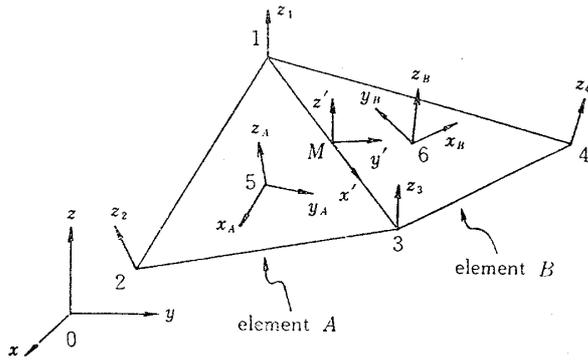


Fig. 1 Two adjacent flat rigid elements

の物理モデルとしての性格より節点あるいは要素内部点の変位自由度の設定が若干変則的であるため、同様の手順を踏むことは一般には不可能である。すなわち、剛体要素モデルにより離散化された構造物の全体系剛性方程式は、適切に定義された要素座標系および節点座標系を用いて局所座標表示されなければならない。この場合、要素座標系を参照するのは要素の内部点自由度であり、節点座標系を参照するのは節点自由度である。したがって、要素境界の剛性特性も初めからこれらの座標系を参照して記述することになり、通常の有限要素法における座標変換の過程は不要となる。

代表的な隣接2剛体三角形要素を Fig. 1 に示す。以下では Fig. 1 を参照しながら定式化を行う。

2.1 諸座標系の定義

定式化に必要な座標系をここで定義しておく。前述したように、要素座標系および節点座標系を変位自由度の参照座標系として用いる。他に、節点座標値を入力し、各局所座標系を定義するための全体座標系、要素間相対変位成分を定義するための要素境界座標系が必要となる。これらはいずれも直角座標系である。

(i) 全体座標系

全体座標系を $(0; x, y, z)$ とする (点0が原点。x, y, z は座標軸。以下同様)。点 i の座標値は (x_i, y_i, z_i) と記述する。

(ii) 要素座標系

要素Aの要素座標系を $(5; x_A, y_A, z_A)$ とする。各座標軸方向の単位ベクトル ($\vec{\cdot}$ により表示する。以下同様) は、要素Aを構成する節点番号を反時計回りに i, j, k として次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}_A &= \frac{1}{l_{ij}} [x_{ji} \ y_{ji} \ z_{ji}] \\ \vec{z}_A &= \frac{1}{2A_A} [y_{ji}z_{ki} - z_{ji}y_{ki} \ z_{ji}x_{ki} \\ &\quad - x_{ji}z_{ki} \ x_{ji}y_{ki} - y_{ji}x_{ki}] \\ \vec{y}_A &= \vec{z}_A \times \vec{x}_A \end{aligned} \right\} (1)$$

ここに、 $x_{ji} = x_j - x_i$ (他も同様)。 l_{ij} は辺 ij の長さ、 A_A は要素Aの面積である。要素Bの要素座標系 $(6;$

$x_B, y_B, z_B)$ も同様に定義される。なお、点5および点6は原則的には要素重心点とする。

(iii) 節点座標系

節点座標系としては面外座標軸のみが必要である。節点1の節点座標軸 z_1 は、節点1を含む要素Eの要素座標軸 z_E (これを $(z_E)_1$ と記す) のベクトルの平均をとることにより

$$\vec{z}_1 = \frac{(\sum_E \vec{(z_E)_1})}{|\sum_E \vec{(z_E)_1}|} \quad (2)$$

と定義する。節点2, 3, 4の節点座標 $\vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4$ も同様に定義される。ただし、実際のシェル曲面の単位法線ベクトルが既知の場合は、それを入力してもよい。

(iv) 要素境界座標系

要素境界座標系を $(M; x', y', z')$ とする。各座標軸方向の単位ベクトルは、次式により定義される。

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}' &= \frac{1}{l_{13}} [x_{31} \ y_{31} \ z_{31}] \\ \vec{z}' &= (\vec{z}_A + \vec{z}_B) / |\vec{z}_A + \vec{z}_B| \\ \vec{y}' &= \vec{z}' \times \vec{x}' \end{aligned} \right\} (3)$$

なお、点Mは要素境界辺 13 の中点とする。

平板剛体要素モデルによる離散化解析においては、要素分割図に従い全節点の全体座標値を入力した後、各要素境界の剛性特性を算定する前に、(1), (2), (3) 式により全要素、全節点、全要素境界辺における局所座標系を定めておかなければならない。

2.2 要素境界の剛性特性

(i) 要素の剛体変位関数

要素Aの要素座標表示された剛体変位関数は、次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_A &= -a_3^A y_A + a_4^A \\ v_A &= a_5^A x_A + a_5^A \\ w_A &= a_1^A y_A - a_2^A x_A + a_6^A \end{aligned} \right\} (4)$$

または

$$\left. \begin{aligned} \{u_A\} &= [H(x_A, y_A)] \{a^A\} \\ \text{ここに} \\ \{u_A\}^t &= [u_A \ v_A \ w_A] \\ \{a^A\}^t &= [a_1^A \ a_2^A \ \dots \ a_6^A] \end{aligned} \right\} (5)$$

ここに、未知係数 a_1^A, a_2^A, a_3^A は要素座標系における x_A, y_A, z_A 軸まわりの回転変位であり、 a_4^A, a_5^A, a_6^A は x_A, y_A, z_A 軸方向の並進変位である。要素Bに対しても同様であり、(4), (5) 式における添字AをBとして表わす。

(ii) 相対変位

要素境界における2要素A, B間の相対変位は、最も一般的には次式の6成分より成る。

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &= (l_x^B a_1^B + m_x^B a_2^B) - (l_x^A a_1^A + m_x^A a_2^A) \\ \phi_y &= (l_y^B a_1^B + m_y^B a_2^B + n_y^B a_3^B) \\ &\quad - (l_y^A a_1^A + m_y^A a_2^A + n_y^A a_3^A) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_z &= (l_z^B a_1^B + m_z^B a_2^B + n_z^B a_3^B) \\ &\quad - (l_z^A a_1^A + m_z^A a_2^A + n_z^A a_3^A) \\ \delta_x &= \{l_x^B (u_B)_M + m_x^B (v_B)_M\} \\ &\quad - \{l_x^A (u_A)_M + m_x^A (v_A)_M\} \\ \delta_y &= \{l_y^B (u_B)_M + m_y^B (v_B)_M + n_y^B (w_B)_M\} \\ &\quad - \{l_y^A (u_A)_M + m_y^A (v_A)_M + n_y^A (w_A)_M\} \\ \delta_z &= \{l_z^B (u_B)_M + m_z^B (v_B)_M + n_z^B (w_B)_M\} \\ &\quad - \{l_z^A (u_A)_M + m_z^A (v_A)_M + n_z^A (w_A)_M\} \end{aligned} \right\} (6)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} l_x^A &= \vec{x}' \cdot \vec{x}_A & m_x^A &= \vec{x}' \cdot \vec{y}_A \\ l_x^B &= \vec{x}' \cdot \vec{y}_B & m_x^B &= \vec{x}' \cdot \vec{y}_B \\ l_y^A &= \vec{y}' \cdot \vec{x}_A & m_y^A &= \vec{y}' \cdot \vec{y}_A & n_y^A &= \vec{y}' \cdot \vec{z}_A \\ l_y^B &= \vec{y}' \cdot \vec{x}_B & m_y^B &= \vec{y}' \cdot \vec{y}_B & n_y^B &= \vec{y}' \cdot \vec{z}_B \\ l_z^A &= \vec{z}' \cdot \vec{x}_A & m_z^A &= \vec{z}' \cdot \vec{y}_A & n_z^A &= \vec{z}' \cdot \vec{z}_A \\ l_z^B &= \vec{z}' \cdot \vec{x}_B & m_z^B &= \vec{z}' \cdot \vec{y}_B & n_z^B &= \vec{z}' \cdot \vec{z}_B \end{aligned} \right\} (7)$$

である。(6)式における ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z は要素境界座標系における x', y', z' 軸まわりの回転相対変位であり、 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ は点 M における x', y', z' 軸方向の並進相対変位である。(6)式に(4)式を代入すると、マトリックス表示による次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \{d\} &= [B]\{a\} \\ \{d\}^t &= [\phi_x \ \phi_y \ \phi_z \ \delta_x \ \delta_y \ \delta_z] \\ \{a\}^t &= [a_1^A a_2^A \dots a_6^A a_1^B a_2^B \dots a_6^B] \end{aligned} \right\} (8)$$

[B]マトリックスの具体形を Table 1 に示す。

(iii) 変位自由度

各剛体要素に独立に6自由度を設定する場合は、(4)式における剛体変位関数の未知係数 a_i^A, a_i^B ($i=1, 2, \dots, 6$) をそのまま変位自由度とすればよい。この場合は、要素境界の剛性特性の定式化に節点座標系は不要であり、全体系剛性方程式を全体座標表示することも可能である。

また、最終強度に及ぼす影響が2次的と考えられるねじり変形および面外せん断変形を無視することを前提として、節点に横たわみの自由度 (w_i)、要素座標系原点(通常は要素重心点)に面内変位の自由度 ($(u_A)_5, (v_A)_5, (\theta_A)_5$ など)を設定する場合は、これらの変位自由度と未知係数 a_i^A, a_i^B の関係を定める必要がある。Fig. 1

の要素Aに対しては次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \vec{\lambda}_1^A \{u_A\}_1 = \vec{\lambda}_1^A [H((x_A)_1, (y_A)_1)] \{a^A\} \\ w_2 &= \vec{\lambda}_2^A \{u_A\}_2 = \vec{\lambda}_2^A [H((x_A)_2, (y_A)_2)] \{a^A\} \\ w_3 &= \vec{\lambda}_3^A \{u_A\}_3 = \vec{\lambda}_3^A [H((x_A)_3, (y_A)_3)] \{a^A\} \\ (u_A)_5 &= -a_3^A (y_A)_5 + a_4^A = a_4^A \\ (v_A)_5 &= a_3^A (x_A)_5 + a_5^A = a_5^A \\ (\theta_A)_5 &= a_3^A \end{aligned} \right\} (9)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{u_A\}_i &= [(u_A)_i \ (v_A)_i \ (w_A)_i] \\ \vec{\lambda}_i^A &= [z_i \cdot x_A \ z_i \cdot y_A \ z_i \cdot z_A] \end{aligned} \right\} (9)$$

同様に要素Bに対しては次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} w_3 &= \vec{\lambda}_3^B \{u_B\}_3 = \vec{\lambda}_3^B [H((x_B)_3, (y_B)_3)] \{a^B\} \\ w_4 &= \vec{\lambda}_4^B \{u_B\}_4 = \vec{\lambda}_4^B [H((x_B)_4, (y_B)_4)] \{a^B\} \\ w_1 &= \vec{\lambda}_1^B \{u_B\}_1 = \vec{\lambda}_1^B [H((x_B)_1, (y_B)_1)] \{a^B\} \\ (u_B)_6 &= -a_3^B (y_B)_6 + a_4^B = a_4^B \\ (v_B)_6 &= a_3^B (x_B)_6 + a_5^B = a_5^B \\ (\theta_B)_6 &= a_3^B \end{aligned} \right\} (10)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{u_B\}_i &= [(u_B)_i \ (v_B)_i \ (w_B)_i] \\ \vec{\lambda}_i^B &= [z_i \cdot x_B \ z_i \cdot y_B \ z_i \cdot z_B] \end{aligned} \right\} (10)$$

(9)式と(10)式をそれぞれ a_i^A, a_i^B について解くことにより、マトリックス表示による次式が定まる。

$$\{a\} = [A]\{u\}$$

ここに

$$\{u\}^t = [w_1 w_2 w_3 w_4 (u_A)_5 (v_A)_5 (\theta_A)_5 (u_B)_6 (v_B)_6 (\theta_B)_6] \quad (11)$$

(11)式の[A]マトリックス内の(9),(10)式から定まる各成分を Table 2 に示しておく。なお、変位自由度を以上のように設定した場合は、相対変位成分中 $\phi_x, \phi_z, \delta_x, \delta_y$ のみが必要となる。

(iv) 合応力

剛体要素 A, B は要素境界において、(6)式の相対変位成分 ($\phi_x, \phi_y, \phi_z, \delta_x, \delta_y, \delta_z$) に抵抗するばね系 ($k_{rx}, k_{ry}, k_{rz}, k_{px}, k_{py}, k_{pz}$) により連結されているものとする。変形後にばね系に生ずる内力は

Table 1 [B] matrix in eq. (8)

	a_1^A	a_2^A	a_3^A	a_4^A	a_5^A	a_6^A	a_1^B	a_2^B	a_3^B	a_4^B	a_5^B	a_6^B
ϕ_x	$-l_x^A$	$-m_x^A$	0	0	0	0	l_x^B	m_x^B	0	0	0	0
ϕ_y	$-l_y^A$	$-m_y^A$	$-n_y^A$	0	0	0	l_y^B	m_y^B	n_y^B	0	0	0
ϕ_z	$-l_z^A$	$-m_z^A$	$-n_z^A$	0	0	0	l_z^B	m_z^B	n_z^B	0	0	0
δ_x	0	0	$l_x^A (y_A)_M$ $-m_x^A (x_A)_M$	$-l_x^A$	$-m_x^A$	0	0	0	$-l_x^B (y_B)_M$ $+m_x^B (x_B)_M$	l_x^B	m_x^B	0
δ_y	$-n_y^A (y_A)_M$	$n_y^A (x_A)_M$	$l_y^A (y_A)_M$ $-m_y^A (x_A)_M$	$-l_y^A$	$-m_y^A$	$-n_y^A$	$n_y^B (y_B)_M$	$-n_y^B (x_B)_M$	$-l_y^B (y_B)_M$ $+m_y^B (x_B)_M$	l_y^B	m_y^B	n_y^B
δ_z	$-n_z^A (y_A)_M$	$n_z^A (x_A)_M$	$l_z^A (y_A)_M$ $-m_z^A (x_A)_M$	$-l_z^A$	$-m_z^A$	$-n_z^A$	$n_z^B (y_B)_M$	$-n_z^B (x_B)_M$	$-l_z^B (y_B)_M$ $+m_z^B (x_B)_M$	l_z^B	m_z^B	n_z^B

Table 2 [A] matrix in eq. (11)

(a) components from eq. (9) ($\times 1/d$)

	w_1	w_2	w_3	$(u_A)_5$	$(v_A)_5$	$(\theta_A)_5$
a_1^A	c_{11}	c_{12}	c_{13}	$-\lambda_{11}c_{11}$ $-\lambda_{21}c_{12}$ $-\lambda_{31}c_{13}$	$-\lambda_{12}c_{11}$ $-\lambda_{22}c_{12}$ $-\lambda_{32}c_{13}$	g_1c_{11} $+g_2c_{12}$ $+g_3c_{13}$
a_2^A	c_{21}	c_{22}	c_{23}	$-\lambda_{11}c_{21}$ $-\lambda_{21}c_{22}$ $-\lambda_{31}c_{23}$	$-\lambda_{12}c_{21}$ $-\lambda_{22}c_{22}$ $-\lambda_{32}c_{23}$	g_1c_{21} $+g_2c_{22}$ $+g_3c_{23}$
a_3^A	0	0	0	0	0	d
a_4^A	0	0	0	d	0	0
a_5^A	0	0	0	0	d	0
a_6^A	c_{31}	c_{32}	c_{33}	$-\lambda_{11}c_{31}$ $-\lambda_{21}c_{32}$ $-\lambda_{31}c_{33}$	$-\lambda_{12}c_{31}$ $-\lambda_{22}c_{32}$ $-\lambda_{32}c_{33}$	g_1c_{31} $+g_2c_{32}$ $+g_3c_{33}$

where $(x_i = (x_A)_i, y_i = (y_A)_i)$
 $c_{11} = \lambda_{23}\lambda_{33}(x_3 - x_2)$ [0]
 $c_{12} = \lambda_{33}\lambda_{13}(x_1 - x_3)$ [d]
 $c_{13} = \lambda_{15}\lambda_{23}(x_2 - x_1)$ [0]
 $c_{21} = \lambda_{23}\lambda_{33}(y_3 - y_2)$ [λ_{33}]
 $c_{22} = \lambda_{33}\lambda_{13}(y_1 - y_3)$ [0]
 $c_{23} = \lambda_{13}\lambda_{23}(y_2 - y_1)$ [$-\lambda_{13}$]
 $c_{31} = \lambda_{23}\lambda_{33}(x_2y_3 - x_3y_2)$ [$\lambda_{33}x_3$]
 $c_{32} = \lambda_{33}\lambda_{13}(x_3y_1 - x_1y_3)$ [0]
 $c_{33} = \lambda_{13}\lambda_{23}(x_1y_2 - x_2y_1)$ [$-\lambda_{13}x_1$]
 $\lambda_i^A = \lambda_{1i} \lambda_{2i} \lambda_{3i}, g_i = \lambda_{1i}y_i - \lambda_{2i}x_i$
 $d = 2 \lambda_{13}\lambda_{23}\lambda_{33} \cdot d_A$ [$\lambda_{13}\lambda_{33}(x_3 - x_1)$]

(b) components from eq. (10) ($\times 1/d$)

	w_1	w_3	w_4	$(u_B)_6$	$(v_B)_6$	$(\theta_B)_6$
a_1^B	c_{13}	c_{11}	c_{12}	$-\lambda_{31}c_{11}$ $-\lambda_{41}c_{12}$ $-\lambda_{11}c_{13}$	$-\lambda_{32}c_{11}$ $-\lambda_{42}c_{12}$ $-\lambda_{12}c_{13}$	g_3c_{11} $+g_4c_{12}$ $+g_1c_{13}$
a_2^B	c_{23}	c_{21}	c_{22}	$-\lambda_{31}c_{21}$ $-\lambda_{41}c_{22}$ $-\lambda_{11}c_{23}$	$-\lambda_{32}c_{21}$ $-\lambda_{42}c_{22}$ $-\lambda_{12}c_{23}$	g_3c_{21} $+g_4c_{22}$ $+g_1c_{23}$
a_3^B	0	0	0	0	0	d
a_4^B	0	0	0	d	0	0
a_5^B	0	0	0	0	d	0
a_6^B	c_{33}	c_{31}	c_{32}	$-\lambda_{31}c_{31}$ $-\lambda_{41}c_{32}$ $-\lambda_{11}c_{33}$	$-\lambda_{32}c_{31}$ $-\lambda_{42}c_{32}$ $-\lambda_{12}c_{33}$	g_3c_{31} $+g_4c_{32}$ $+g_1c_{33}$

where $(x_i = (x_B)_i, y_i = (y_B)_i)$
 $c_{11} = \lambda_{43}\lambda_{13}(x_1 - x_4)$ [0]
 $c_{12} = \lambda_{13}\lambda_{33}(x_3 - x_1)$ [d]
 $c_{13} = \lambda_{33}\lambda_{43}(x_4 - x_3)$ [0]
 $c_{21} = \lambda_{43}\lambda_{13}(y_1 - y_4)$ [λ_{13}]
 $c_{22} = \lambda_{13}\lambda_{33}(y_3 - y_1)$ [0]
 $c_{23} = \lambda_{33}\lambda_{43}(y_4 - y_3)$ [$-\lambda_{33}$]
 $c_{31} = \lambda_{43}\lambda_{13}(x_4y_1 - x_1y_4)$ [$\lambda_{13}x_1$]
 $c_{32} = \lambda_{13}\lambda_{33}(x_1y_3 - x_3y_1)$ [0]
 $c_{33} = \lambda_{33}\lambda_{43}(x_3y_4 - y_3x_4)$ [$-\lambda_{33}x_3$]
 $\lambda_i^B = \lambda_{1i} \lambda_{2i} \lambda_{3i}, g_i = \lambda_{1i}y_i - \lambda_{2i}x_i$
 $d = 2 \lambda_{33}\lambda_{43}\lambda_{13} \cdot d_B$ [$\lambda_{33}\lambda_{13}(x_1 - x_3)$]

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{s\} &= [D]\{d\} \\ \{s\}^t &= [M_x M_y M_z N_x N_y N_z] \\ [D] &= [k_{rx} k_{ry} k_{rz} k_{px} k_{py} k_{pz}] \end{aligned} \right\} (12)$$

と表わされる。ここで、 M_x, M_y, N_x は曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断力であり、 M_z, N_x, N_y は面内モーメント、面内垂直力、面内せん断力である。通常の単位長さ当たりの合応力は上式の $\{s\}$ を l_{13} で除したものであり、これを

$$\{\bar{s}\}^t = [\bar{M}_x \bar{M}_y \bar{M}_z \bar{N}_x \bar{N}_y \bar{N}_z] \quad (13)$$

と記す。なお、要素自由度を (11) 式の $\{u\}$ のように設定した場合は、 M_x, M_z, N_x, N_y のみが必要となる。

(v) 剛性方程式

剛体要素間を結合するばね系に貯えられるひずみエネルギーに Castigliano の定理を適用することにより、次の剛性方程式を得る。まず、各剛体要素に独立に 6 自由度を仮定する場合は

ここに

$$\left. \begin{aligned} [k]\{a\} &= \{f\} \\ [k] &= [B]^t[D][B] \\ \{f\}^t &= [t_x^A t_y^A t_z^A f_x^A f_y^A f_z^A t_x^B t_y^B t_z^B f_x^B f_y^B f_z^B] \end{aligned} \right\} (14)$$

また、変位自由度を (11) 式 $\{u\}$ のように設定する場合は

ここに

$$\left. \begin{aligned} [k]\{u\} &= \{f\} \\ [k] &= [A]^t[B]^t[D][B][A] \\ \{f\}^t &= [f_1 f_2 f_3 f_4 f_x^A f_y^A t_z^A f_x^B f_y^B t_z^B] \end{aligned} \right\} (15)$$

である。(14)、(15) 式の剛性マトリックスの大きさはそれぞれ (12×12) および (10×10) である。また、全体系の総自由度数は、(14) 式によれば $(6 \times \text{総要素数})$ 、(15) 式によれば $(\text{総節点数} + 3 \times \text{総要素数})$ となる。

2.3 境界要素

構造の境界線上、あるいはシェル曲面における勾配、断面常数、材料定数などの不連続線上には剛体線要素を設けると都合がよい。また、線要素を導入することにより、分岐線を含む任意の薄肉、薄板構造解析が可能となる。ここでは境界条件の導入のみを想定して、この線要素と三角形要素間の剛性特性の算定法を述べたい。

変位自由度として $a_i (i=1, 2, \dots, 6)$ を用いる場合は Fig. 1 の節点 2 あるいは 4 が点 M に一致するものと考えれば、前節の定式化を何ら修正することなく得られる。

また、変位自由度を (11) 式 $\{u\}$ のように設定する場合は、若干の変更が必要となる。すなわち、要素 A を線要素とする場合は、変位自由度 w_2 の代わりに線要素の長さ方向に設定した x_A 軸まわりの回転変位 θ_2 を用い、(9) の第 2 式を

$$\theta_2 = a_1^A \quad (16)$$

とし、要素 B を線要素とする場合は、 w_4 の代わりに x_B

軸まわりの回転変位 θ_4 を用い、(10) の第2式を

$$\theta_4 = a_1^B \quad (17)$$

とすればよい。これらの場合の Table 2 の変更については表中の [] 内に示されている。なお、境界要素の要素座標系における z_A 軸あるいは z_B 軸は不定となる ((1) 式を参照) ので、実際のシェル曲面の法線ベクトルを用いるか、あるいは隣接三角形要素の要素座標軸 z を用いるものとする。(2), (3) 式はそのままの形で有効であるが、ベクトルの平均をとる際、線要素の面積が零であることを考慮する方が望ましいと考えられる。

2.4 ばね定数

弾性変形時のばね定数は、前報¹⁾と同様にして次のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} k_{rx} &= 2Dl_{13}/3(d_1+d_2) \\ k_{ry} &= 2D(1-\nu)l_{13}/3(d_1+d_2) \\ k_{rz} &= k_{py}l_{13}^2/12 \\ k_{px} &= El_{13}h/(1+\nu)(d_1+d_2) \\ k_{py} &= El_{13}h/(1-\nu^2)(d_1+d_2) \\ k_{pz} &= \alpha El_{13}h/3(1+\nu)(d_1+d_2) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに、 D は曲げ剛性、 d_1 と d_2 はそれぞれ点5と点6から境界辺13に降ろした垂線の長さ、 h は肉厚、 α は有効せん断係数である。

また、塑性変形時の $[D]$ マトリックスは、適当に仮定された降伏関数

$$f(\bar{M}_x/\bar{M}_{x_0}, \bar{M}_y/\bar{M}_{y_0}, \bar{M}_z/\bar{M}_{z_0}, \bar{N}_x/\bar{N}_{x_0}, \bar{N}_y/\bar{N}_{y_0}, \bar{N}_z/\bar{N}_{z_0}) = 0 \quad (19)$$

を塑性ポテンシャルとして塑性流れ則により定められる。ここに、下添字0は各合応力成分の全断面塑性値を意味する。

3 数値解析例

前章の定式化による薄肉シェルの弾性および塑性解析例を示す。

変位自由度は節点に横たわみ、要素重心点に面内変位の自由度を設定している。この場合、生ずる断面力成分は曲げモーメント \bar{M}_x 、面内モーメント \bar{M}_z 、面内せん断力 \bar{N}_x 、面内垂直力 \bar{N}_y の4成分であるが、面内モーメントの塑性変形に対する影響は副次的なものを見なして無視し、他の3成分による次式の降伏関数を使用する。

$$f(\bar{M}_x, \bar{N}_x, \bar{N}_y) = \left| \frac{\bar{M}_x}{\bar{M}_{x_0}} \right| + \left(\frac{\bar{N}_x}{\bar{N}_{x_0}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{N}_y}{\bar{N}_{y_0}} \right)^2 - 1 = 0 \quad (20)$$

ここに

$$\bar{M}_{x_0} = \frac{1}{4} \sigma_m h^2, \quad \bar{N}_{x_0} = \tau_m h, \quad \bar{N}_{y_0} = \sigma_m h \quad (21)$$

であり、 σ_m および τ_m は平面応力問題における降伏曲面上の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ により構成される最大主応

力と最大せん断応力である。Mises の降伏条件

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (22)$$

(ここに、 σ_0 は単軸状態の降伏応力) に対しては

$$\sigma_m = 2\sigma_0/\sqrt{3}, \quad \tau_m = \sigma_0/\sqrt{3} \quad (\text{Mises-1}) \quad (23)$$

となる⁴⁾。また、平板剛体要素モデルの定式化において無視されている要素境界線方向の直応力成分 σ_y を零と仮定すれば

$$\sigma_m = \sigma_0, \quad \tau_m = \sigma_0/\sqrt{3} \quad (\text{Mises-2}) \quad (24)$$

である。Tresca の降伏条件に対しては両者の区別はなく、いずれの場合も

$$\sigma_m = \sigma_0, \quad \tau_m = \sigma_0/2 \quad (\text{Tresca}) \quad (25)$$

である⁴⁾。

(23) 式を用いると、ほとんどの場合に最高荷重の上界値が得られ、(24) 式を用いた場合は正解値を下回ることがある。上界定理に基づく仮想変形法の立場からは、(23) 式を用いるべきであるが、要素メッシュパターンによる塑性崩壊モードの拘束を緩和する意味で、(24) 式を用いることもできる。以下の塑性解析例では、同じ問題を (23), (24), (25) 式の3種類の降伏関数を用いて解析している。

3.1 円筒殻の弾性解析

Fig. 2 (a) に示す、集中荷重を受ける自由円筒殻の線形解析 (1/8 解析) を行い、結果を SAP による有限要素解と比較した (Fig. 2 (b), (c), (d))。変位には若干の相違が見られるが、塑性解析において重要となる応力の精度は比較的良好である。

3.2 円筒殻の塑性解析

内部液体による側壁圧を受ける円筒タンク (底部固定 頂部自由) の塑性解析を行った。この問題に対する極限解析解は Sawczuk により与えられており⁵⁾、無次元パラメータ $c^2 (= 4L^2/Rh)$ の値により3種類の崩壊モードが現われる (Fig. 3 (d) を参照)。 $c^2 = 144$ の場合の解析結果を Fig. 3 (a), (b), (c) に示す。荷重・たわみ曲線は Mises の降伏条件を仮定した軸対称有限要素解とも比較しており、良好な一致が見られる。Fig. 3 (d) では、3種類の降伏関数による最高荷重値を Sawczuk による理論解と比較しており、この問題の場合は (23) 式の降伏条件が良好な解を与えていることがわかる。

3.3 球殻の塑性解析

Fig. 4 は、一様外圧を受ける周辺固定部分球殻の塑性解析結果であり、Onat と Prager による極限解析解 (上界および下界)⁶⁾ と比較している。Fig. 4 (a), (b) は 1/2 開き角 $\Phi_0 = 30^\circ$ の場合の結果であり、降伏線の進展過程は既発表の軸対称離散化解析解⁷⁾ とほぼ対応することを確認している。Fig. 4 (c) における崩壊荷重値の極限解析解との比較より、概ね良好な解が得られていると判断される。

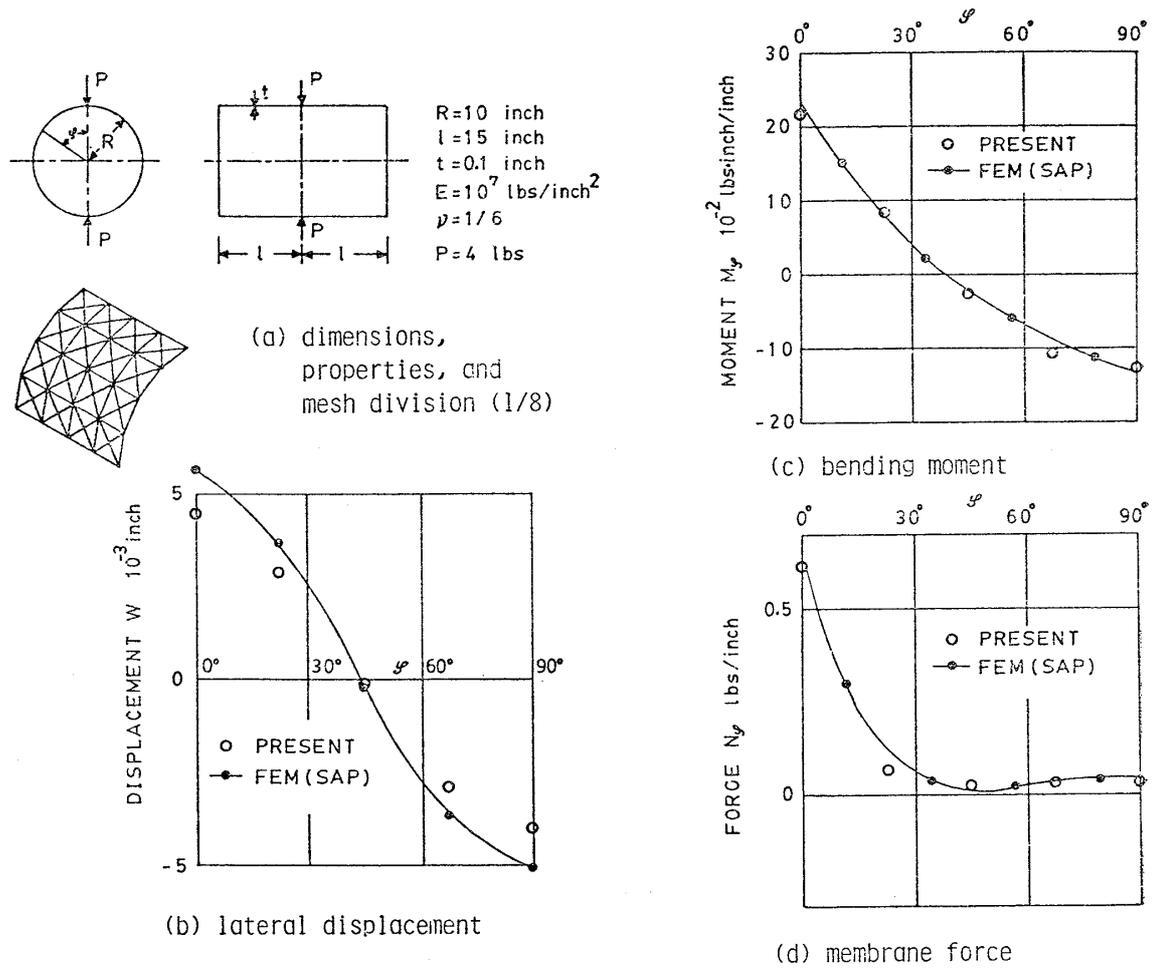


Fig. 2 Elastic analysis of a circular cylindrical shell under concentrated loading

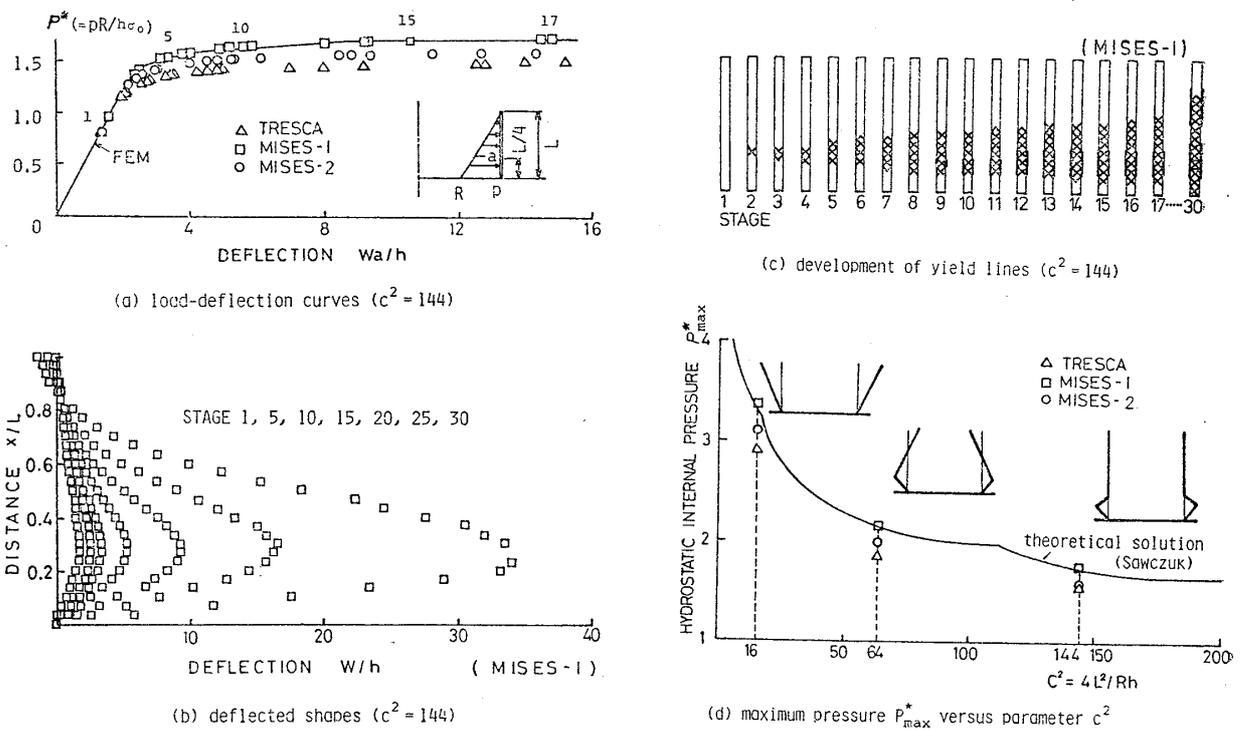
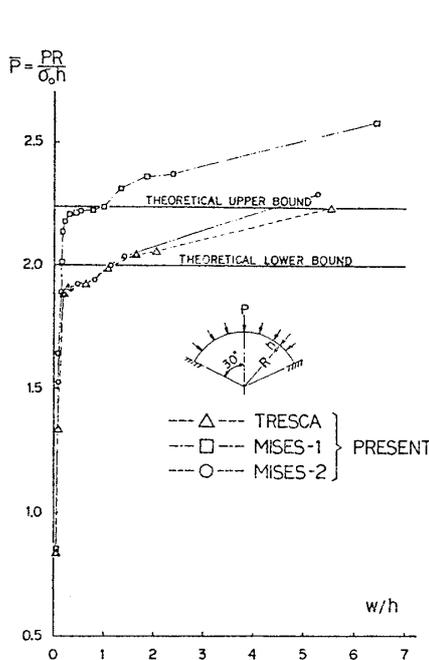
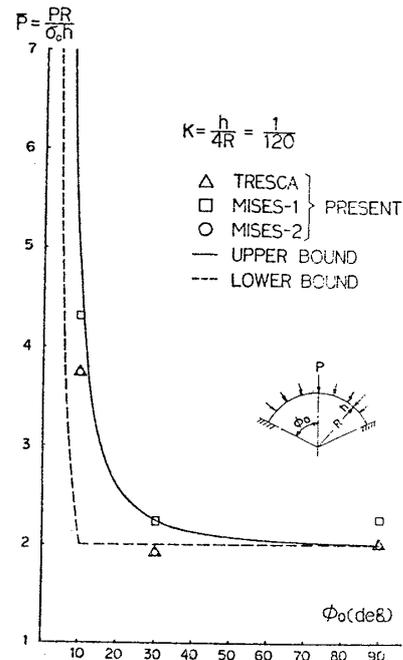


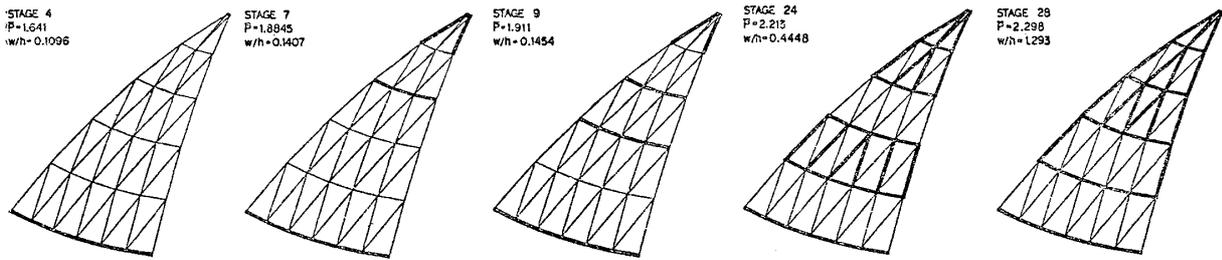
Fig. 3 Plastic analysis of circular cylindrical tanks under hydrostatic internal pressure



(a) load-deflection curves



(c) maximum pressure P versus angle ϕ_0



(b) development of yield lines

Fig. 4 Plastic analysis of spherical caps under external pressure

4. 結 論

本研究では、任意の薄肉構造物の極限強度問題に対する効率的な離散化解析手法の開発の一環として、任意形状シェルの弾塑性微小変形問題を対象とした平板剛体要素モデルの定式化を行い、簡単な解析例によりアルゴリズムを確認した。前報の曲面剛体要素モデルと比較すると、形状近似を含む点が特に粗い要素分割で解析を行う場合に精度低下をもたらすと予想されるが、汎用性は大きく増しており、本報の内容にさらに若干のアルゴリズムを追加することにより、あらゆる形式の薄肉構造物に対する離散化極限解析が可能となる。

本アルゴリズムは、従来の仮想変形法による塑性解析法と実質的に同等の手順をコンピュータシミュレーション用に組織化したアプローチであり、対象となる構造体の幾何学的制約は取り除かれたが、広義の極限強度問題には塑性座屈などの非弾性安定問題、衝撃強度・耐震強度などの動的崩壊問題、クリープなどの時間依存型構成

式を含む一般材料非線形問題などが含まれ、これらの問題を扱えるように本手法を拡張し解析例を集積することが今後の課題であり、その一部はすでに成果が得られている^{8),9)}。

最後に、本論文で提案したアルゴリズムによる任意形状シェルの塑性解析プログラムの開発および数値計算に御助力を頂いている安藤文雄（千代田化工）、黒田道夫（東洋エンジニアリング）、丹羽一邦（日本電子計算）、山本講治（東急建設）の諸氏に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 都井, 上田, 山本, 川井: 薄肉構造の離散化極限解析 (その1) —— 曲面剛体要素モデルの誘導とその応用 ——, 日本造船学会論文集, 第150号 (1981), 413
- 2) 川井: New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集, 第141号 (1977), 174.

- 3) 都井：シェル構造の離散化極限解析(その2)——平板剛体要素モデルの誘導——，生産研究，第33巻，第7号(1981)，1.
 - 4) 山田：塑性力学，日刊工業新聞社，1965.
 - 5) M. S. Save and C. E. Massonet : Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks, North-Holland, 1972.
 - 6) P. G. Hodge Jr.: Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, 1959.
 - 7) 都井，川井：円形アーチ・球殻の解析における新しい離散化モデル，日本造船学会論文集，第144号(1978)，288.
 - 8) 都井，川井：シェル構造の離散化極限解析(その3)——平板剛体要素モデルによる有限変形解析——，生産研究，第33巻，第11号(1981)，16.
 - 9) 都井：平板の塑性座屈モデル，東京大学工学部紀要，〈A〉年報，第19号(1981)，30.
-