The Society of Naval Architects of Japan

（昭和57年5月　日本造船学会春季講演会において講演）

平面応力延性亀裂の進展時の亀裂先端開口角（CTOA）について

正員　小笠原昌雄*　正員　岡村弘之**

The Crack Tip Opening Angle (CTOA) of the Plane Stress Moving Crack

by Masao Ogasawara, *Member*　Hiroyuki Okamura, *Member*

Summary

Recently, Crack Tip Opening Angle (CTOA) was proposed by C. F. Shih et al to describe the instability criterion of ductile crack propagation during plane strain (flat crack) conditions, and was derived by J. R. Rice analytically by means of the slip line field theory and the incremental theory of plasticity. CTOA appears to be applicable in (some or most) cases, but does not accurately describe the plane stress growing crack (slant crack).

Unstable ductile crack propagation of the plane stress crack is widely studied for the safe design of highly pressurized gas pipelines. The impact absorption energy of the Charpy test is well correlated to the fracture arresting properties of the structures, but the mechanics of the fracture are not yet well established.

In this paper, CTOA of the plane stress growing crack is derived from the plane stress plasticity of perfectly plastic materials by Sokolovsky's approach. Our proposed modification of CTOA expressed as follows:

$$\mathrm{CTOA}=(\alpha/\sigma_0)(dJ/dl)+\beta(\sigma_0/E)\ln(eR/r)$$

where, $\beta=1.40$ under the plane stress conditions.

CTOA in the Dugdale model is also defined and compared with the results of laboratory test. The results show that $\alpha=0.5$, and $\beta=1.27$ for plane stress crack growth. These analyses give similar results to those obtained by Rice et al for CTOA under plane strain conditions, that is, $\alpha=0.65$ from the experimental results and $\beta=5.08$ from the slip line theory.

The CTOA obtained for plane stress ductile crack growth is applied to the wide plate tensile crack growth test. The results of the present analysis coincide well with those of the plane stress finite element method (FEM) computed by T. Kanazawa et al. The phenomena of plane stress ductile crack propagation are also explained by the CTOA criterion under plane stress conditions.

記　　号

G：構造物の蓄積エネルギー
R：鋼材の延性亀裂進展抵抗
T：亀裂進展に伴う運動エネルギー
l：亀裂長さ
a：原点から塑性域先端までの距離
r：亀裂先端の微小距離
r_m：プロセスゾーンサイズ
γ：亀裂先端のブランチング（$\gamma_0=70.6°$）
(CTOA)：亀裂先端開口角
$(\mathrm{CTOA})_{psn}$：平面歪型亀裂進展開口角
$(\mathrm{CTOA})_{pss}$：平面応力型亀裂進展開口角
(COA)：亀裂開口角
T_{mat}：鋼材のテアリングモジュラス
J：J積分
$\bar{R}$：塑性域（R：塑性域相当量）
δ：亀裂開口量
δ_0：亀裂先端開口量
E：ヤング率
ν：ポアソン比
(x, y)：直角座標系

* 新日本製鉄(株)製品技術研究所第二研究室
** 東京大学舶用機械工学科

NII-Electronic Library Service

The Society of Naval Architects of Japan

(r, ϕ)：極座標系

$\frac{\partial}{\partial t}=(\dot{\ })$：時間微分表示

e_i：r方向単位ベクトル

h_i：ϕ方向単位ベクトル

σ_{ij}：応力成分

S_{ij}：応力増分

ε_{ij}：歪成分

D_{ij}：歪速度

v_i：速　度

σ：平均応力

σ_0：流動応力

σ_y：降伏応力

k：相当降伏応力

$\bar{\sigma}$：相当応力

$f(\bar{\sigma})$：相当塑性歪

$\varDelta_p$：平均変位の塑性成分

e：自然対数底（2.718…）

1 緒　　言

構造物の不安定延性破壊の条件は，鋼材の切欠延性抵抗の変化と構造物の蓄積エネルギーの変化とによって決まる。すなわち不安定条件は，

$$\partial G/\partial l \geqq \partial R/\partial l \qquad (1)$$

で与えられる[1),2)]。不安定条件後の過剰エネルギーは，運動エネルギーTに転化し

$$\dot{T}=\dot{G}-\dot{R} \qquad (2)$$

で不安定伝播を続けることになる。

従って，不安定延性破壊を防ぐには鋼材の破壊抵抗Rが重要になるが，R曲線は一般に試片形状に依存する量でありR曲線を支配する鋼材固有のパラメーター（クライテリア）が何かということが論点となる。

（1） 平面歪型延性破壊のクライテリア

平面歪型延性破壊においては，Rを支配するクライテリアとしてT_{mat}[3)]，CTOA（亀裂先端開口角）[4)]が提案されており，J. R. Rice ら[5)]はCTOAを次式で与えている。

$$(\mathrm{CTOA})_{\mathrm{psn}}=\frac{\alpha}{\sigma_y}\cdot\frac{dJ}{dl}+\beta\frac{\sigma_y}{E}\ln\frac{eR}{r_m} \qquad (3)$$

ここで $\beta=5.08$ の定数である。Rice はこの式を求めるに当り，すべり線場理論から得られる塑性域内の応力分布を用い，増分型塑性論の増分応力-増分歪の関係からMoving Crack 先端の特異性 $\ln eR/r$ を導いており，第1項は亀裂から十分離れた外力(外変位)に依存するパラメーターとしてJの変化率に比例する量と置いている。

一方，金沢ら[6)]は第1項として外変位に依存する項として，変形が十分進行した時点では

$$(\mathrm{CTOA})_{\mathrm{psn}}=k\frac{d\varDelta_p}{dl}+\beta\frac{\sigma_y}{E}\ln\frac{eR}{r_m} \qquad (4)$$

と置き換えて，CTOAを与えている。そして有限要素法から求めたCTOA と実験から求めた $\varDelta_p$ を用いて（4）式から計算したCTOA とは良く一致することを示した。

（2） 平面応力型延性破壊のクライテリア

金沢らは（4）式を同様に広幅引張テストによる Slant Type 延性破壊に適用したが，有限要素法の結果と一致せず，この原因として（4）式が平面歪型変形に対して求められたものに対し，広幅テストでは平面応力型破壊が起こっており，平面歪型破壊に対し得られた（4）式をそのまま適用できないという結論を出している。

（3） 高圧ガスパイプラインの不安定延性破壊

高圧ガスパイプラインでは内容物が高い物理的エネルギーを持っているため，一旦亀裂が発生した場合，そこから噴出するガスによるパイプの押し広げ，および噴出ガスによる内圧の減少が少ないことから，亀裂が進展を続け，鋼材の切欠延性抵抗値が低い場合に，先の(1)式の条件を満たすと，不安定伝播を起こすと考えられる。しかも破壊は，Slant Type の破壊である。米国 Battelle[7)]，英国 BGC[8)]，その他[9)]の研究機関で高圧ガスパイプラインの不安定延性破壊の実物実験が試みられており，この結果と鋼材のシャルピー吸収エネルギーとの相関から鋼材の必要靱性をシャルピー値で与えているが，これらの破壊に対する破壊力学的取扱いは未だ確立していない。

三村ら[10)]は，実管の破壊エネルギー，運動エネルギー，ガスの押し開きエネルギーを COA(亀裂開口角）の関数として求め，COA がシャルピーの吸収エネルギーに比例する材料固有の値であるという仮定から，運動方程式を立て過去の実管ガスバーストテストのデータを再整理した結果，亀裂の＜伝播一停止＞境界が理論的に得られることを示した。そこで，平面応力型延性破壊に対し，CTOA を導出し，CTOA がクライテリアになり得るか否かを議論し，さらに実管における COA と CTOA との関係を議論しておくことは意味がある。

2 平面応力進展亀裂先端のモデル化

平面歪変形では，亀裂先端の変形域は Fig. 1(a)に示すようにy軸方向に伸びる。一方 Fig. 1(b)に示すように平面応力では変形はx軸方向に伸びる[11)]。広幅テストで平面応力型破壊進展亀裂の先端を観察すると，Fig. 2 に示すようにモデル化される。見掛上全面降伏した試片であっても，板厚中央部では，Fig. 2(b) に示すような Candle Flame タイプの平面応力型の変形が集中した領域が進行する。以上の観測は停止亀裂の先端の変形に対する Hahn ら[11)]の詳細な観察結果とも良く一致している。

2.1 Dugdale Modelから導出されるMoving Crack の CTOA

以上の観察から亀裂先端の変形は Dugdale Model か

NII-Electronic Library Service

The Society of Naval Architects of Japan

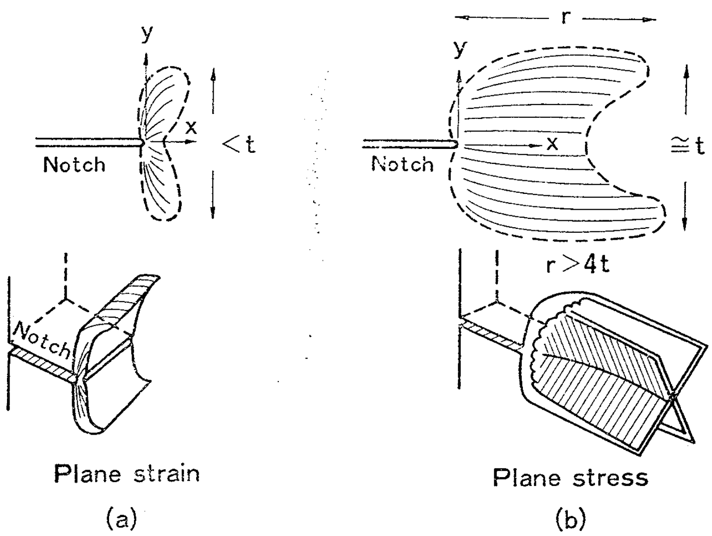


Fig. 1　Plane strain, plane stress deformation fields (Rosenfield, et al.[11])

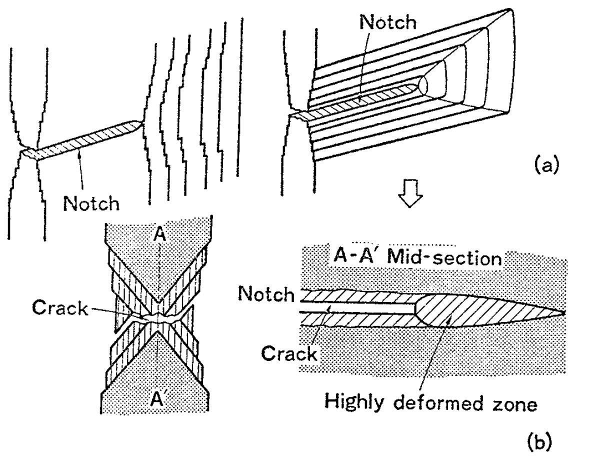


Fig. 2　Crack tip deformation field in plane stress ductile crack extension

ら期待されるものと共通する点があり，解析解が与えられている Dugdale Model から CTOA を求めることを試みる。

Dugdale Model から得られる変形域は Goodier ら[12]によって次のように与えられている。

$$\frac{4\pi\mu}{(\kappa+1)\sigma_0}\delta=x\ln\frac{\sin^2(\theta_2-\theta)}{\sin^2(\theta_2+\theta)}+l\ln\frac{(\sin\theta_2+\sin\theta)^2}{(\sin\theta_2-\sin\theta)^2} \tag{5}$$

ここで

$$x=a\cos\theta,\ \ l=a\cos\theta_2\left(\theta_2=\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)},\ \ \kappa=\begin{cases}(3-\nu)/1+\nu & \text{平面応力}\\ 3-4\nu & \text{平面歪}\end{cases}$$

である。延性亀裂の進展は亀裂先端に塑性変形領域を残して行くが，Dugdale Model ではこの効果が入ってこないため，進展後の亀裂には進展前の変形形状がそのまま維持されると考えることにより CTOA を次のように定義する (Fig. 3)。

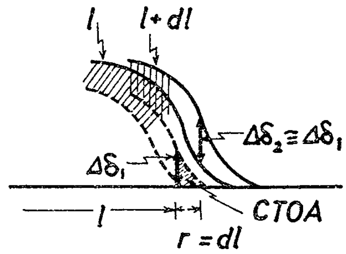


Fig. 3　CTOA in dugdale crack

$$\mathrm{CTOA}=\left(\frac{\partial\delta}{\partial l}\right)_{x\to l+r}\quad(r\ll 1) \tag{6}$$

(5) 式を l で偏微分することにより (6) 式を計算することができる。x, θ_2 固定で,

$$\frac{4\pi\mu}{(\kappa+1)\sigma_0}\left(\frac{\partial}{\partial l}\delta\right)=2\ln\frac{\sin\theta_2+\sin\theta}{\sin\theta_2-\sin\theta}$$

$$=2\ln\frac{\sqrt{a^2-l^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-l^2}-\sqrt{a^2-x^2}}$$

ここで $x\to l+r$, $r\ll 1$, $R=a-l$, $r\ll l\ll a$ とすれば,

$$\frac{4\pi\mu}{(\kappa+1)\sigma_0}\left(\frac{\partial\delta}{\partial l}\right)_{x\to l+r}=2\ln\frac{4Ra}{2lr}$$

従って，平面応力における CTOA は次式で与えられる。

$$(\mathrm{CTOA})_{\mathrm{pss}}=\left(\frac{\partial\delta}{\partial l}\right)_{x\to l+r}=\frac{4\sigma_0}{\pi E}\left[\ln\frac{a}{l}+\ln\frac{2R}{r}\right] \tag{7}$$

さらに J を l で偏微分することにより次の式が得られる。

$$J=\sigma_0\delta_0=\frac{8\sigma_0{}^2}{\pi E}l\cdot\ln\sec\theta_2$$

$$\frac{\partial J}{\partial l}=\frac{8\sigma_0{}^2}{\pi E}\cdot\ln\sec\theta_2=\frac{8\sigma_0{}^2}{\pi E}\ln\left(\frac{a}{l}\right)$$

これを (7) 式に代入して書き換える。

$$(\mathrm{CTOA})_{\mathrm{pss}}=\frac{1}{2\sigma_0}\frac{dJ}{dl}+\frac{4\sigma_0}{\pi E}\ln\frac{2R}{r} \tag{8}$$

Dugdale Model は平面応力同様に，平面歪の場合にも適用できるが，平面歪状態においては亀裂先端の3軸性を考慮する必要がある。形式的に降伏応力が3軸状態により上昇していると考えれば，同様に平面歪進展亀裂に対する CTOA を定義することが可能である。すなわち,

$$(\mathrm{CTOA})_{\mathrm{psn}}=\frac{1}{2\eta\sigma_y}\cdot\frac{dJ}{dl}+4\frac{(1-\nu^2)\eta}{\pi}\cdot\frac{\sigma_y}{E}\ln\frac{2R}{r} \tag{8)'$$

ただし，ここで η は3軸度を示すパラメーターであり,

$$\eta\leqq 1+\frac{\pi}{2}$$

である。

2.2 特性線場理論を用いた平面応力型 Moving Crack の CTOA

亀裂先端が平面応力型変形をする場合，亀裂が無限に鋭い場合は理論的に直線的変形が進行する (Fig. 4(a))。

NII-Electronic Library Service

The Society of Naval Architects of Japan

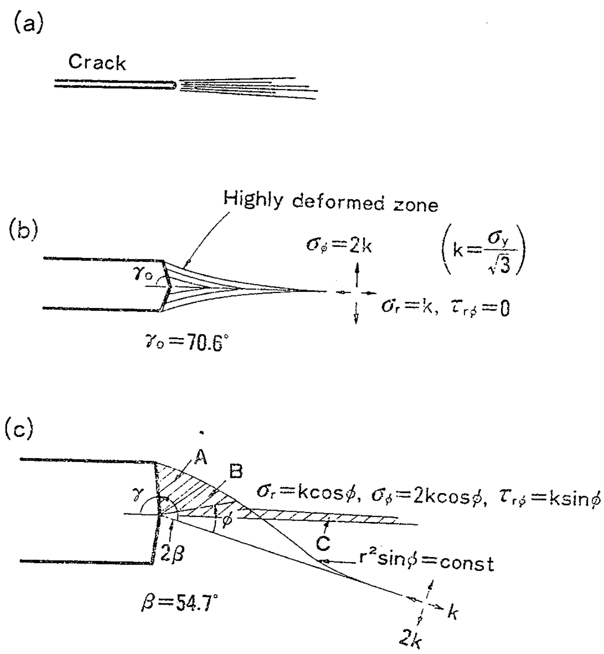


Fig. 4 Perfectly plastic plane stress deformation at the crack tip

しかし亀裂は荷重上昇とともに先端が Blunting すると考えられる。その際，亀裂先端は Fig. 4(b) に示すように角度 γ を持つと考えると，$\gamma_0=70.6°$ の時，x 軸は特性線場の基線となる。応力は基線上で $\sigma_\phi=2k(k=\sigma_y/\sqrt{3})$, $\sigma_r=k$, $\tau_{r\phi}=0$, さらに変形が進むと Fig. 4(c) のようになり領域Cが発生する。ここで領域 A, C は応力，変位一定場である。従って亀裂進展に伴う変位速度はB領域内に発生する。平面応力型変形による応力および特性線については Sokolovsky[13] の方法を用いて次のように求められる（付録1)。

$$\text{B 領域の応力}\left\{\begin{array}{l}\sigma_\phi=2k\cos\phi\\ \sigma_r=k\cos\phi\\ \tau_{r\phi}=k\sin\phi\end{array}\right. \qquad (9)$$

特性線　$r^2\sin\phi=\mathrm{const.}$

今，平面応力型亀裂の進展は変形が亀裂先端に集中する領域（例えば Process zone または Highly deformed zone）で起こると仮定し，Fig. 5 (a)～(d) に示す開口，進展のくり返しと考える。このような変形は先の観察結果とも矛盾しない。

増分型塑性論の定式を用いて歪速度の成分を求める。

$$D_{ij}=\left[\frac{1+\nu}{E}\dot{S}_{ij}+\frac{1-2\nu}{E}\delta_{ij}\dot{\sigma}\right]+\dot{\Lambda}S_{ij} \qquad (10)$$

ここで

$$\dot{\Lambda}=\frac{3}{2}\frac{f'(\bar{\sigma})}{\bar{\sigma}}\dot{\bar{\sigma}},\quad D_{ij}=\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

e_i, h_i をそれぞれ r 方向，ϕ 方向の単位ベクトルとして歪速度の (r,r) 成分を求める。ここで $(e_i)'=h_i$, $(h_i)'=e_i$ である。(10) 式左辺は

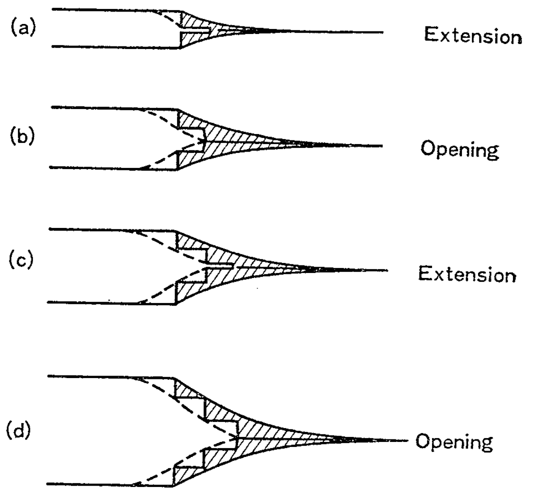


Fig. 5 Ductile crack extension model in plane stress perfectly plastic materials

$$e_iD_{ij}e_j=\dot{\varepsilon}_{rr}=\frac{\partial v_r}{\partial r}$$

となる。

さらに (10) 式右辺を求める。右辺第1項

$$e_i\dot{S}_{ij}e_j=(e_iS_{ij}e_j)^{\cdot}-2\dot{e}_iS_{ij}e_j$$
$$=\dot{S}_{rr}-2\dot{\phi}h_iS_{ij}e_j=\dot{S}_{rr}-2\dot{\phi}S_{r\phi}$$

ここで $x=l+r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$ から $\dot{\phi}=\frac{\dot{l}}{r}\sin\phi$, $\sigma_r=k\cos\phi$, $\sigma_\phi=2k\cos\phi$, $\tau_{r\phi}=k\sin\phi$ であるから，

$$S_{rr}=\sigma_r-\frac{1}{3}(\sigma_r+\sigma_\phi)=0,\quad S_{r\phi}=\tau_{r\phi}=k\sin\phi$$

従って，

$$e_i\dot{S}_{ij}e_j=-2k\sin^2\phi\cdot\frac{\dot{l}}{r}$$

右辺第2項

$$e_i\delta_{ij}e_j\dot{\sigma}=\delta_{rr}\dot{\sigma}=\dot{\phi}\sigma'=-k\sin^2\phi\cdot\frac{\dot{l}}{r}$$

右辺第3項

$$\dot{\Lambda}e_iS_{ij}e_j=\dot{\Lambda}S_{rr}=0$$

従って，v_r が次のように求まる。

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}=-\frac{3}{E}k\sin^2\phi\cdot\frac{\dot{l}}{r}$$

$$v_r=\frac{\sqrt{3}}{E}\sigma_y\dot{l}\sin^2\phi\cdot\ln\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)+f'(\phi) \qquad (11)$$

また，同様に v_θ を次のように求めることができる。

$$D_{11}+D_{22}=D_{rr}+D_{\phi\phi}=\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

$$S_{11}+S_{22}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22})=k\cos\phi$$

$$\dot{S}_{11}+\dot{S}_{22}=-k\dot{\phi}\sin\phi=-k\sin^2\phi\cdot\frac{\dot{l}}{r}$$

$$\dot{\sigma}=\frac{1}{3}(\dot{\sigma}_{11}+\dot{\sigma}_{22})=-k\sin^2\phi\cdot\frac{\dot{l}}{r}$$

従って，

NII-Electronic Library Service

The Society of Naval Architects of Japan

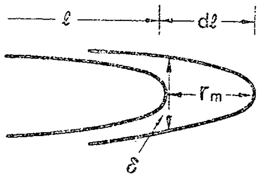


Fig. 6 CTOA in ductile crack extension

$$D_{11}+D_{22}=-\frac{\sqrt{3}(1-\nu)}{E}\sigma_y\sin^2\phi\cdot\frac{\dot{l}}{r}+\dot{\Lambda}\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}\cos\phi$$

となり，先の v_r を用いて v_ϕ を求める。

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}=\frac{\sqrt{3}}{E}\nu\sigma_y\dot{l}\sin^2\phi+r\dot{\Lambda}\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}\cos\phi-\frac{\sqrt{3}}{E}\sigma_y\dot{l}\sin^2\phi\ln\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)$$

$$v_\phi=\frac{\sqrt{3}}{E}\sigma_y\dot{l}\left[\nu-\ln\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)\right]\frac{1}{2}(\phi-\sin\phi\cos\phi)-f(\phi)+g(r) \qquad (12)$$

ここで，$r\dot{\Lambda}\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}\cos\phi\ll1$ として省略した（付録2）。

また亀裂先端近傍（$r\to0$）での変位の変化率はないことから次式が成立する。

$$g(r)\to0 \quad (r\to0)$$

従って，

$$\frac{1}{2}\dot{\delta}=v_r\sin\phi+v_\phi\cos\phi$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{E}\sigma_y\dot{l}\left[\sin^3\phi-\frac{1}{2}\left(\phi-\frac{1}{2}\sin2\phi\right)\cos\phi\right]\times\ln\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)+F(\phi,\dot{l})$$

角度 ϕ は 54.7° がB領域の存在する限界であるから，これを最大と考え，また Rice が平面歪亀裂進展に仮定したと同様 $\dot{l}$ が十分小さい場合，亀裂から十分離れた地点では J の変化率に比例すると考える。

$$\dot{\delta}=\frac{1.4}{E}\sigma_y\dot{l}\ln\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)+\frac{\alpha}{\sigma_y}\dot{J}$$

これを時間についての積分を行う（Fig. 6）。

$$\delta=\int_0^t\dot{\delta}dt=\int_0^\delta d\delta,\quad r_m=\int_0^t\dot{l}dt=\int_0^{r_m}dl$$

$$\delta=\frac{1.4}{E}\sigma_y r_m\ln\left(\frac{eR}{r_m}\right)+\frac{\alpha}{\sigma_y}\cdot\frac{dJ}{dl}\cdot r_m$$

従って，平面応力亀裂進展における CTOA が求まる。

$$(\mathrm{CTOA})_{\mathrm{pss}}=\frac{\delta}{r_m}=\frac{1.4}{E}\sigma_y\ln\left(\frac{eR}{r_m}\right)+\frac{\alpha}{\sigma_y}\cdot\frac{dJ}{dl} \qquad (13)$$

2.3 平面歪，平面応力 CTOA の比較，検討

以上のように平面歪，平面応力型延性亀裂の進展に対し，CTOA を求めたが，いずれの場合も，ln$(1/r)$ の特異性を持っている。また Dugdale Model から定義される CTOA から亀裂先端特異性 ln$(1/r)$ の項のみならず，dJ/dl に比例する項も厳密に求められることがわかり，Rice が $\dot{l}$ が十分小さい場合，$\dot{\delta}$ が $\dot{J}$ に比例すると考えたことは理論的に裏付けられる。

$$(\mathrm{CTOA})=\frac{\alpha}{\sigma_y}\cdot\frac{dJ}{dl}+\beta\frac{\sigma_y}{E}\ln\left(\frac{eR}{r_m}\right) \qquad (14)$$

ここで係数 α，および β について以上の議論を比較する。

平面歪の場合，η の最大値で与えることにする。

〈β〉値

平面歪	$\beta=5.08$（すべり線法）($\nu=0.3$)	J. R. Rice
	$\beta=2.98$ (Dugdale Model) ($\nu=0.3$)	当解析
平面応力	$\beta=1.40$（特性線法）	当解析
	$\beta=1.27$ (Dugdale Model)	当解析

以上 J. R. Rice が求めた平面歪亀裂進展に対する CTOA をここで求めた，Dugdale Model および特性線理論から求めた CTOA と比較した。平面応力に対しては Dugdale Model から得られる CTOA は特性線法から求めるものと良く一致する。一方平面歪に対しては Dugdale 法とすべり線法との一致はあまり良くない。

〈α〉値

Rice は平面歪亀裂進展の実験を行い小規模降伏の場合，$\alpha=0.65$ と求めている。一方当解析において，平面応力に対しては $\alpha=0.5$ が得られており Rice の結果と良く一致するが，平面歪に対しては $\alpha=1/2\eta=0.2(\eta=2.57)$ となっている。すなわち，平面歪時は α,β ともに Rice の結果より小さい。Dugdale Model は亀裂先端の3軸性を考慮していないことから以上の不一致が得られたと考えられる。

2.4 クライテリアとしての CTOA

金沢ら[6]は平面歪型亀裂進展に対し，Rice の式を適用し CTOA が平面歪不安定破壊のクライテリアになることを示し，また有限要素法により求めたものと良く一致することを示した。しかし平面応力型破壊に対しては，

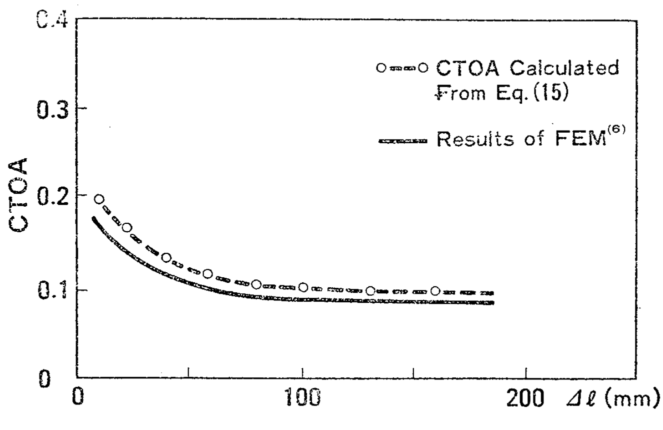


Fig. 7 Comparison between the results of FEM and the results of wide plate test (Room temperature $2l/w=0.5$)

NII-Electronic Library Service

The Society of Naval Architects of Japan

有限要素法の結果と Rice の CTOA の式とは一致しない点を指摘している。そこで同じデータを用い，ここで求めた (13) 式を用い，平面応力型延性亀裂進展に対する CTOA を求め先の金沢らの有限要素法の結果と比較してみた (Fig. 7)。有限要素法の結果は，平面応力条件下で計算されたものであり，(13)式から実験的に求められる CTOA と良く一致している。金沢らの検討と今回の検討とを比べると (13) 式における β が，今回の場合 1.27～1.4 と小さいことであり，$\ln(1/r)$ の項の効き方が小さいことになる。一方金沢らは，$\beta=5.08$ を用いており，それによって $\ln(1/r)$ の項が dJ/dl の項と同一オーダーになったことにより，有限要素法の結果と一致しなかったと考えられる。

3 結論

1. Dugdale Model から CTOA を $(\partial\delta/\partial l)_{x\to l+r}$ ($r \ll 1$) で定義すれば，進展亀裂先端で $\ln(1/r)$ の特異性が得られる。
2. 平面応力変形を Sokolovsky の特性線理論を用いて解析し，平面応力型進展亀裂の CTOA を求めることができる。
3. ここで求めた CTOA の各係数を Rice が平面歪に対し求めたものと比較すると次のようになる。

$$\mathrm{CTOA}=\frac{\alpha}{\sigma_y}\cdot\frac{dJ}{dl}+\beta\frac{\sigma_y}{E}\ln\left(\frac{eR}{r}\right)$$

$$\alpha=\begin{cases}0.65 & \text{平面歪}\quad \text{J. R. Rice (実験値)}\\ 0.5 & \text{平面応力}\quad \text{Dugdale 法を用いた当解析}\end{cases}$$

$$\beta=\begin{cases}5.08 & \text{平面歪}\quad \text{J. R. Rice (理論値)}\\ 1.27 & \text{平面応力}\quad \text{Dugdale 法を用いた当解析}\\ 1.40 & \text{平面応力}\quad \text{特性線法を用いた当解析}\end{cases}$$

これら解析結果の一致は極めて良い。

4. 平面応力型延性亀裂進展現象も，平面歪型延性亀裂進展と同様に，CTOA クライテリアで説明できる。

謝辞

当論文を仕上げるに当り造船学会第1分科会の皆様，および東京大学船舶工学科 町田 進教授，東京大学名誉教授 金沢武博士，また新日鉄製品技術研究所 柳本左門博士，三村 宏博士に御指導，御助言をいただきました。

参考文献

1) Carman, C. M.: Plane Stress Fracture Testing Using Center-Cracked Panels, ASTM STP 527 (1973), p. 62.
2) 岡村弘之：線型破壊力学入門，破壊力学と材料強度講座（I），木原 博監修，培風館 (1976)，p. 151.
3) Paris, P. C., et al.: A Treatment of the Subject of Tearing Instability, NRL Report, NUREG-0311 (1977).
4) Shih, C. E., et al.: Studies on Crack Initiation and Stable Crack Growth, ASTM STP 668 (1979), p. 65.
5) Rice, J. R., et al.: Continuing Crack-Tip Deformation and Fracture for Plane-Strain Crack Growth in Elastic-Plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 26 (1978), p. 163.
6) 金沢 武，他：安定延性亀裂成長後の不安定延性破壊発生挙動について(第二報)，日本造船学会論文集，第148号 (1980)，p. 205.
7) Eiber, R. J.: Fracture Propagation Control Methods, Symp. on Line Pipe Research, Pipeline Research Committee of American Gas Association (1979), L-1.
8) Poynton, W. A.: A Theoretical Analysis of Shear Fracture Propagation in Backfilled Gas Pipelines, Crack Propagation in Pipelines, Newcastle, England (1974), Paper 15.
9) Shoemaker, A. K.: Running Shear Fractures in Line Pipe Subcommittee Summary Report-AISI Committee of Large Diameter Line Pipe Producers (1974).
10) 三村 宏，小笠原昌雄：ガスパイプラインの不安定延性破壊の1モデル，日本鉄鋼協会第100回講演大会 (1980).
11) Rosenfield, A. R.: Crack Extension and Propagation under Plane Stress, Int. Conf. on Fracture, No. 1 (1965), A 179.
12) Drucker, D. C., et al.: Fracture of Solids, Metallurgical Society Conference (AIME), Vol. 20 (1962), p. 103.
13) ソコロフスキイ，B. B.: 塑性学 (大橋義夫訳)，朝倉書店 (1959)，p. 209.

付録 1

Sokolovsky の平面応力特性線理論(板厚方向の変動を無視する) によると，主応力 σ_1, σ_2 はパラメーター ω を用いて，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)=k\sin\omega\\&\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)=\sqrt{3}\,k\cos\omega\quad(\sigma_1\geqq\sigma_2)\end{aligned}\right\}\qquad(\text{付-1})$$

また主応力 σ_1 が x 軸となす角を φ とすると一般座標系で，

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{matrix}\sigma_x\\\sigma_y\end{matrix}\right\}=k(\sqrt{3}\cos\omega\pm\sin\omega\cos2\varphi)\\&\tau_{xy}=k\sin\omega\sin2\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(\text{付-2})$$

特性線は

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{3}\sin\omega\sin2\varphi\pm\sqrt{3-4\cos^2\omega}}{\sqrt{3}\sin\omega\cos2\varphi-\cos\omega}\qquad(\text{付-3})$$

$$\sqrt{3}\sin\omega\sin2\varphi+2\sin\omega\frac{d\varphi}{d\omega}-(\sqrt{3}\sin\omega\cos2\varphi-\cos\omega)\frac{dy}{dx}=0$$

で与えられる。ここで

NII-Electronic Library Service

The Society of Naval Architects of Japan

$$\chi(\omega)=-\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\omega}\frac{\sqrt{3-4\cos^2\omega}}{\sin\omega}d\omega$$

とおくと

$$\chi(\omega)\pm\varphi=\mathrm{const.} \qquad (付-4)$$

となる。

さらに $3-4\cos^2\omega\geqq 0$ の場合（双曲線型）

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\omega=\cos\phi \quad (0\leqq\phi\leqq 54.7°)$$

と置き換えれば $\phi=0\left(\omega=\dfrac{\pi}{6}\right)$ は $\chi(\omega)=0$ に対応し，$\sigma_1=2k$，$\sigma_2=k$ となり，$\phi=0$ は基線となる。

従って ϕ は基線からの角度を表示する形になり，この ϕ を用いて特性線を求める。

（付-4）式を ϕ で書き換えると次のようになる。

$$\chi+\phi=\frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan\phi)$$

特性線に沿って $\chi+\varphi=\mathrm{const.}$，基線上では $\chi(\omega)=0$，$\varphi=\pi/2$ であるから $\chi+\varphi=\pi/2$ を用いると，

$$\frac{\pi}{2}-\varphi+\phi=\frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan\phi) \qquad (付-5)$$

となる。

この時，（付-3）式は

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}-\dfrac{\sin\phi\cos\phi}{1+\sin^2\phi}\\ \text{or}\quad\tan\phi\end{cases}$$

すなわち次の形になる。

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\cot\phi\\ \text{or}\quad\infty\end{cases} \qquad (付-6)$$

（付-6）式を積分して，第1種の特性線が求まる。

$$r^2\sin\phi=\mathrm{const.} \qquad (付-7)$$

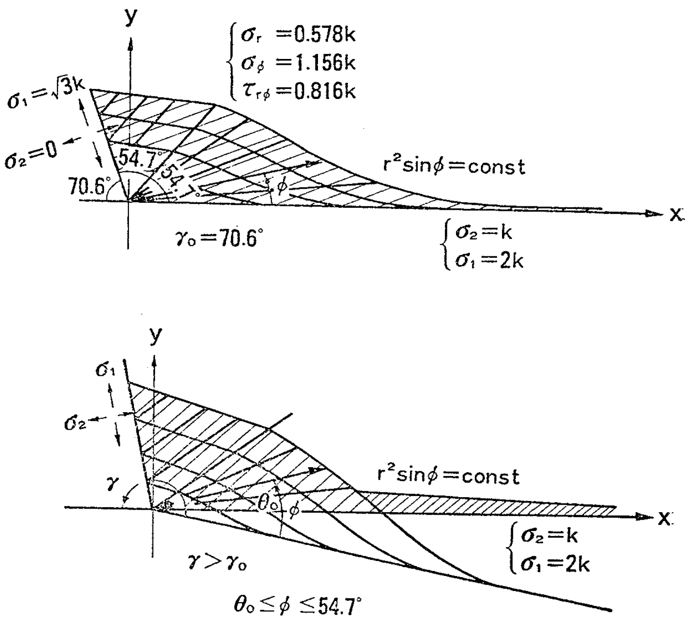
この時応力は，

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\phi\end{matrix}\right\}=k[\sqrt{3}\cos\omega\pm\sin\omega\cos 2(\varphi-\phi)]$$

$$\tau_{r\phi}=k\sin\omega\sin 2(\varphi-\phi)$$

を用いて次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=k\cos\phi\\ \sigma_\phi&=2k\cos\phi\\ \tau_{r\phi}&=k\sin\phi\end{aligned}\right\} \qquad (付-8)$$



Appendix Fig. 1　Characteristic field in plane stress condition

付　　録　2

項 $2r\dot{\Lambda}(\sigma_y/\sqrt{3})\sin\phi\cos\phi$ が $r\ll 1$ で省略できる条件を求める。

$$2r\dot{\Lambda}\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}\sin\phi\cos\phi\ll\frac{1.4}{E}\sigma_y\dot{l}\ln\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)$$

$$\dot{\Lambda}=\frac{3}{2}\cdot\frac{f'(\bar{\sigma})}{\bar{\sigma}}\cdot\dot{\bar{\sigma}}$$

ここでS-Sカーブを $\varepsilon=\varepsilon_y(\bar{\sigma}/\sigma_y)^n$ と仮定すると，$\bar{\sigma}\cong\sigma_y$ の条件下では，

$$r\frac{\sqrt{3}}{2.8}\sigma_y\sin 2\phi\ll\frac{dl}{d\varepsilon}\ln\left(\frac{\bar{R}}{r}\right)$$

となる。さらに $\phi\leqq 54.7°$，$\sigma_y\cong 40\,\mathrm{kg/mm^2}$ として，$dl/d\varepsilon\cong 2$（$dl\cong 0.1\,\mathrm{mm}$，$d\varepsilon<0.05$ 一様伸び限界）と取ると $R\cong 50\,\mathrm{mm}$ に対し，

$$r\ll 0.42\,\mathrm{mm}$$

となる。従って，塑性域が十分大きく，また r が十分小さければ，先の条件は成立すると考えられる。

NII-Electronic Library Service