

(昭和 57 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

ジャーナル軸受内油膜の動的特性

正員 山本善之* 正員 大坪英臣*
正員 森下信**

Dynamic Characteristics of the Oil Film in Journal Bearings

by Yoshiyuki Yamamoto, *Member* Hideomi Ohtsubo, *Member*
Shin Morishita, *Member*

Summary

Many authors have investigated dynamic characteristics of the oil film in journal bearings theoretically. These characteristics can be expressed in terms of stiffness and damping coefficients on the basis of the linearized theory, and have been applied for practical problems, although they do not necessarily agree with experimental results.

The present authors verify the validity of the linearized theory by examining the oil film condition in journal bearings theoretically and experimentally. Conclusions are as follows: Considerable pressure change is caused by the squeeze and strip effects on the unloaded side of the steady-state oil film, and gives significant influences on the stiffness and damping coefficients.

1 緒 言

一般に船舶では、小型船を除いて、主機とプロペラを結ぶ軸はすべり軸受の一種であるジャーナル軸受で支持されており、プロペラ、軸の重量などはすべて軸受内の油膜中に発生する圧力で支えられていることになる。しかし、この油膜の厚さは極めて薄いうえに、その挙動は複雑で、特に動的問題に対して不明な点が多い。そのため、従来の軸系の振動解析では油膜の特性をあまり考慮せず、軸の支持条件を単純支持あるいは線形バネ支持などで簡略化している¹⁾²⁾。ところが、近年建造される傾向にある省エネルギーを目指した船舶では、大口径低回転プロペラの採用により軸は大重量、高剛性となる反面、二重底の剛性は相対的に低下したため、軸受の使用条件が変化し、その境界となる油膜に関し詳細な検討を加えることが必要である。

ジャーナル軸受の油膜特性に関する研究は過去にも数多く行われており、静的問題の範囲では現象がほぼ把握される一方で、動的問題に対してもその特性を弾性係数、減衰係数の形で求めることが、主に理論的に試みられている^{3)~5)}。しかし、その際の油膜の挙動が明らかにされていないため、各係数に大きな影響を与える油膜の境界条件にも定まったものがない。さらに実験において

も測定の対象となるものが極めて小さく、実験方法、精度などにも問題があり、理論と必ずしも一致しないことが示されている⁶⁾⁷⁾。

本研究では、まず実際の現象を把握するために、油膜の弾性係数、減衰係数を求めることを目的として模型装置を製作し実験を行った。すなわち、ジャーナル軸受に支えられた軸に周期的な外力が加わった時の軸と軸受の相対変位および軸受反力を測定し、その結果を用いて油膜の弾性係数、減衰係数を算出した。また、これらの各係数を従来考えられている理論と比較したが、よい一致が得られなかった。そこで従来無視していた軸受の反負荷側の油膜の影響を考慮し、キャビテーションにより油膜が帯状に分かれていると仮定した理論により動的な場合の妥当な結果が得られた。

2 実 験

軸が定常回転をしているとき軸受荷重は油膜力と釣り合って軸心は平衡状態にある。この油膜力は軸と軸受の相対位置、相対速度などの関数で強い非線形性を有しているが、微小振動を考えると、次のような線形化した運動方程式が書ける。

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta f_x \\ \Delta f_y \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで軸心の平衡点からの微小変位を $(\Delta x, \Delta y)$ 、微小速度を $(\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y})$ 、変動油膜反力を $(\Delta f_x, \Delta f_y)$ とする。

* 東京大学工学部

** 東京大学工学系大学院

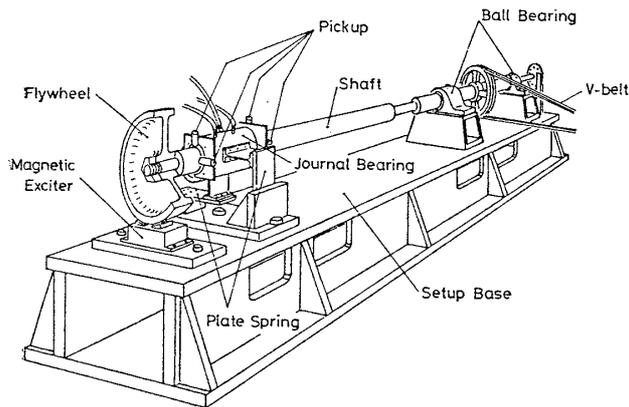


Fig. 1 General view of apparatus

$k_{xx} \sim k_{yy}$ が油膜の弾性係数, $c_{xx} \sim c_{yy}$ が減衰係数と呼ばれている。調和振動を仮定すれば, $(\Delta x, \Delta y)$ の表わす軌跡は楕円となる。

ここでは, 実験的に油膜の弾性係数および減衰係数を求めるために, 次のように模型実験を行った。

実験装置

実験装置の概略を Fig. 1 に示す。この装置の特徴は,

- (1) 純粋な相対変位を測定できること
- (2) 軸の支持軸受と供試ジャーナル軸受の距離をとることにより支持軸受の影響を極力おさえたことである。

軸は中実丸棒を切削研磨して $36 \text{ mm}\phi$ に仕上げている。一端をころがり軸受 2 個で基礎台に固定し, その中間にプーリーを取り付け, V ベルトを介して駆動部に接続している。V ベルトを用いるとある程度の張力が必要となるが, 雑音が少ないという利点がある。駆動部は変速機と電動機よりなり, 回転数は $100 \sim 1000 \text{ rpm}$ の範囲で自由に選択できる。軸の他端はジャーナル軸受で支持されており, 先端に励振用円板を取り付けてある。軸の中間で一部径を小さくしてあるのは, 固有振動数を下げて, 支持部の影響を軸受部に伝達させないためである。これは測定変位が極めて小さいと予想されたためにとった手段である。ころがり軸受支持部から円板部までの距離は約 900 mm である。

ジャーナル軸受は, 船尾管船尾側軸受を想定したために, 軸受の長さ l と直径 d の比 $l/d=2$ とし, $l=72 \text{ mm}$ である。軸受の直径すきまは一般に軸受直径の $1/500 \sim 1/1000$ とされているが, 軸と軸受の相対変位の測定を可能にするため約 $1/200$ とした。軸受金は黄銅製である。潤滑油は粘度が 15.7 cSt (40°C) の船用油圧作動油を用い, 粘度を一定に保つように循環式給油方式とし, 給油圧を約 0.2 kg/cm^2 とした。軸受の両端は, 理論との比較を容易にするためにオイルシールを設け, 流れを一次的にしている。軸受本体は, 軸受荷重計測用の鉛直・

水平方向 2 枚の板バネで弾性支持されている。

励振を電磁石で非接触で行うために, 軸端に円板を取り付けた。円板の重量は約 7.8 kg である。

実験方法

測定の対象となるものは,

- (1) 軸と軸受の相対変位
- (2) 軸受荷重
- (3) 軸回転数
- (4) 励振の位相および振動数

である。相対変位は軸受に非接触変位計を固定し, 軸受の両端, 鉛直・水平方向計 4 箇所測定する。用いた変位計は渦電流式で, 測定範囲は $0 \sim 500 \mu\text{m}$, 出力は最大 2.0 V である。

軸受荷重はジャーナル軸受を支持している 2 枚の板バネに歪ゲージを取り付けて歪を測定し, それを換算して軸受荷重とした。

軸回転数は, 回転軸に 10 個の小穴をあけた円板を取り付け, 光学的にパルスを生じさせ回転数に変換した。

励振の位相および振動数 Ω は, 電磁石に入力する電流の一部を, 変位計, 歪ゲージの出力と同時にビシグラフに出力した。

実験はまず, 軸受荷重を一定にして回転数を 5 通り変化させ, 各回転数における軸心の位置を測定する。静的な実験からも油膜の弾性係数が求まるので, 各回転数において微小外力を軸に加え, 軸心の微小変位と軸受荷重を測定する ($\Omega=0$ に対応)。次に, 各回転数で, 鉛直・水平 2 方向から別個に励振を行い, 相対変位および軸受荷重を求め, これから動的特性を定めた。

弾性係数と減衰係数の実験的求め方

今, 水平方向に加振した場合を考える。加振力の振幅を F_x , 円振動数を Ω とすると,

$$\Delta f_x = F_x \cdot \cos \Omega t, \quad \Delta f_y = 0 \quad (2)$$

と書ける。この時の応答変位の x, y 方向の振幅を A, B とし, 加振力に対する位相差を α, β とすれば,

$$\Delta x = A \cdot \cos(\Omega t - \alpha), \quad \Delta y = B \cdot \cos(\Omega t - \beta) \quad (3)$$

となる。(2), (3) 式を (1) 式に代入し, 両辺の $\sin \Omega t, \cos \Omega t$ の係数を比較すると $k_{xx}, k_{xy}, c_{xx}, c_{xy}$ に関する 2 個の方程式, および $k_{yx}, k_{yy}, c_{yx}, c_{yy}$ に関する 2 個の方程式を得る。

同様に, 鉛直方向に加振した場合より 4 個の方程式が得られるので, これら 8 個の連立方程式を解けば弾性係数および減衰係数が求まる。

3 理 論

Reynolds 方程式

流体潤滑理論において油膜圧力を支配する方程式は Reynolds 方程式と呼ばれ, 座標を Fig. 2 のようにとる

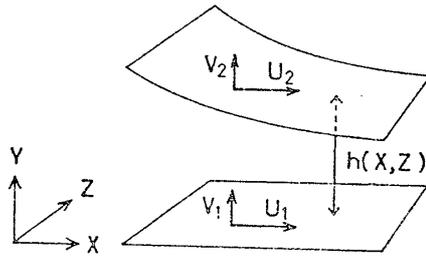


Fig. 2 Coordinates

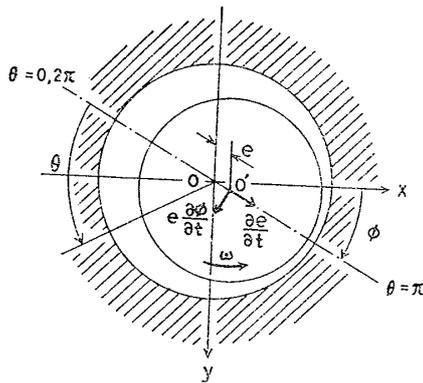


Fig. 3 Journal bearing

と次式で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial Z} \right) = 6\mu \left\{ (U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial X} + 2(V_2 - V_1) \right\} \quad (4)$$

ここで p は圧力, h は油膜厚さ, μ は粘性係数である。(2)式を Fig. 3 に示すジャーナル軸受に適用し, $X \rightarrow r\theta$ とおくと,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial Z} \right) = 6\mu \left\{ \left(\omega + 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial e}{\partial t} \cos \theta \right\} \quad (5)$$

となる。ここで, r は軸受の半径, ω は軸の回転角速度, e は偏心量である。油膜厚さ h は, 真円軸受の場合は近似的に

$$h = c(1 + \kappa \cdot \cos \theta) \quad (6)$$

となる。ここで c は軸と軸受の半径すきま, $\kappa = e/c$ は偏心率を表わす。

(5) 式の右辺の各項は圧力の発生原因を表わしており, 第1項はくさび効果, 第2項はスキーズ効果を表わす。

油膜圧力の境界条件

(5) 式は種々の境界条件を用いて近似的に解かれている。まず, 軸受の長さ方向の境界条件に応じて,

(A) 左辺第2項を省略する無限幅近似

(B) 左辺第1項を省略する無限小幅近似

がある。(A)は有限幅の影響を無視して, 流れを一次元

的に考える場合用いる。(B)は有限幅の影響を考慮する場合用いる。

いずれの近似を用いても問題となるのは円周方向の境界条件である。静的な問題に対しては $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ で油膜の完全破断を仮定するという, 簡単な近似的条件があるが, 動的な問題に対しては未だ確立された条件はない。その理由として, 油膜の破断が生じる条件および範囲の程度が明確でないことが挙げられる。実際, 実験的観察によれば, 軸受内の反負荷側では油膜は完全破断を生じているのではなく, 帯状の油膜が存在する⁸⁾⁹⁾。

ここでは, 従来考えられている条件の中で次の2つを取りあげる。くさび効果による圧力を p_w , スキーズ効果による圧力を p_s とすると,

(I) $\theta = 0, \pi$ で $p_w = p_s = 0$ かつ $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ で $p_w = p_s = 0$ 。(Gümbel の条件¹⁰⁾に対応)

(II) p_w に関し(I)と同じで, p_s は $\theta = 0, \pi$ において $dp_s/d\theta = 0$ を満たすように定め, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ では $p_s = 0$ とする。

(I), (II)とも軸受の長さ方向の境界条件は無限幅近似を用いるとする。Gümbel の条件は $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ では完全油膜破断を仮定している。圧力分布は Fig. 4 (I), (II) のようになる。 p_s は $\theta = \pi$ 近傍で特に異なっている。

本論文では, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の領域にある油膜を Fig. 5 に示すように帯状にモデル化し, この影響を考慮した次の条件を考える。

(III) $0 \leq \theta \leq \pi$ では(I)と同じで, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の帯状

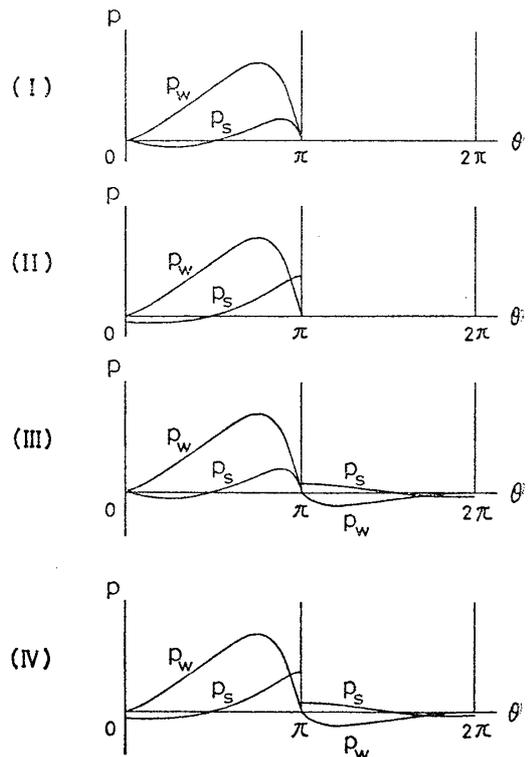


Fig. 4 Pressure distribution

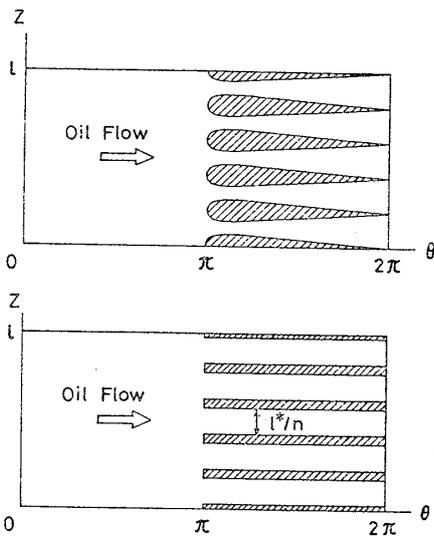


Fig. 5 Actual and idealized oil flow

油膜に対し無限小幅近似理論を適用し、 $\theta = \pi, 2\pi$ で $p_w = 0$ とし、 p_s は $\theta = \pi, 2\pi$ で $dp_s/d\theta = 0$ を満たすように定める。

(IV) $0 \leq \theta \leq \pi$ では(II)と同じで、 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の帯状油膜に対し(III)と同じ条件を用いる。

すると圧力分布は Fig. 4 (III), (IV) のようになる。

静的な場合には $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の領域にある帯状油膜は帯幅が狭くなることによって、その圧力が負とならぬように調節されるため無視することができるが、動的な場合には現象が短周期で変動するので帯幅による調節ができず、結局負圧を許すことになる¹¹⁾。その場合、特に軸心が偏心方向とは逆向きの速度をもつ時、 p_s の符号が負となるので p_w と p_s が加算され、その影響は無視できなくなる。

(III), (IV) の条件を用いる際、帯の幅と本数を仮定する必要がある、ここでは簡単のため、軸受長さ l に対し帯状油膜の占める幅 l^* の割合 l^*/l を仮定し、 n 本に等分割されているものとする。この分割数 n が大きくなると縦横比 l^*/nr が小さくなるので、帯状油膜中に発生する圧力は小さくなり、 $n = \infty$ のとき (III) および (IV) は (I) および (II) と一致する。

(6) 式を (5) 式に代入し、以上の境界条件を用いて積分すると油膜圧力 p が求まる (付録 (1) 参照)。

弾性係数および減衰係数の理論的求め方

圧力が求まると、偏心方向およびそれを直交する方向の油膜力 F_x, F_ϕ は次式により得られる。

$$F_x = - \iint p \cdot r \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot dZ,$$

$$F_\phi = \iint p \cdot r \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot dZ \quad (7)$$

これらを x, y 方向の油膜力に変換すると、

$$\begin{cases} F_x = F_x \cdot \cos \phi - F_\phi \cdot \sin \phi \\ F_y = F_x \cdot \sin \phi + F_\phi \cdot \cos \phi \end{cases} \quad (8)$$

(7) 式において、 $\kappa = \kappa_0 + \Delta\kappa$, $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$ とし、2次の微小項を省略し、さらに

$$x = c\kappa \cdot \cos \phi, \quad y = c\kappa \cdot \sin \phi \quad (9)$$

の関係を用いて $\Delta\kappa, \Delta\phi$ を $\Delta x, \Delta y$ に変換し (8) 式に代入すると (1) 式の形となり、油膜の弾性係数と減衰係数が求まる。これらを無次元化して

$$K_{ij} = \frac{ck_{ij}}{F_0}, \quad C_{ij} = \frac{c\omega c_{ij}}{SF_0} \quad (10)$$

とする。ここで F_0 は軸受荷重、 $S = (r/c)^2 \mu N / p_m$ (N は軸回転数 [rps], p_m は軸受平均圧力) で Sommerfeld 数を表わす。(I)~(IV) の境界条件による $K_{xx} \sim K_{yy}$ および $C_{xx} \sim C_{yy}$ を与える式を付録 (2) に示す。

4 結果および考察

まず実験でオイルシールを軸受両端に設けたことにより流れが一次元的になっている様子を表わしたものが、Fig. 6 である。実験値は $l/d = \infty$ (Gümbel) の理論値に近いので、圧力分布は軸受長さ方向に一様であるとみなす。

定常的回転時の軸心の位置を表わしたものが Fig. 7 である。軸受荷重の増減による軸心の移動は境界条件の変化のため履歴曲線を描くという報告があるが⁸⁾、本実験ではそれは観察されなかった。すなわち、回転数の増減によって油膜の境界条件はあまり変化しないと考えられる。これは油膜の破断現象が圧力の絶対値に依存するという理論的考察とも一致する。

次に励振時の軸心の平衡点まわりの軌跡を Fig. 8 に示す。理論通りほぼ楕円状の軌跡が測定できたが、平衡点から多少ずれた位置を中心に軌跡を描いた。これは、一つには電磁石で加振した際、電磁石と円板との距離が一定ではないため、正確な正弦波が得られなかったことによると考えられる。

実験で同一回転数において鉛直・水平2方向より励振し、その楕円軌跡から求めた弾性係数と減衰係数、およ

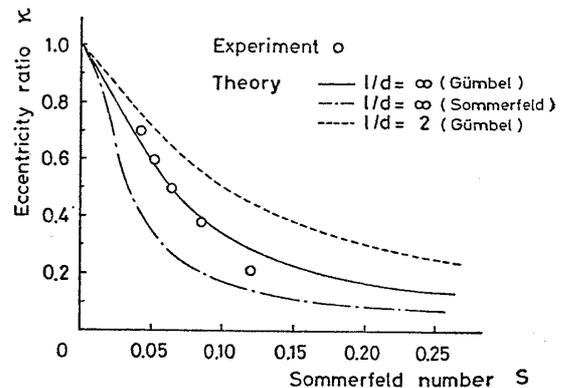


Fig. 6 The variation of eccentricity ratio with Sommerfeld number

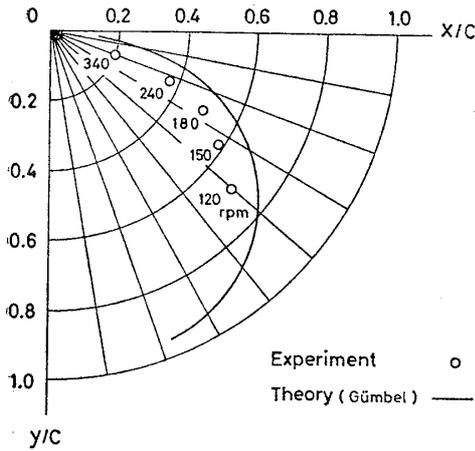


Fig. 7 Journal center locus under constant load

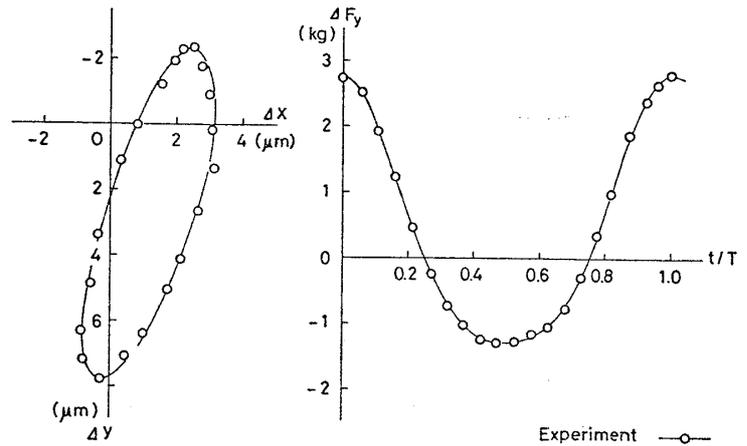


Fig. 8 Elliptic journal center locus and oil film reaction

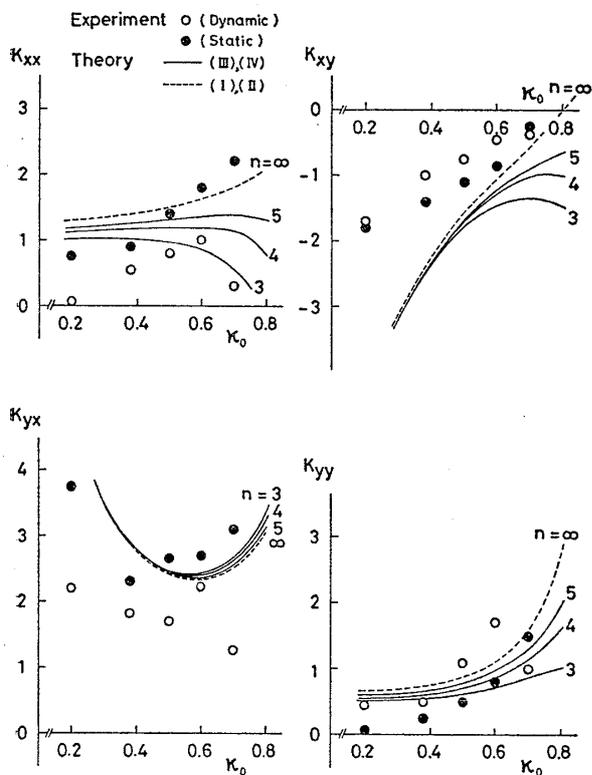


Fig. 9 Nondimensional stiffness coefficients

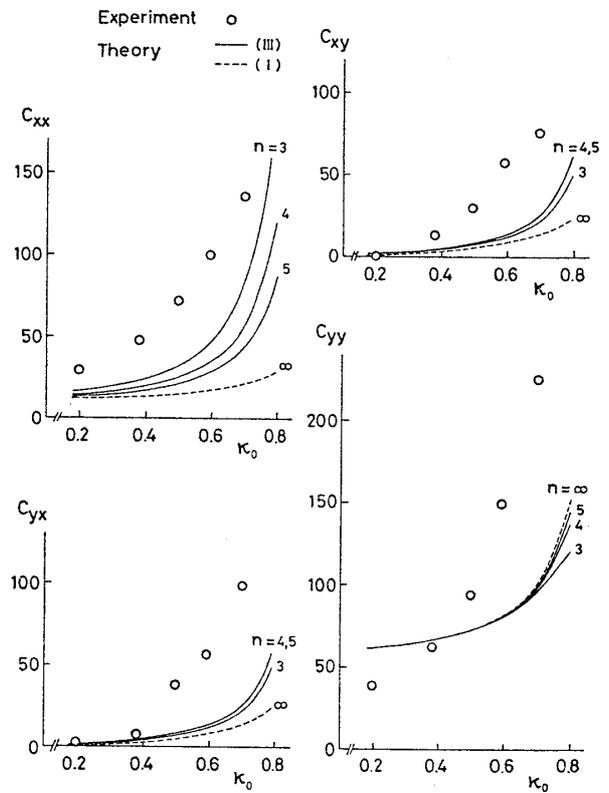


Fig. 10 Nondimensional damping coefficients

び境界条件 (I)~(IV) を用いて理論的に求めた各係数を, Figs. 9~11 に示す。(III), (IV) の条件を用いる際, 実験で測定した軌跡の大きさを参考に $l^*/l=0.8$ とし, n (3, 4, 5) 本の帯状油膜を仮定した。 l^*/l が異なる場合の結果は, 動的特性が $(l^*/l)(l^*/nr)^2$ だけによって定まる(付録)ことを用いて推定できる。弾性係数に関しては, 定常回転で一定微小外力を加えその際の微小変位を測定した静的な実験 ($\Omega=0$) では偏心率全域にわたり (I) (または (II)) の理論値に近く, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の油膜は破断しているとみなせるが, 動的な実験 ($\Omega=5\text{Hz}$), すなわち励振時に軸心の描く軌跡から求めたものは, 特に偏心率の高い範囲で傾向が異なる。その理由として,

偏心率の高い範囲での実験精度の低下も考えられるが, 後述する減衰係数の傾向をみる限り, 油膜の境界条件が静的な場合と異なるということも考えられる。その一つの可能性として (III) または (IV) のように帯状油膜を考えれば, ある程度説明できる。減衰係数に関しては特に (IV) の条件による理論とよい一致を示している。しかし偏心率の低い範囲では (III) の傾向もみられる。 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の領域にある帯状油膜の1本の帯幅は, 等分割されているとした場合, 軸の直径に対する比 $(l^*/n)/d=0.4$ 程度と考えられ, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ の帯状油膜に対しては充分無限小幅近似理論を適用できる。

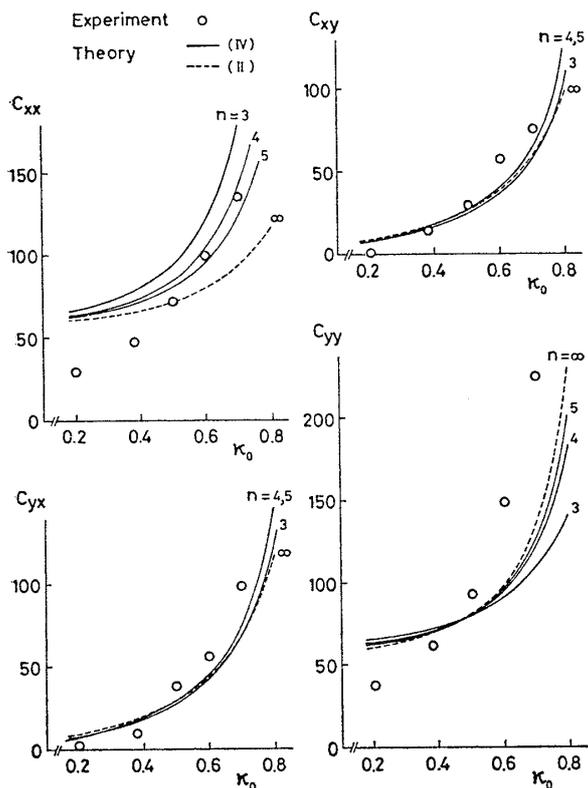


Fig. 11 Nondimensional damping coefficients

5 結 言

動的な油膜特性に関し実験を行い、理論との比較検討を行った結果、次の結論を得た。

1. 反負荷側の油膜は静的には無視できて完全破断とみなしてよいが、動的な場合にはその影響が著しい。
2. 減衰係数は境界条件に大きく影響され、本研究での比較によると境界条件は (IV) に近いと考える。しかし境界条件に関する合理的検討は今後につづ。
3. この実験のみでは、油膜力の線形化が可能な範囲、各境界条件の成立する範囲等の判断を下すことはできず、さらに荷重条件、給油条件を変化させた系統的实验が必要である。

最後に、本研究に際し有意義な助言をいただいた東京大学教授 堀幸夫先生、同 染谷常雄先生、日本海事協会名古屋支部長(前技術研究所長)星野次郎氏に感謝いたします。また、実験に関し御援助いただいた東京大学助手 松原典宏氏、同 村上貴英氏、および本実験施行上重要な装置改良に対する示唆をいただいた同 元技官 笠松孝雄氏にお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 日本船用機器開発協会：大型超高速船用船尾管軸受の開発事業報告書 (昭和 50 年)。
- 2) 多軸船の軸系設計，工作基準に関する研究報告

- 書，日本造船研究協会第 167 研究部会報告書，研究資料 No. 281 (昭和 52 年)。
- 3) 船川正哉，多々良篤輔：ジャーナル軸受で支えられた弾性軸の安定限界，日本機械学会論文集，第 30 巻，第 218 号 (昭和 39 年)。
- 4) 小野京右，田村章義：ジャーナル軸受で支えられた水平回転軸系の振動，日本機械学会論文集，第 34 巻，第 258 号 (昭和 43 年)。
- 5) Hori, Y.: Theory of Oil Whip, Trans. ASME, Ser. E, Vol. 26-1 (1959).
- 6) 染谷常雄：すべり軸受油膜の弾性係数および減衰係数に関する研究，日本機械学会論文集，第 42 巻，第 360 号，第 362 号 (昭和 51 年)。
- 7) Morton, P. G.: Measurement of the Dynamic Characteristics of a Large Sleeve Bearing, Trans. ASME, Ser. F, Vol. 93-1 (1971).
- 8) 森 美郎，宮田誠次，阿部康郎，藤田栄興：ジャーナル軸受における油膜不連続の研究，日本機械学会論文集，第 33 巻，第 248 号，第 35 巻，第 272 号 (昭和 42，44 年)。
- 9) Pan, C. H. T.: An Improved Short Bearing Analysis for the Submerged Operation of Plain Journal Bearings and Squeeze-Film Dampers, Trans. ASME, Ser. F, Vol. 102 (1980).
- 10) 曾田範宗：軸受，岩波全書 (1964)。
- 11) 中村研八，染谷常雄：実在液体に発生する張力に関する研究，豊田研究報告，第 31，32 報告 (昭和 54 年)。

付 録

(1) 油膜圧力の公式

境界条件 (I)~(IV) に対応する p_w, p_s は Table 1 および (A-1)~(A-5) 式で与えられる。

$$p_w = 6\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2 (\omega + 2\dot{\phi}) \left\{ I_2(\theta) - \frac{I_2(\pi)}{I_3(\pi)} \cdot I_3(\theta) \right\} \quad (A-1)$$

$$p_s = 12\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2 \dot{\kappa} \left\{ K_3(\theta) - \frac{K_3(\pi)}{I_3(\pi)} I_3(\theta) \right\} \quad (A-2)$$

$$p_s = 12\mu \left(\frac{r}{c}\right)^2 \dot{\kappa} \left\{ K_3(\theta) - K_3\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} \quad (A-3)$$

ここで、

$$I_n(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{(1 + \kappa \cos \theta)^n} \cdot d\theta,$$

$$K_n(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{(1 + \kappa \cos \theta)^n} \cdot d\theta$$

Table 1 Formulae for the oil film pressures

	$0 \leq \theta \leq \pi$		$\pi \leq \theta \leq 2\pi$	
	p_w	p_s	p_w	p_s
(I)	(A-1)	(A-2)		
(II)	(A-1)	(A-3)		
(III)	(A-1)	(A-2)	(A-4)	(A-5)
(IV)	(A-1)	(A-3)	(A-4)	(A-5)

$$p_w = -3\mu \frac{(Z-l)Z}{c^2(1+\kappa \cos \theta)^3} \{(\omega+2\dot{\phi}) \cdot \kappa \sin \theta\} \quad (A-4)$$

$$p_s = 6\mu \frac{(Z-l)Z}{c^2(1+\kappa \cos \theta)^3} \cdot \dot{\kappa} \cdot \cos \theta \quad (A-5)$$

(2) 弾性係数, 減衰係数

境界条件 (I)~(IV) に対する $K_{xx} \sim K_{yy}$ および $C_{xx} \sim C_{yy}$ の公式は (A-6)~(A-13) 式で与えられる。

$$K_{xx} = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \left(A_3 \cos^2 \phi_0 - A_4 \sin \phi_0 \cos \phi_0 + \frac{1}{\kappa_0} A_1 \right) \quad (A-6)$$

$$K_{xy} = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \left(A_3 \sin \phi_0 \cos \phi_0 - A_4 \sin^2 \phi_0 - \frac{1}{\kappa_0} A_2 \right) \quad (A-7)$$

$$K_{yx} = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} (A_3 \sin \phi_0 \cos \phi_0 + A_4 \cos^2 \phi_0) \quad (A-8)$$

$$K_{yy} = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} (A_3 \sin^2 \phi_0 + A_4 \sin \phi_0 \cos \phi_0) \quad (A-9)$$

$$C_{xx} = \frac{\pi}{\kappa_0} (B_1 \sin \phi_0 \cos \phi_0 - B_2 \sin^2 \phi_0) + \pi (B_3 \cos^2 \phi_0 - B_4 \sin \phi_0 \cos \phi_0) \quad (A-10)$$

$$C_{xy} = -\frac{\pi}{\kappa_0} (B_1 \cos^2 \phi_0 - B_2 \sin \phi_0 \cos \phi_0) + \pi (B_3 \sin \phi_0 \cos \phi_0 - B_4 \sin^2 \phi_0) \quad (A-11)$$

$$C_{yx} = \frac{\pi}{\kappa_0} (B_1 \sin^2 \phi_0 + B_2 \sin \phi_0 \cos \phi_0) + \pi (B_3 \sin \phi_0 \cos \phi_0 + B_4 \cos^2 \phi_0) \quad (A-12)$$

$$C_{yy} = -\frac{\pi}{\kappa_0} (B_1 \sin \phi_0 \cos \phi_0 + B_2 \cos^2 \phi_0) + \pi (B_3 \sin^2 \phi_0 + B_4 \sin \phi_0 \cos \phi_0) \quad (A-13)$$

ここで,

$$\phi_0 = \tan^{-1}(A_1/A_2)$$

であり, また係数 $A_1 \sim A_4, B_1 \sim B_4$ は境界条件 (I)~(IV) に対応して, Table 2 のようになる。

Table 2 Coefficients $A_1 \sim A_4, B_1 \sim B_4$

	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4
(I)	f_1	f_3	f_2	f_4	f_5	f_7	f_6	f_8
(II)	f_1	f_3	f_2	f_4	f_5	f_7	f_9	f_{10}
(III)	$f_1 - g_1$	$f_3 + g_3$	$f_2 - g_2$	$f_4 + g_4$	$f_5 + g_5$	$f_7 - g_7$	$f_6 + g_6$	$f_8 - g_8$
(IV)	$f_1 - g_1$	$f_3 + g_3$	$f_2 - g_2$	$f_4 + g_4$	$f_5 + g_5$	$f_7 - g_7$	$f_9 + g_6$	$f_{10} - g_8$

Table 2 の f および g は以下のとおりである。

$$f_1 = \frac{12\kappa_0^2}{(2+\kappa_0^2)(1-\kappa_0^2)}$$

$$f_2 = \frac{24(\kappa_0^5 + 2\kappa_0)}{(2+\kappa_0^2)(1-\kappa_0^2)}$$

$$f_3 = \frac{6\pi\kappa_0}{(2+\kappa_0^2)(1-\kappa_0^2)^{1/2}}$$

$$f_4 = \frac{6\pi(2-\kappa_0^2 + 2\kappa_0^4)}{(2+\kappa_0^2)^2(1-\kappa_0^2)^{3/2}}$$

$$f_5 = -\frac{24\kappa_0^2}{(2+\kappa_0^2)^2(1-\kappa_0^2)}$$

$$f_6 = \frac{12}{(1-\kappa_0^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2+\kappa_0^2)} \right\}$$

$$f_7 = -\frac{12\pi\kappa_0}{(2+\kappa_0^2)(1-\kappa_0^2)^{1/2}}$$

$$f_8 = \frac{24\kappa_0}{(2+\kappa_0^2)(1-\kappa_0^2)}$$

$$f_9 = \frac{6\pi}{(1-\kappa_0^2)^{3/2}}$$

$$f_{10} = \frac{24}{(1-\kappa_0^2)(1+\kappa_0)} - \frac{12(2+\kappa_0)}{(1+\kappa_0)^2}$$

$$g_1 = \frac{l^*}{l} \left(\frac{l^*}{nr} \right)^2 \frac{\kappa_0^2}{(1-\kappa_0^2)^2}$$

$$g_2 = \frac{l^*}{l} \left(\frac{l^*}{nr} \right)^2 \frac{2\kappa_0(1+\kappa_0^2)}{(1-\kappa_0^2)^3}$$

$$g_3 = \frac{l^*}{l} \left(\frac{l^*}{nr} \right)^2 \frac{\pi\kappa_0}{4(1-\kappa_0^2)^{3/2}}$$

$$g_4 = \frac{l^*}{l} \left(\frac{l^*}{nr} \right)^2 \frac{\pi(1+2\kappa_0^2)}{4(1-\kappa_0^2)^{5/2}}$$

$$g_5 = \frac{l^*}{l} \left(\frac{l^*}{nr} \right)^2 \frac{2\kappa_0^2}{(1-\kappa_0^2)^2}$$

$$g_6 = \frac{l^*}{l} \left(\frac{l^*}{nr} \right)^2 \frac{\pi(1+2\kappa_0^2)}{2(1-\kappa_0^2)^{5/2}}$$

$$g_7 = \frac{l^*}{l} \left(\frac{l^*}{nr} \right)^2 \frac{\pi\kappa_0}{2(1-\kappa_0^2)^{3/2}}$$

$$g_8 = \frac{l^*}{l} \left(\frac{l^*}{nr} \right)^2 \frac{2\kappa_0}{(1-\kappa_0^2)^2}$$