

(昭和 57 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

## 一様流中を回転する軸対称体上の境界層

正員 大和裕幸\* 正員 山本善之\*\*

A Study on a Boundary Layer around a Rotating  
Circular Cylinder in an Axial Uniform Flowby Hiroyuki Yamato, *Member* Yoshiyuki Yamamoto, *Member*

## Summary

In this paper, the boundary layer around a rotating circular cylinder in an axial uniform flow is discussed both theoretically and experimentally. The problem has not been exactly dealt with because of its difficulty, although it is one of the most fundamental and important problems in the field of the three dimensional boundary layer theory.

Theoretical investigations are made with the use of the finite element method solving the Navier-Stokes equations and experiments are carried out in the circulating water tunnel. The Laser Doppler Velocimeter is used to measure the velocities in the boundary layer. The results obtained by numerical and experimental investigations are qualitatively in good accordance with each other.

Conclusions obtained in this paper are summarized as follows ;

1° The boundary layer around a rotating circular cylinder is analogous to that of a yawed flat plate in relatively wide range of the rotation parameter ;

2° The rotation causes the point of inflexion in the axial velocity profile, which may make the flow turbulent ;

3° The boundary layer around a slowly oscillating circular cylinder is analyzed approximately, which is effective for the estimation of the viscous damping force of the lateral oscillation of a ship in advance.

## 1 緒 言

いろいろな軸流機器や航走中の船舶の動揺または振動においては、主流速に加えて、主流に垂直な方向の速度が存在する。このような2つの代表速度を持つような問題は三次元境界層理論の基礎的な、かつ応用上も重要なものの一つである。このうち回転する軸対称体上の境界層に対しては Wieselsberger<sup>1)</sup> や, Luthander and Rydberg<sup>2)</sup> が回転しながら前進する球の抵抗やトルクを測定した実験研究以後、多くの研究がある。また Schlichting<sup>3),4)</sup>, Truckenbrodt<sup>4),5)</sup> らは Prandtl の境界層理論に基づき回転体についての計算を行っている。さらに Parr<sup>6)</sup>, Furuya<sup>7)</sup> は、いろいろな軸対称体について境界層内の流速分布の測定を行い、特に Parr は Schlichting らの手法を用いて計算も行い、実験とよく一致した解を得ている。しかし、これらの解法は境界層理論に基づいており、遠心力などの影響を厳密に取り扱

うことはできない。実際、回転する円筒のように遠心力が境界層厚さ方向のみに作用するような場合には、回転の影響を計算に入れることはできない。また回転の速い場合には、この境界層方程式自体が成立しなくなる可能性もある。

そこで本研究では、それらの研究をふまえて、Fig. 1 に示したような一定角速度で回転しながら一定速度で前進する円筒のまわりの境界層について実験と理論計算との両面から研究を行う。実験としては境界層内の流速分布を LDV(Laser Doppler Velocimeter, レーザ流速計)で計測し、また理論計算としては Navier-Stokes

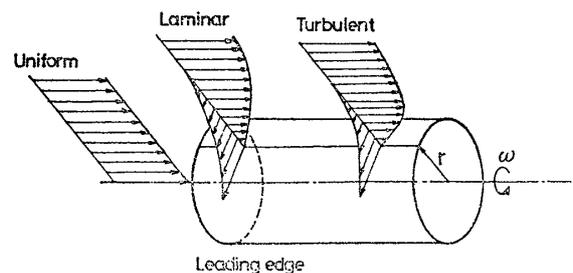


Fig. 1 Flow around a rotating circular cylinder

\* 航空宇宙技術研究所新型航空機研究グループ

\*\* 東京大学工学部船舶工学科

方程式を有限要素法によって解き厳密な解析を行う。これによって従来の Schlichting らの理論では盛り込むことのできない回転の影響を考慮することができる。この円筒のまわりの流れは回転が緩やかな場合には面内で主流に垂直な方向にスライドする二次元平板のまわりの流れと同じになり、本研究の延長として航走中の船体の振動における外板面上の摩擦減衰力を前進速度との関係で推定することなどが可能である<sup>8),9)</sup>。

## 2 基礎方程式と境界層理論

ここでは、まず定常非圧縮性軸対称流れの基礎方程式と境界層理論について記す。

### 2.1 基礎方程式

軸対称問題であるため、Fig. 2 に示すような円筒座標系  $O-xy\varphi$  を用いる。主流は極軸  $x$  の方向に一致する。 $(x, y, \varphi)$  それぞれの方向の速度成分を  $(u, v, w)$  とし、圧力  $p$ 、密度  $\rho$  として連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0 \quad (1)$$

となり、さらに Navier-Stokes の式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w^2}{y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \Delta v - \frac{v}{y^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{vw}{y} = \nu \left( \Delta w - \frac{w}{y^2} \right) \quad (4)$$

と表わされる。ここに  $\nu$  は動粘性係数、 $\Delta$  は Laplacian であって

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

である。式 (3)、(4) の左辺第 3 項はそれぞれ遠心力とコリオリ力である。以上の 4 つの式から  $u, v, w, p$  を求める。この場合、代表速度としては主流流速  $U$  と壁面の周速度  $W$  とが存在する。そして流れの様子は円筒の半径  $r$  をベースにしたレイノルズ数  $Re = (Ur)/\nu$  と、2 つの代表速度の比  $\Omega = W/U$  で決まる。 $\Omega$  については、rotation parameter, Drehparameter と名づけられているが日本語の定まった名称はないようであり、ここでは速度比と呼ぶことにする。

### 2.2 回転が非常に緩やかである場合の境界層近似

境界層厚さ  $\delta$  が、円筒の半径  $r$  に比して十分小さいとして式 (1)~(4) までの各項のオーダー評価を行い、オーダーの低いものをおとすと、それぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6)$$

$$\frac{w^2}{y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7)$$

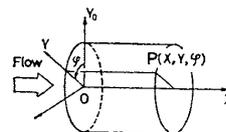


Fig. 2 Cylindrical polar coordinate  $O-xy\varphi$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8)$$

が得られる。さらに回転が十分緩やかである場合には式 (7) の左辺は無視することができ、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

で置き換えることができ、境界層方程式は式 (5)、(6)、(9)、(8) となる。このうち式 (5)、(6)、(9) は二次元平板のまわりの境界層の式と全く同じで、式 (8) は式 (5)、(6)、(9) で  $u, v$  を求めた後に解くことができる。これらの式から回転する円筒のまわりの境界層は面内に主流と直角方向にスライドする平板のまわりの境界層で近似しうるようになる。回転が速くなると円筒面付近で遠心力が大きくなり、境界層厚さ方向の方程式 (9) や (7) の近似が悪くなることが予想される。

次に、主流方向に圧力勾配のない場合を考える。式 (5)、(6)、(9) より  $u, v$  は Blasius の解で与えられる。また式 (8) は式 (6) と全く同じになり、境界条件を考慮にいれて、周速度  $w(x, y)$  は、速度比  $\Omega$  を用いて

$$w = \Omega(U - u) \quad (10)$$

のように表わされる。回転が緩やかである場合には式 (10) のような簡単な関係が成立する。この関係は後に有限要素法を用いた数値解析を行う際に境界条件として用いられる。横軸に  $u$ 、縦軸に  $w$  をとった極線図 (Polar diagram) では 1 本の直線になることがわかる。さらに式 (10) の成立する場合には壁面での剪断力の 2 つの成分は粘性係数  $\mu$  を用いて、主流方向成分  $\tau_x = \mu(\partial u / \partial y)$ 、周方向成分  $\tau_\varphi = \mu(\partial w / \partial y)$  と表わされるが、その比  $\tau_\varphi / \tau_x$  は

$$\begin{aligned} \tau_\varphi / \tau_x &= -W/U \\ &= -\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

となり、速度比の符号をかえたものに等しくなる。

## 3 有限要素法による数値計算法について<sup>11),12)</sup>

ここでは回転円筒のまわりの層流境界層の解析を厳密に行うために、Navier-Stokes の式を有限要素法を用いて解いた。周知のように、有限要素法は構造力学の分野で発展したもので、大型計算機の進歩とあいまって今後は実用的な流体力学の問題に対する解析法として活用されることが期待されるものである。

ここでは通常の有限要素法で、速度と圧力を未知数に

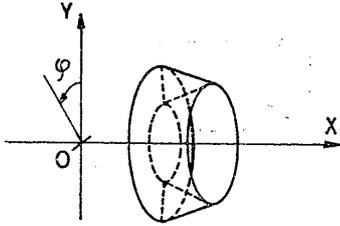


Fig. 3 Ring element

とり、ガラーキン法により定式化を行った。また、このような解析すべき領域が無限に広がっている外部問題に有限要素法を適用する際には、有限要素法で解析する領域は有限の大きさとなるため、現象が無限に広がっていくことを表わす境界条件の選定が大きな問題である<sup>13)</sup>。合理的な境界条件を用いなければレイノルズ数の大きい場合など解が求まらない。ここでは前節に述べたように  $u, v, p$  には Blasius の解を用い、 $w$  については式 (10) を用いることとした。軸対称問題であるので、円筒座標を用い、Fig. 3 に示すような軸対称の環状要素を用いた。 $p, u, v, w$  それぞれの重み関数  $p^*, u^*, v^*, w^*$  を導入し、式 (1), (2), (3), (4) に乗じ、解析領域で積分する。Laplacian に対して部分積分を施し、

$$\iiint p^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + v \right) dV = 0 \quad (12)$$

$$\iiint \left( u^* u \frac{\partial u}{\partial x} + u^* v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u^*}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla u^* \cdot \nabla u \right) dV - \nu \iint u^* \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (13)$$

$$\iiint \left( v^* u \frac{\partial v}{\partial x} + v^* v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v^* w^2}{y} + \frac{v^*}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{v^* v}{y^2} + \nu \nabla v^* \cdot \nabla v \right) dV - \nu \iint v^* \frac{\partial v}{\partial n} dS = 0 \quad (14)$$

$$\iiint \left( w^* u \frac{\partial w}{\partial x} + w^* v \frac{\partial w}{\partial y} + w^* \frac{vw}{y} + \nu \frac{w^* w}{y^2} + \nu \nabla w^* \cdot \nabla w \right) dV - \nu \iint w^* \frac{\partial w}{\partial n} dS = 0 \quad (15)$$

となる。

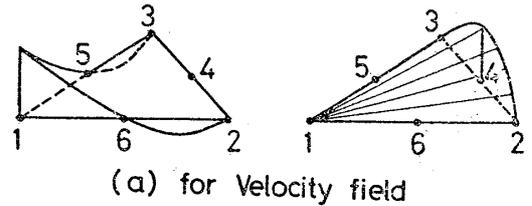
ここで  $\iiint dV, \iint dS$  はそれぞれ体積積分、表面積分を表わし、 $\nabla$  は gradient,  $\partial/\partial n$  は法線方向微分を表わす。境界上で  $u, v, w, p$  がすべて与えられる場合には表面積分は 0 となり、また軸称性から

$$\iiint f(x, y) dV = 2\pi \iint f(x, y) \cdot y dx dy \quad (16)$$

であるので、結局解くべき式は

$$\iint p^* \left( \frac{\partial u}{\partial x} y + \frac{\partial v}{\partial y} y + v \right) dx dy = 0 \quad (17)$$

$$\iint \left( u^* u \frac{\partial u}{\partial x} y + u^* v \frac{\partial u}{\partial y} y + u^* \frac{y}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right.$$



(b) for Pressure field

Fig. 4 Interpolation functions

$$+ \nu (\nabla u^* \cdot \nabla u) y) dx dy = 0 \quad (18)$$

$$\iint \left( v^* u \frac{\partial v}{\partial x} y + v^* v \frac{\partial v}{\partial y} y - v^* w^2 + v^* \frac{y}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu v^* \frac{v}{y} + \nu (\nabla v^* \cdot \nabla v) y \right) dx dy = 0 \quad (19)$$

$$\iint \left( w^* u \frac{\partial w}{\partial x} y + w^* v \frac{\partial w}{\partial y} y + w^* vw + \nu \frac{w^* w}{y} + \nu (\nabla w^* \cdot \nabla w) y \right) dx dy = 0 \quad (20)$$

となる。要素としては、 $x, y$  平面での断面が三角形となるような要素を用いた。内挿関数としては、Fig. 4 に示すように方程式に含まれる微分階数に応じて、速度場  $u, v, w$  に関しては各頂点と各辺の midpoint に節点のある二次内挿式を用い、圧力場に関しては、各頂点を節点とする線形内挿式を用いた。したがって一要素で、 $u, v, w$  についてはそれぞれ 6 自由度、 $p$  については 3 自由度で計 21 自由度となる。重み関数についても同様の内挿を行う。

有限要素方程式の算出には Gauss 積分を用い、また自由度が 2000 程度必要であるので、行列がスパースであることを考えてウェーブ・フロント法を用いて解を求めた。

また Navier-Stokes の式 of 非線形項の処理にあたっては、 $u, v, p$  は Blasius の解、 $w$  については式 (10) を用いて求めたものを初期値として繰り返し計算により解を求める。繰り返し計算の手順としては、例えば、式 (18) を例にとり述べると、 $i$  ステップの解  $u_i$  を求めるのに前段  $(i-1)$  ステップの解  $u_{i-1}, v_{i-1}$  を用いて

$$\iint \left( u^* u_{i-1} \frac{\partial u_i}{\partial x} y + u^* v_{i-1} \frac{\partial u_i}{\partial y} y + u^* \frac{y}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} + \nu (\nabla u^* \cdot \nabla u_i) y \right) dx dy = 0$$

のようにした。さらに  $u_{i-1}, v_{i-1}$  などについては、一つの三角形内では、その重心での値を用いることにした。

他の2つの式(19), (20)についても同様にする。この繰り返し計算によって解が殆んど変化しなくなったところで解が求まったとした。この時、半径方向速度については数値も小さく、誤差も含まれ易いと考えられるため、取束の条件を緩和してある。

#### 4 数値解析例

前節で述べた計算法によって解析した例題について述べる。レイノルズ数  $Re=(Ur)/\nu$  が 10000 程度まで解が求まるが、ここでは  $Re=2500$  のものについて示す。この場合  $\Omega$  は 0 から 1.0 まで求めた。解析領域は前縁を含まず、前縁より少し下流について解析を行った。代表的な有限要素分割を Fig. 5 に示す。問題によって異なるが、解析領域としては、 $0.25 \leq x/r \leq 3.0 \sim 5.0$ ,  $y/r$  については Blasius の式から予測される境界層が十分はいるようにしてある。Fig. 5 に示したもので 527 節点、1725 自由度である。なお、本節以下では座標  $y$  は円筒面から測るものとする。

まず、Fig. 6 に主流方向流速の分布の様子を示した。横軸に速度、縦軸に壁面からの距離をそれぞれ無次元化してとってある。図中  $Rex$  は局所的なレイノルズ数で、前縁からの距離  $x$  を用いて  $(Ux)/\nu$  である。距離を無次元表示したもので例えば、図中の  $Rex=1250$  は  $x/r=1/2$  の場所を示す。この Fig. 6 によると回転のない場合には円筒のまわりの境界層は平板のまわりの Blasius の

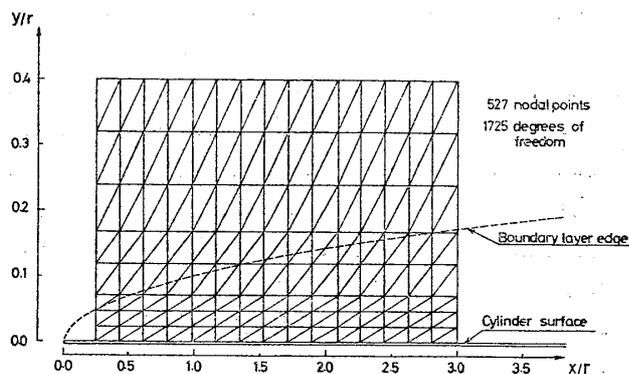


Fig. 5 Typical mesh subdivision

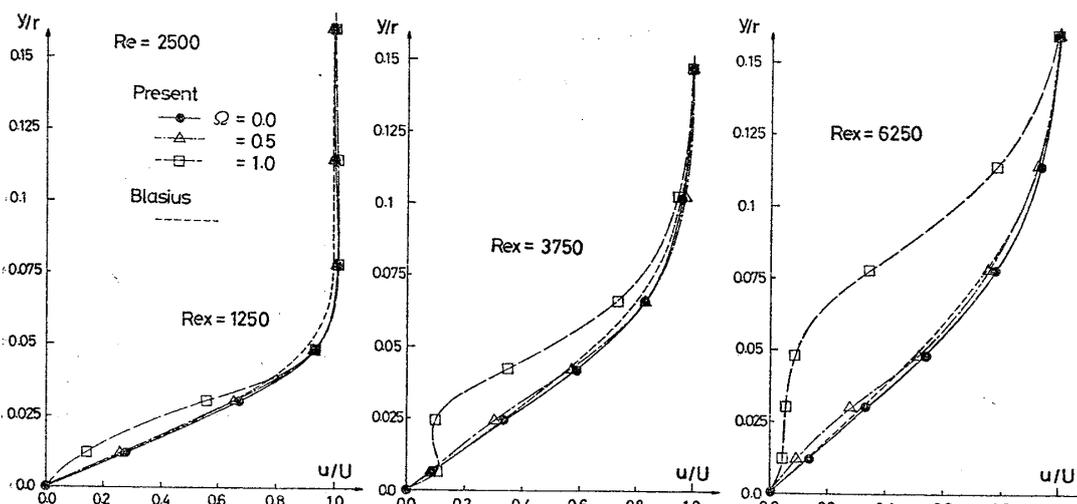


Fig. 6 Calculated axial velocity profiles ( $Re=2500$ )

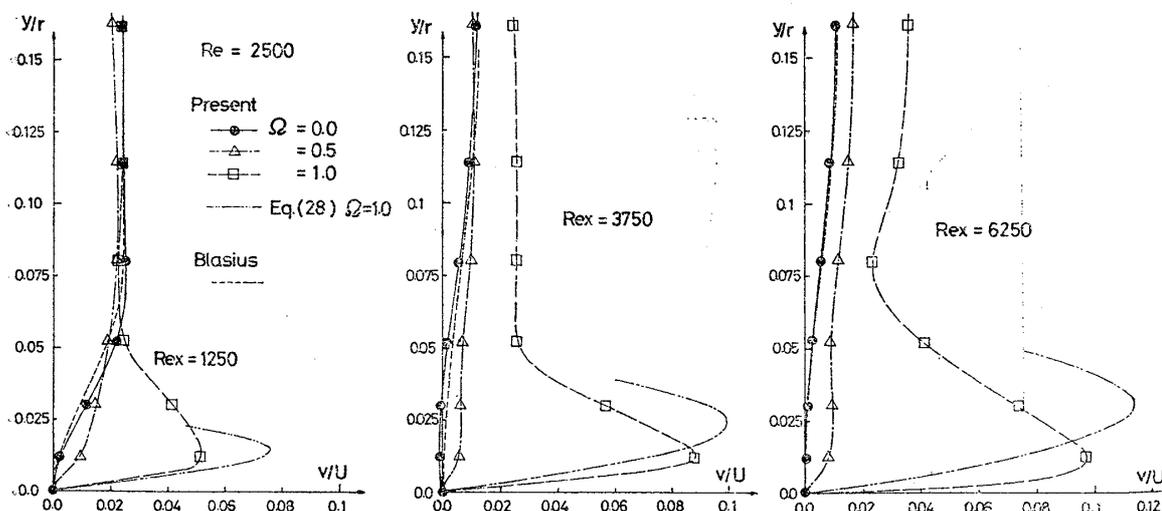


Fig. 7 Calculated radial velocity profiles ( $Re=2500$ )

式で精度よく近似しうることがわかる。しかしながら、回転を増すにつれ、また前縁から遠ざかるにつれて、回転の影響が顕著に現われ、 $\Omega=1.0$  の場合には Blasius の式で近似することはできず、速度分布に変曲点が現われる。速度分布にこのような変曲点を持つ流れは不安定で、現実には層流として存在することはできないと考えられる。次に Fig. 7 に半径方向（境界層厚さ方向）速度の分布を示す。この場合にも主流方向流速と同様に回転のない場合には Blasius の式で精度よく近似できるが、回転が早まるにつれて Blasius の式と異なったものとなっている。 $\Omega=1.0$  では、壁面のごく近傍で著しく加速されており、したがって境界層厚さ方向の方程式を厳密に取り扱う必要があることがわかる。なお、Fig. 7 中の 2 点鎖線に関して後に考察の部分で述べる。Fig. 8 には、圧力の分布を示す。横軸は圧力を動圧で無次元化してある。Blasius の解では圧力はいたるところ 0 である。回転のない場合、十分 Blasius の式で近似できることがわかる。しかし、 $\Omega$  が増大するに従い境界層内に圧

力勾配が生じてくることがわかる。Fig. 9 には周方向速度分布を示した。 $\Omega=0.5$  では式 (10) が成立していることがわかる。さらに Fig. 10 に極線図を示す。これに

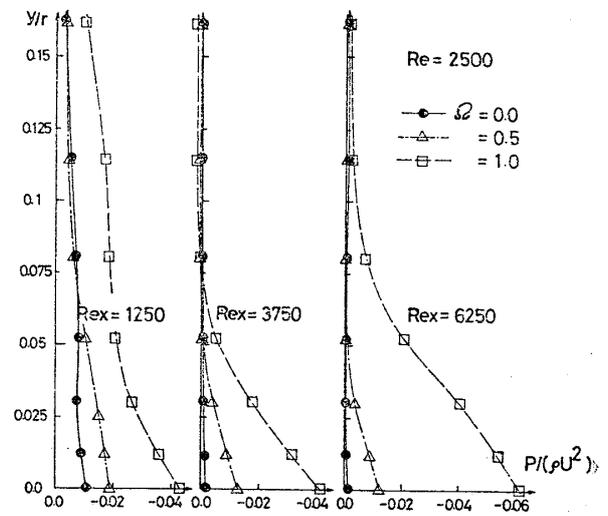


Fig. 8 Calculated pressure distribution ( $Re=2500$ )

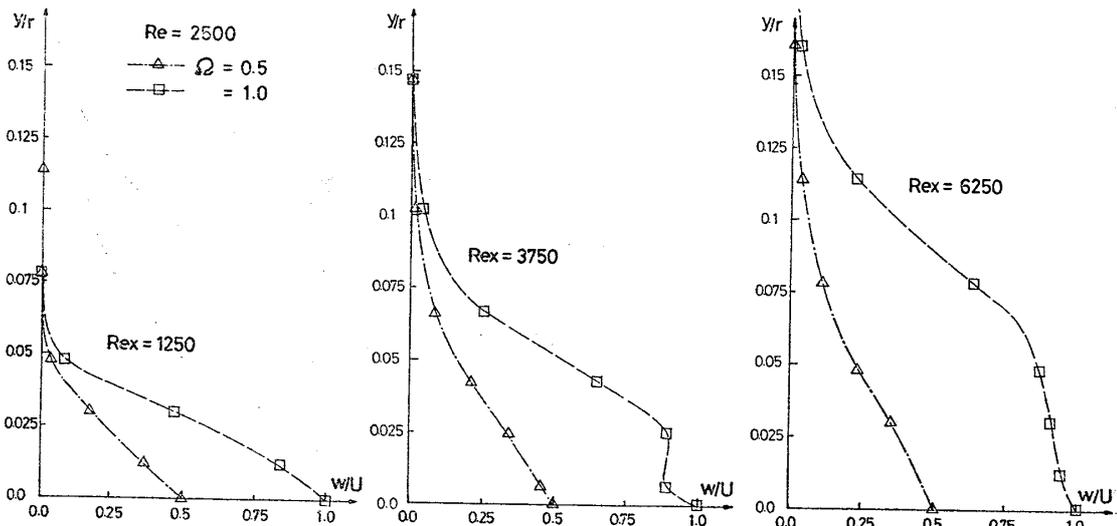


Fig. 9 Calculated circumferential velocity profiles ( $Re=2500$ )

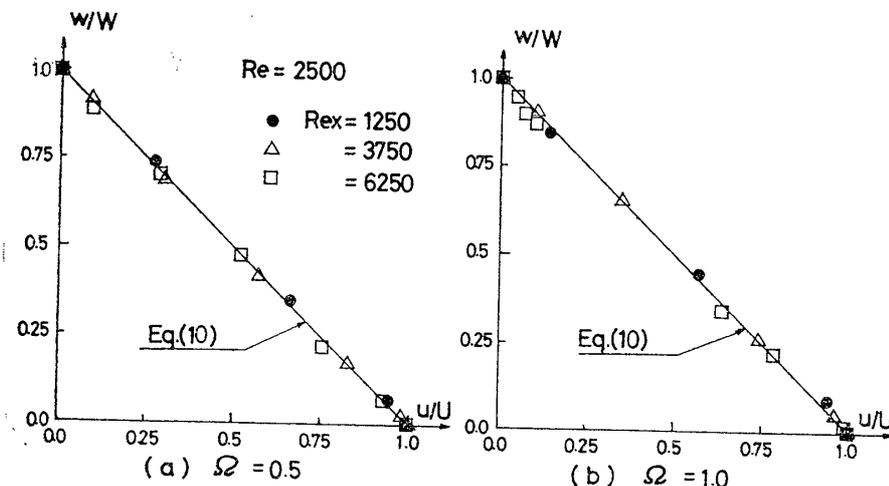


Fig. 10 Calculated polar diagram ( $Re=2500$ )

よると、どのような場合にも、すなわち Blasius の解で近似可能な場合にも不可能な場合にも、式 (10) が大成立していることがわかる。剪断応力の 2 つの成分の比も、かなり広い範囲にわたって  $\tau_\phi/\tau_x = -\Omega$  となりうる事が計算で示されている。

### 5 境界層内流速測定実験について

境界層内の流速分布を調べる実験を行った。東京大学工学部船舶工学科船用プロペラキャビテーションタンネル<sup>14)</sup>で、十分精密に円筒度を出した供試体をプロペラ駆動装置で回転させ、低速で水を回流し、円筒のまわりに形成される境界層内の流速分布を LDV により測定した。主流方向流速と周方向流速のみを測定することにし、半径方向流速に関しては流速が低すぎるため測定できなかった。

#### 5.1 供試体およびテストセクション

Fig. 11, Fig. 12 にそれぞれテストセクションと供試体の寸法とを示した。円筒内部を水が通過しやすくするため前方に整流体を突出させ、また円筒の前縁はアタックアングルが生じて剥離を起こさないようにするため翼形にしてある<sup>15)</sup>。

#### 5.2 LDV<sup>16)</sup>について

計測に用いたレーザー流速計は日本科学工業製の 15 mW He-Ne レーザー、前方散乱形の標準的なものであり、通常 5~10 m/s 程度の流速の測定に適したものであ

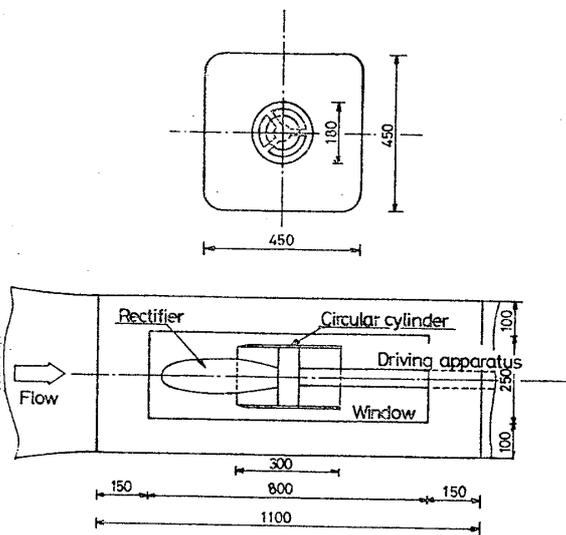


Fig. 11 Test section and circular cylinder

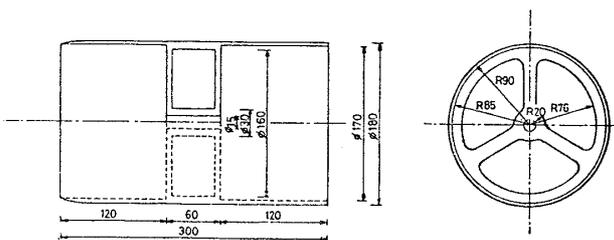


Fig. 12 Tested circular cylinder

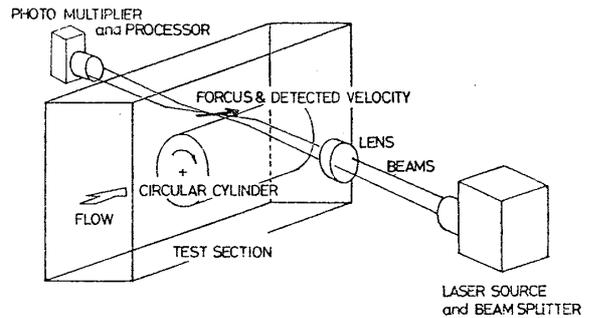


Fig. 13 Obliquely incident LDV

るが、0.25 m/s 程度まで計測することができた。また周方向流速については直接測ることができないため、Fig. 13 に示すように斜めからレーザー光を入射し、ある方向の流速を求め、別に測定した同じ地点での主流方向流速をベクトル的に減じ、主流方向流速に直角な周方向流速を求めた。水の屈折率とレーザー入射角さえ与えられれば較正は容易に行え、またこのような簡便な方法でも周方向流速は比較的精度よく求まる。

### 6 実験結果について

主流速を 1 m/s に固定し速度比  $\Omega$  を 0.0, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0 とし、計測は Fig. 14 に示すように 6 箇所で行った。水温は、ほぼ 20°C で動粘性係数  $\nu$  は

$$\nu = 1.0038 \times 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

である。したがって円筒に対するレイノルズ数  $Re$  は

$$Re = 9.0 \times 10^4$$

となる。二次元平板のまわりの層流境界層がどのような微小攪乱に対しても安定を保つ範囲<sup>10)</sup>は

$$Rex \leq 9.14 \times 10^4$$

であるので、二次元平板による近似が成立するとしたならば、この円筒においても前縁より 9.14 cm くらいまでは層流に保たれる可能性のあることがわかる。そして回転のある場合にはさらに層流の保たれる範囲は狭くなると考えられる。

#### 6.1 層流と乱流

まず Fig. 15 に主流方向流速の様子を示す。Fig. 15 の中で Blasius の解を点線で示してある。計測結果のうち前縁付近の速度分布形状にやや変曲点がみられるのは、前縁の形状を翼形としたためと考えられる<sup>17)</sup>。これを考慮すれば前縁に近いところでは Blasius の解で近似でき、下流に進むにつれて速度分布は乱流型となってくる。4 章の結果に示されたような明確な変曲点のあるよ

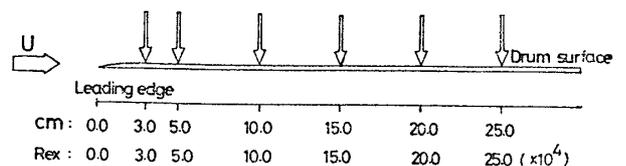


Fig. 14 Measured points

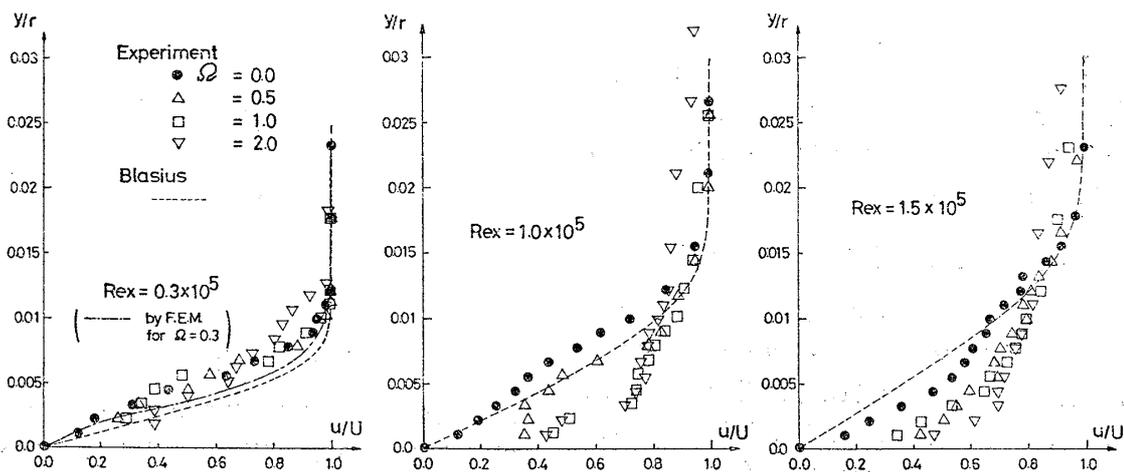


Fig. 15 Observed axial velocity profiles ( $Re=9.0 \times 10^4$ )

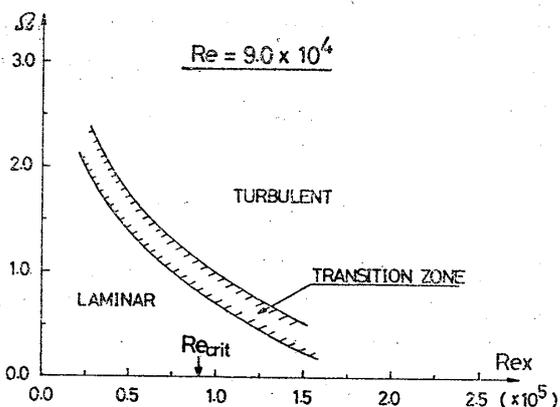


Fig. 16 Observed laminar-turbulent transition

うな速度分布は存在することができず乱流化してしまうと考えられる。層流乱流の区別は、速度分布の形状からも推定できるが、LDV の速度表示の様子が、層流では安定した値が得られ、intermittent な状態では全く不安定で、さらに乱流化が進むと再び安定した計測が行えることから大雑把に予測できる。これらの点から横軸に局所レイノルズ数  $Re_x$  をとり、縦軸に速度比  $\Omega$  をとると Fig. 16 のように層流乱流の領域を区切ることができる。

### 6.2 層流境界層

Fig. 15 の  $Re_x=0.3 \times 10^5$  のグラフにより、層流の場合、回転数をあげるとわずかながら変曲点が明確にみえるようになる。併記してある有限要素法による  $\Omega=0.3$  の場合の計算結果とも傾向は一致している。次に周方向流速について Fig. 17(a) に示す。ここでは  $\Omega=1.0$  のもののみを記した。この分布形状は Fig. 9 に示した計算結果ともよく似ていることがわかる。また Fig. 17(b) に極線図を描くと式 (10) がほぼ成立していることがわかる。

以上のことから、層流境界層に関しては、回転の緩やかな場合には Blasius の解で近似することが可能で、回転が早くなるにつれて計算に示されたとおり、主流方向流速分布に変曲点が生じるが、変曲点が明確に現われる前に乱流遷移が起こることがわかる。

### 6.3 乱流境界層について

本研究では層流境界層について理論的な検討を行ったが、乱流に関しても実験的にいくつかの知見が得られた。まず  $\Omega=2.0$  の場合の主流方向流速の分布を Fig. 18 に示す。点線は二次元平板のまわりの乱流境界層の速度分布を示している。これは壁法則と呼ばれるもので、壁

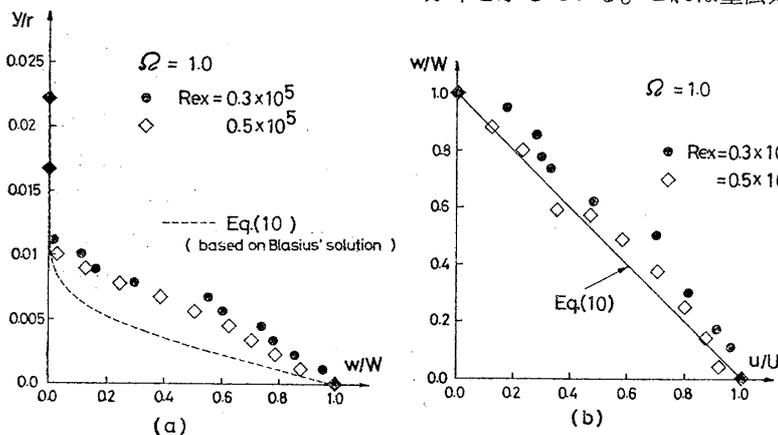


Fig. 17(a) Observed circumferential velocity profiles ( $Re=9.0 \times 10^4$ ),  
(b) Observed polar diagram ( $Re=9.0 \times 10^4$ )

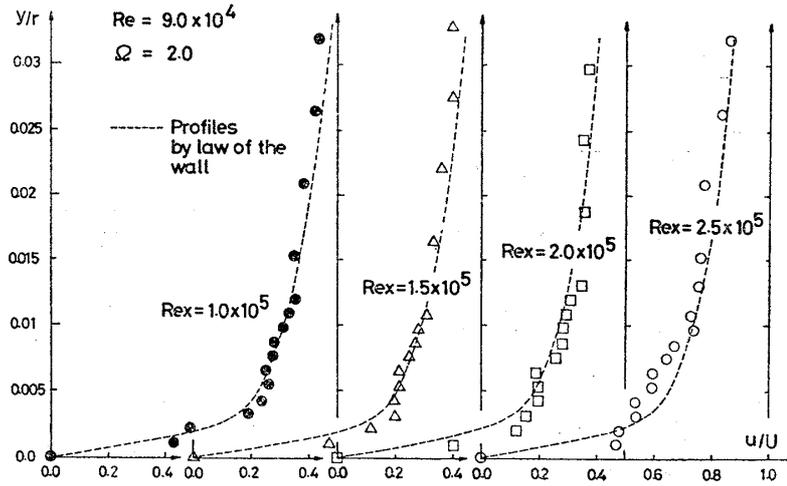


Fig. 18 Observed axial velocity profiles (turbulent)

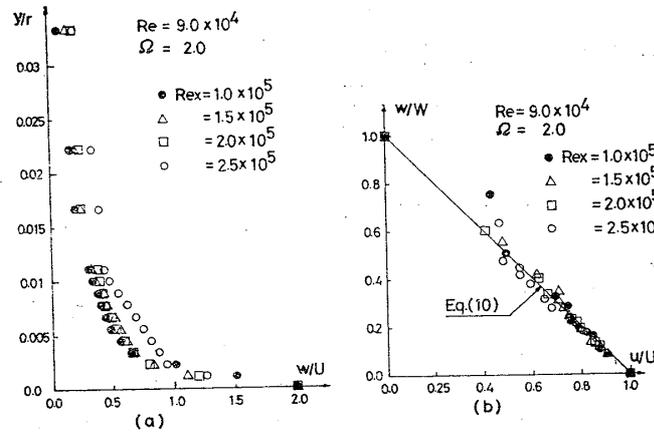


Fig. 19(a) Observed circumferential velocity profiles (turbulent),  
(b) Observed polar diagram (turbulent)

面での摩擦応力を与えて分布形状を決めることができる<sup>18),19)</sup>。ここでは図より壁面応力の値を求めて形状を与えた。これにより乱流の場合においても二次元平板の壁法則の速度分布ではほぼ近似できることがわかる。次に Fig. 19(a) に周方向速度の分布を示した。周方向速度にも粘性底層のあることがわかる。Fig. 19(b) には極線図を示した。ここでも式 (10) はほぼ成立する。このことから剪断応力の2つの成分の比も  $\Omega$  に等しくなる。式 (10) の導出にあたっては、回転が非常に緩やかな層流の場合を仮定しているが、ここで層流ばかりでなく乱流の場合にもほぼ成立していることが示された。

7 考 察

ここで、遠心力による半径方向速度の変化と、振動的に回転運動を行う円柱のまわりの境界層について解析を行う。

7.1 半径方向速度について

本研究の有限要素法による厳密な計算結果によると、

Fig. 20 に示したような速度分布になり、回転が早くなると半径方向速度は壁面の近傍で急激に加速されることがわかる。これは、2.2 に述べた境界層理論では考えることができない。急激に加速される流体の厚みは境界層厚さよりはるかに小さく、このことを考慮して半径方向のつりあい方程式を考える必要があると考えられる。

円筒座標を用いて動径方向の Navier-Stokes の式を

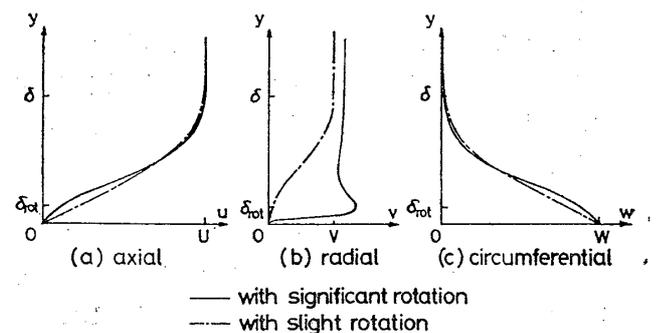


Fig. 20 Velocity profiles

表示すると,

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w^2}{r+y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{(r+y)\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{v}{(r+y)^2} \right) \quad (21)$$

とかける。ただし  $r$  は円筒半径,  $y$  は壁面からの距離である。次に  $u, v$  を回転のない場合の解  $\bar{u}, \bar{v}$  と回転によって付加的に生じる  $\Delta u, \Delta v$  との和で表わし, 式 (21) に代入し, 変形すると,

$$\begin{aligned} \Delta u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + (\bar{u} + \Delta u) \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \Delta v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \Delta v \frac{\partial \Delta v}{\partial y} - \frac{w^2}{r+y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Delta p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} + \frac{\partial \Delta v}{(r+y)\partial y} + \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial y^2} - \frac{\Delta v}{(r+y)^2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。この式で各項のオーダーを評価していく。まず境界層の中で回転の影響を顕著に受ける sublayer の厚さを  $\delta_{rot}$  とし,  $\delta_{rot}$  は境界層厚さよりさらにオーダーが低いとする。また厚さ  $\delta_{rot}$  の sublayer の中では, 主流方向流速は回転の影響が少ないこと, 壁にごく近いことを考えて,

$$\begin{aligned} \bar{u} + \Delta u &\doteq \bar{u}, & \bar{v} + \Delta v &\doteq \Delta v \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &\doteq 0, & \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &\doteq 0 \end{aligned}$$

さらに  $\bar{u}$  と  $\Delta v$  とがほぼ同程度と考え,

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial x} \approx O(\Delta v), \quad \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \approx O\left(\frac{\Delta v}{\delta_{rot}}\right)$$

として各項を評価して支配的な項のみを残すと,

$$\Delta v \frac{\partial \Delta v}{\partial y} - \frac{w^2}{y+r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Delta p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial y^2} \quad (23)$$

が得られる。ここで式 (23) の右辺は流体中の応力の変化を表わしており, 一般に応力の急激な変化は考えられないため右辺を式中からおとす。また  $y+r \doteq r$  とすれば, 簡単のために  $\Delta$  を省き,

$$v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w^2}{r} = 0 \quad (24)$$

のように表わされる。

次に式 (24) を,  $y=0$  で  $v=0$  なる境界条件のもとで解くことを考える。式 (24) で壁面の十分近くであるので壁面の周速度  $W$  を用いて  $w \doteq W$  とし積分すると境界条件を考慮して

$$v = \sqrt{\frac{2y}{r}} W \quad (25)$$

となる。ここで右辺を評価するために,  $W$  を厳密な  $w$  になおし, さらに  $w$  は式 (10) で近似しうるとして

$$v = \sqrt{\frac{2y}{r}} W (1 - u/U) \quad (26)$$

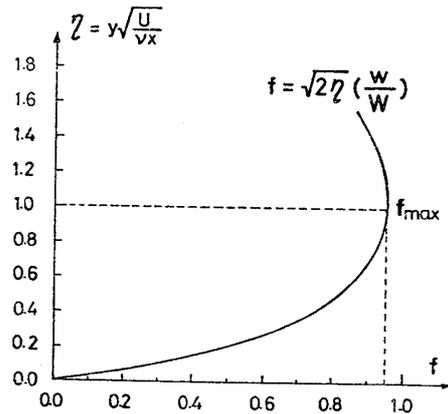


Fig. 21 Function  $f$  near the wall

ここに  $u$  は Blasius の解であって変数  $\eta = y\sqrt{U/(\nu x)}$  の関数として表わされる。この  $\eta$  を用いて

$$f = \left(\frac{w}{W}\right) \sqrt{2\eta} \quad (27)$$

とすれば

$$v = \left(\frac{1}{Re} \cdot \frac{x}{r}\right)^{1/4} W f \quad (28)$$

となる。式 (27) をグラフにしたものが Fig. 21 である。これによると  $\eta=1.0$  付近, すなわち境界層の厚さの 5 分の 1 程度のところで最大値となる。さらに式 (28) を用いて  $\Omega=1.0$  の場合について壁面付近で速度分布を求めたものが Fig. 7 に 2 点鎖線で示したものである。この場合には有限要素法の解とよく一致している。このことから, 逆に有限要素解の妥当であることが推測される。また, Fig. 21 に示したように回転による半径方向速度  $v$  はピークを持ち, その前後で  $\partial v/\partial y$  の符号は正から負へ逆転する。一方, 連続の式より

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (29)$$

であるため  $\partial v/\partial y$  に対応して壁の近くで  $\partial u/\partial x < 0$ , 遠方で  $\partial u/\partial x > 0$  となり, 主流方向流速の分布に変曲点の現われることが定性的に理解される。本節で示したような考え方により, 壁近くの回転の影響を考えることができる。

## 7.2 振動的な回転運動をする円筒のまわりの流れについて<sup>20)</sup>

ここでは回転は緩やかで層流境界層近似が成立するとする。軸対称であるので時間に依存するのは周方向速度成分のみであり, 基礎式は以下のようなものである。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (32)$$

が成立する。式 (30), (31) によって,  $u, v$  は Blasius の解となり, それを用いて式 (32) で  $w$  を求める。ここ

では壁面の周速度が、角振動数を  $\omega$  として

$$w|_{y=0} = W_{\max} \sin \omega t \quad (33)$$

で与えられるとし、さらに  $w(x, y, t)$  を

$$w(x, y, t) = f_s(x, y) \sin \omega t + f_c(x, y) \cos \omega t \quad (34)$$

とおく。式 (34) を式 (32) に代入して、 $f_s, f_c$  に関して、

$$\begin{cases} -\omega f_c + u \frac{\partial f_s}{\partial x} + v \frac{\partial f_s}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 f_s}{\partial y^2} & (35) \\ \omega f_s + u \frac{\partial f_c}{\partial x} + v \frac{\partial f_c}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 f_c}{\partial y^2} & (36) \end{cases}$$

が得られる。式 (35) において、回転が緩やかであって、 $\omega f_c$  が小さく、また式 (10) の類推から

$$f_s = \frac{W_{\max}}{U} (U - u) \quad (37)$$

とすれば、式 (35) は近似的に満足される。

次に式 (36) について考える。まず境界層外縁付近では左辺第 2 項は  $U \partial f_c / \partial x$  と近似でき、左辺の他の 2 項はこれに比して小さいとして落とし

$$U \frac{\partial f_c}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 f_c}{\partial y^2} \quad (38)$$

が成立するとする。式 (38) に対しては変数  $\zeta = y \sqrt{U/2\nu x}$  を導入することによって

$$\frac{d^2 f_c}{d\zeta^2} + \zeta \frac{df_c}{d\zeta} = 0 \quad (39)$$

なる常微分方程式に変換され、その解は  $y = \infty$  で  $f_c = 0$  なる境界条件を考慮し、一つの積分定数  $A_0$  を用いて

$$f_c = A_0 \left[ \sqrt{2\pi} - \int_0^\zeta e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right] \quad (40)$$

と与えられる。 $A_0$  は壁面に近いところでの解との接続を考慮して決められる。

次に壁面に近いところで式 (36) を近似することを考える。壁に近く、回転の影響があり、 $u$  と  $v$  とは同じオーダーであるとして、式 (36) の左辺のうち、

$$u \frac{\partial f_c}{\partial x} \approx O(uf_c), \quad v \frac{\partial f_c}{\partial y} \approx O(uf_c/\delta)$$

であるので、左辺第 2 項は他の項に比して小さいとして、

$$\omega f_s + v \frac{\partial f_c}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 f_c}{\partial y^2} \quad (41)$$

が得られる。この式 (41) に対して式 (37) と Blasius の解を用いて  $f_s, v$  を与え、Runge-Kutta-Gill 法により数値的に  $f_c$  を求める。そしてこの  $f_c$  に対して境界条件は  $y=0$  で  $f_c=0$  だけであるため、解が一義に定まらない。そこで、ここでは式 (40) に示した外部の解と Blasius の境界層厚さ  $\eta=5.0$  で接続する。このとき、 $f_c$  そのものの値ばかりでなく、 $\partial f_c / \partial y$  も連続となるようにする。

実際に解析を行った例を示す。 $Re=2500$ , 円筒面の周方向速度  $w|_{y=0}$  が、角周波数  $\omega=0.1$ , 振幅 1.0 で表

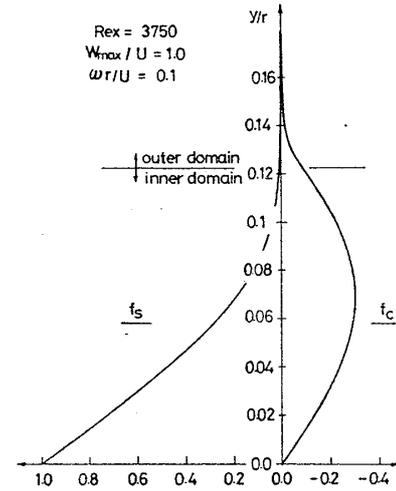


Fig. 22 Distribution of velocity components  $f_s$  and  $f_c$

わされるとき、すなわち

$$w|_{y=0} = \sin 0.1 t \quad (42)$$

なるとき、上述の手法で計算した結果を Fig. 22 に示した。 $Re=3750$  である壁付近では  $f_s$  に比して  $f_c$  は小さく、また外側ほど位相の遅れることがわかる。壁面での剪断応力  $\tau_\varphi$  は

$$\begin{aligned} \tau_\varphi &= \mu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ &= \mu \frac{\partial f_s}{\partial y} \Big|_{y=0} \sin \omega t + \mu \frac{\partial f_c}{\partial y} \Big|_{y=0} \cos \omega t \end{aligned} \quad (43)$$

で与えられ、計算結果より

$$\frac{\partial f_s}{\partial y} = 13.55, \quad \frac{\partial f_c}{\partial y} = -6.78$$

となる。応力の位相は周速度に比して約  $26^\circ$  遅れる。また、式 (43) 中  $\sin$  成分は粘性摩擦減衰力、 $\cos$  成分は付加質量を表わしており、これより付加質量係数  $M$  と、減衰係数  $K$  の比は、

$$M/K = -6.78/13.55$$

$$= -0.497$$

となり、また付加質量は単位面積当り、

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\omega} \frac{\partial f_c}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ = 0.0268 \end{aligned}$$

となり、境界層の厚さが 0.122 程度であるので、境界層の厚さの約 22% の流体が付加質量として板につくことがわかる。ここに示したような比較的周波数の低い場合には、2つの粘性摩擦応力成分に関しては、一定回転の場合と同じく、

$$\tau_\varphi / \tau_x = -w|_{y=0} / U \quad (44)$$

がほぼ成立しており、付加質量に相当する部分は小さいと思われる。このことから、航走中の船体の振動や動揺に関する摩擦減衰力を式 (44) で推定する可能性があ

る<sup>21)</sup>。角田<sup>22)</sup>は、厳密に流体力学的な検討を行ったわけではないが式(44)を用いて船体振動の摩擦減衰力の推定を行っている。

なお、ここに示した計算結果は第一次近似というべきもので、式(35)、(36)で繰り返し計算を行って厳密な解を求めなくてはならない。さらにこれにより得られた解については、実験等と比較して妥当性を検討する必要がある。

## 8 結 論

本研究によって得られた結論は以下のようである。

1) まず回転の緩やかな場合には二次元平板のまわりの境界層理論で十分近似することができ、周方向流速と主流方向流速の間には式(10)に示す簡単な関係が成立する。

2) 回転が速くなると主流方向流速分布に変曲点が生じ、やがて流れは乱流化する。これを解析するには半径方向のつりあいの式をより厳密に評価しなくてはならない。乱流境界層については、本研究の対象外ではあるが、実験によると境界層厚さが薄い場合には二次元平板のまわりの乱流境界層の速度分布と同じになり、また式(10)もほぼ成立する。さらに周期的に回転運動する場合の近似解析法を示した。回転のおそい場合にはほぼ式(44)が成立していると考えられる。

3) また、航走中の船体の粘性減衰力の算定などに応用するためには、考察に示したような解析法を研究する必要があると考えられる。

今後、さらにこの研究を進めるには、まず、回転の影響を方程式に基づいて定量的に求めることや、乱流境界層の研究を行う必要がある。

最後に本研究を行うにあたり、大変有益な御討論、御助言をいただき、また東大キャピテーショントンネル使用の際に数々の便宜をはかっていただいた東大工学部教授 加藤洋治先生はじめ高速力学研究室の前田正二氏、小村隆士氏、宮永大氏に御礼を申しあげます。東大工学部教授 梶谷尚先生、同助教授 大坪英臣先生、東大生研助教授 木下健先生、大阪府立大 池田良穂先生には多くの御討論をいただきました。心から感謝いたします。また東大工学部山本研究室の松原典宏博士、村上貴英氏、そして大学院学生 岡田真三氏には実験に際してまことに惜しめない御協力をいただきました。心から感謝いたします。

## 参 考 文 献

1) C. Wieselsberger : Über den Luftwiderstand bei Gleichzeitiger Rotation des Versuchskör-

pers, Physikalische Zeitschrift, Vol.28(1927), pp.84~88.

- 2) S. Luthander and A. Rydberg : Experimentelle Untersuchungen über den Luftwiderstand bei einer um eine mit der Windrichtung Parallele Achse Rotierenden Kugel, Physikalische Zeitschrift, Vol.36 (1935), pp.552~558.
- 3) H. Schlichting : Die Laminare Strömung um einen Axial Angeströmten Rotierenden Drehkörper, Ing.-Arch., Vol.21 (1953), pp.227~244.
- 4) H. Schlichting and E. Truckenbrodt : Die Strömung an einer Angeblasenen Rotierenden Scheibe, Z. A. M. M., Vol.32 (1952), pp.97~111.
- 5) E. Truckenbrodt : Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an Axial Angeströmten Rotierenden Drehkörpern, Ing.-Arch., Vol.22 (1954), pp.21~35.
- 6) O. Parr : Untersuchungen der Dreidimensionalen Grenzschicht an Rotierenden Drehkörper bei Axialer Anströmung, Ing.-Arch., Vol.32 (1963), pp.393~413.
- 7) Y. Furuya and I. Nakamura : Velocity Profiles in the Skewed boundary Layers on Some Rotating Bodies in Axial Flow, J. of Appl. Mech., Vol.37 (1970), pp.17~24.
- 8) 加藤 弘 : 船の横揺れに対する摩擦抵抗について, 造船協会論文集, 第102号 (1958), pp.115~122.
- 9) 田宮 真, 小村隆士 : 高速航走時の横揺特性, 日本造船学会論文集, 第132号 (1972), pp.159~168.
- 10) H. Schlichting : Boundary Layer Theory, 7th ed., McGraw-Hill (1979).
- 11) 鷲津, 宮本, 山田, 山本, 川井共編 : 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館 (1981).
- 12) R. H. Gallagher et. al. (eds.) : Finite Elements in Fluids, Vols. 1~4, John Wiley and Sons (1975).
- 13) 山本善之, 大和裕幸 : 内部・外部解接続法による粘性流場の解析, 日本造船学会論文集, 第146号 (1979), pp.1~8.
- 14) 加藤, 渡辺, 小村, 前田, 宮永 : 東京大学の船舶用プロペラキャピテーショントンネルの設計思想と特徴, 日本造船学会論文集, 第150号 (1981), pp.148~157.
- 15) I. H. Abbott and A. E. v. Doenhoff : Theory of Wing Sections, Dover (1959).
- 16) 流れの計測懇談会編 : LDV の基礎と応用, 日刊工業新聞社 (1980).
- 17) J. M. Wild : The Boundary Layer of Yawed Infinite Wings, J. of Aeronautical Sciences, Vol.16 (1949), pp.41~45.
- 18) P. S. Klebanoff : Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient, NACA Report-1247 (1955).
- 19) T. Cebeci and A. M. O. Smith : Analysis of

- Turbulent Boundary Layers, Academic Press (1974).  
20) W. Müller: Einführung in die Theorie der Zähnen Flüssigkeiten, Akademische Verlagsgesellschaft (1932).  
21) 池田良穂, 姫野洋司, 田中紀男: 横揺れ減衰につ  
いて, 関西造船協会誌, 第 161 号 (1976), pp. 41  
~49.  
22) 角田令二: 初期設計における船体固有振動許容起  
振力の推定 (第 2 報), 日本造船学会論文集, 第  
110 号 (1961), pp. 391~402.