

(昭和 57 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

薄肉構造の離散化極限解析 (その 3)

—平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション—

正員 都 井 裕* 正員 川 井 忠彦**

Discrete Limit Analysis of Thin-Walled Structures (Part 3)

—Computer Simulation on the Stability Problems by using the Flat Rigid Plate Element—

by Yutaka Toi, *Member* Tadahiko Kawai, *Member*

Summary

In the previous paper¹⁾ the rigid flat plate element was derived for the discrete limit analysis of thin shell structures of arbitrary shape, and numerical results under the assumption of small deformations were shown on the standard elasto-plastic problems. In general the effect of geometrical nonlinearity such as large deformations and buckling behaviors is one of the main factors which determine the ultimate strength of thin-walled structures, however, the method for the general treatment of geometrical nonlinearity is not necessarily given in the conventional plastic analysis^{2)~4)}.

In the present report the general computational algorithm for the discrete limit analysis of thin-walled plate and shell structures is presented, by using the flat rigid plate element of triangular shape. The present algorithm is characterized by the following statements:

(1) The discrete analysis on the limit strength is possible for arbitrary thin-walled structural members, in which the effects of geometrical as well as material nonlinearities are taken into account.

(2) In the application to the structural stability problems a family of simulation models with low degrees of freedom can be derived, including Shanley model in the plastic buckling problem of columns and Yoshimura buckle pattern observed in the non-axisymmetric buckling behavior of circular cylindrical shells, which can be effectively used in qualitative investigations on the instability phenomena of thin-walled structural members.

(3) The formulation expressed in terms of stresses and strains is adopted instead of resultant forces, so that all kinds of constitutive equations can be easily introduced and the application to general material-nonlinear problems such as visco-elasto-plastic problems is possible.

1 序

前報¹⁾では、任意形状を有する薄肉シェル構造の離散化極限解析に用いる三角形平板剛体要素モデルを誘導し、標準的な弾塑性微小変形問題に対する解析例を示したが、本報ではこれを有限変形解析に拡張する。一般に、大変形、座屈などの幾何学的非線形性は薄肉構造物の極限強度を決定する大きな要因の一つであるが、従来の塑性解析法^{2)~4)}においては必ずしもこれらの統一的包括的な扱い方が示されているわけではない。本研究では、剛体要素モデルによる荷重増分解析法にさらに有限変形の影響を加味し、より現実的な離散化極限解析アル

ゴリズムを構成することを試みたものである。

2章では、平板剛体要素モデルによる幾何学的非線形解析アルゴリズムを構成するための準備として、薄肉構造の有限変形問題における近似剛体変位関数を誘導しており、続く3章では、これを用いて Lagrange 流の増分理論⁵⁾に基づく定式化を行っている。前報の弾塑性微小変形解析では通常の塑性解析法に従い、断面力表示による構成式を用いたが、本定式化においては塑性安定問題あるいは弾塑性以外の一般材料非線形問題への適用性を考慮し、応力-ひずみ表示の構成方程式を導入する形式を採用している。4章は数値解析例であり、3章の解析アルゴリズムに従い、柱、平板、円筒殻の座屈崩壊問題を対象とした低自由度シミュレーションモデルを構成し、得られた数値解と理論解の比較により、本解析法の

* 東京大学工学部

** 東京大学生産技術研究所

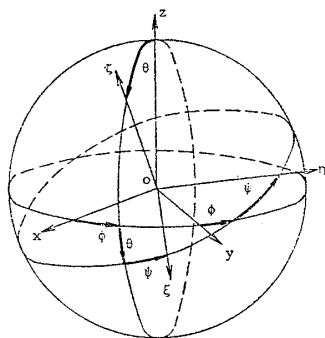


Fig. 1 Definition of Eulerian angles

妥当性を確認するとともに、本アルゴリズムが種々の薄肉構造に対し、その定性的現象把握を中心とする基礎的研究の有効な解析モデルを提供するものであることを明らかにしている。

2 有限変形問題における剛体変位関数

Fig. 1 のように定義される Euler の角 θ , ϕ , ψ を用いると、厳密な 3 次元剛体変位関数は次式により表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + l_\xi x + l_\eta y + l_\zeta z - x \\ v(x, y, z) &= v_0 + m_\xi x + m_\eta y + m_\zeta z - y \\ w(x, y, z) &= w_0 + n_\xi x + n_\eta y + n_\zeta z - z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} l_\xi &= \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \\ l_\eta &= -\cos \theta \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \\ l_\zeta &= \sin \theta \cos \phi \\ m_\xi &= \cos \theta \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \\ m_\eta &= -\cos \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \\ m_\zeta &= \sin \theta \sin \phi \\ n_\xi &= -\sin \theta \cos \phi \\ n_\eta &= \sin \theta \sin \phi \\ n_\zeta &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1) 式における l_ξ , l_η , ..., n_ζ は、運動前の物体固定座標軸 x, y, z と運動後の物体固定座標軸 ξ, η, ζ のなす方向余弦であり⁶⁾、 u_0, v_0, w_0 は原点の並進変位成分である。

(1) 式の各方向余弦を非回転の条件を表わす

$$\theta = 0, \quad \phi + \psi = 0 \quad (2)$$

を中心に Taylor 展開して、 θ および $\phi + \psi$ に関する 2 次項までを考慮する。さらに

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\theta \sin \{(\phi - \psi)/2\} \\ a_2 &= \theta \cos \{(\phi - \psi)/2\} \\ a_3 &= \phi + \psi \\ a_4 &= u_0 \\ a_5 &= v_0 \\ a_6 &= w_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なる変数変換を施すと、 a_i に関する 2 次項までを考慮

した次の 3 次元近似剛体変位関数を得る。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= a_4 - a_3 y + a_2 z \\ &\quad - \{(a_2)^2 + (a_3)^2\} x/2 + a_1 a_2 y/2 + a_1 a_3 z/2 \\ v(x, y, z) &= a_5 - a_1 z + a_3 x \\ &\quad - \{(a_3)^2 + (a_1)^2\} y/2 + a_2 a_3 z/2 + a_2 a_1 x/2 \\ w(x, y, z) &= a_6 - a_2 x + a_1 y \\ &\quad - \{(a_1)^2 + (a_2)^2\} z/2 + a_3 a_1 x/2 + a_3 a_2 y/2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) 式における a_1, a_2, a_3 は運動前の物体固定座標軸 x, y, z まわりの回転変位であり、 a_4, a_5, a_6 は各軸方向の並進変位を意味している。(4) 式の剛体変位関数を、変位に関する 2 次項までを考慮した 3 次元のひずみ-変位関係式に代入し、 a_i に関する 3 次以上の高次項を無視するとすべての有限ひずみ成分が零となることは容易に確認できる。なお、(1) 式から (4) 式を誘導する過程の詳細は文献 7) を参照されたい。

ここで、 $z=0$ により中央面が定義される十分に薄い平板を考えると、次の不等関係式を仮定することができる。

$$\left. \begin{aligned} |z| &\ll |x|, |y| \\ |a_3| &\ll |a_1|, |a_2| \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

第 1 式は寸法に関する幾何学的条件であり、第 2 式は面内回転変位が面外回転変位に比べて十分に小さいという物理的条件である。(5) 式の仮定より、(4) 式から z および a_3 を含む非線形項を無視すると、薄肉平板に対する近似剛体変位関数として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= a_2 z - a_3 y + a_4 - (a_2)^2 x/2 + a_1 a_2 y/2 \\ v(x, y, z) &= a_3 x - a_1 z + a_5 - (a_1)^2 y/2 + a_1 a_2 x/2 \\ w(x, y, z) &= a_1 y - a_2 x + a_6 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

以上では、Euler の角を用いて定義された厳密な 3 次元剛体変位関数から出発して数学的なオーダ評価により薄肉平板に対する近似剛体変位関数 (6) 式を導いたが、(6) 式は次のひずみ-変位関係式を直接積分することにより得ることもできる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x + (1/2)(\partial w / \partial x)^2 = 0 \\ \varepsilon_y &= \partial v / \partial y + (1/2)(\partial w / \partial y)^2 = 0 \\ \varepsilon_z &= \partial w / \partial z = 0 \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x + (\partial w / \partial x)(\partial w / \partial y) = 0 \\ \gamma_{yz} &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y = 0 \\ \gamma_{zx} &= \partial w / \partial x + \partial u / \partial z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(7) 式中の 2 次元ひずみ成分 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ においては、勾配 $\partial w / \partial x, \partial w / \partial y$ に依存する非線形項のみが考慮されており、これは von Kármán による平板の有限変形理論⁸⁾において用いられている仮定の一つであることに注意されたい。(6) 式は (7) 式の有限ひずみ成分を零とする近似的な剛体変位場に過ぎないが、通常の薄肉構造の最終強度解析にはこれで十分と予想される。また、簡略化された変位場であるため、次章に示す増分定式化

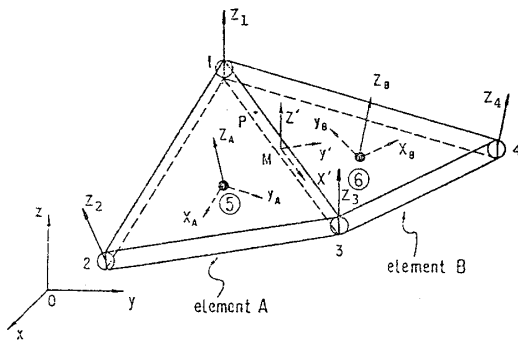


Fig. 2 Flat rigid plate elements

も容易となる。

3 平板剛体要素モデルによる有限変形解析

本章では、有限要素法による構造解析の分野ですでに十分に確立されている Lagrange 流の増分理論⁵⁾に従い、平板剛体要素モデルによる有限変形解析法の定式化を行う⁹⁾。代表的な隣接三角形平板剛体要素を Fig. 2 に示す。これらは要素境界断面上の各点 P において相対運動に抵抗するばね系により結合されている。以下では、Fig. 2 を参照しながら定式化を進める。

3.1 諸座標系の定義

定式化に必要な座標系は Fig. 2 に示されている 4 座標系、すなわち、各節点の空間的な位置を入力するための全体座標系 (0; x, y, z)、各平板剛体要素の面内変位成分を定義するための要素座標系 (5; x_A, y_A, z_A)、(6; x_B, y_B, z_B)、各節点における面外変位を定義するための節点座標系 (i ; z_i) ($i=1, 2, 3, 4$) および剛体要素間の相対変位成分を定義するための要素境界座標系 (M ; x', y', z') である。各局所座標系の原点は肉厚中央面に設けられ、 z 軸は法線方向、 x, y 軸は接線方向を定義しているが、その定め方の詳細は前報¹⁾を参照されたい。

3.2 要素境界の剛性特性

(i) 要素の剛体変位関数

各要素の剛体変位関数を要素座標表示すれば、おのの (6) 式により表わされる。要素 A の剛体変位関数を

$$\left. \begin{aligned} u_A(x_A, y_A, z_A) &= a_2^A z_A - a_3^A y_A + a_4^A \\ &\quad - (a_2^A)^2 x_A / 2 + a_1^A a_2^A y_A / 2 \\ v_A(x_A, y_A, z_A) &= a_3^A x_A - a_1^A z_A + a_5^A \\ &\quad - (a_1^A)^2 y_A / 2 + a_1^A a_2^A x_A / 2 \\ w_A(x_A, y_A, z_A) &= a_1^A y_A - a_2^A x_A + a_6^A \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

または

$$\left. \begin{aligned} \{u_A\} &= [H(x_A, y_A, z_A)] \{a^A\} \\ &\quad + \{\bar{u}_A \text{ (2nd order terms of } a_i^A)\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{u_A\}^t &= [u_A \ v_A \ w_A] \\ \{a_A\}^t &= [a_1^A \ a_2^A \ a_3^A \ a_4^A \ a_5^A \ a_6^A] \end{aligned} \right\}$$

と記す。要素 B の剛体変位関数は、(8)、(9) 式にお

ける添字 A を B として表わす。これらの剛体変位関数における非線形項は、要素間相対変位の非線形成分を評価するために必要となるものであり、節点変位自由度の設定、分布荷重に対する等価節点外力の評価、質量マトリックスの算定などのための変位場としては線形項のみを用いるものとする。なお、(3) 式の 3 次元剛体変位関数に基づく厚肉シェルを対象とした定式化は、文献 7) で紹介されている。

(ii) 変位自由度

面外せん断変形とねじり変形を無視することを前提として、変位自由度としては、各節点 (図中○印で示す) に節点座標軸方向の横たわみの自由度 w_1, w_2, w_3, w_4 、要素座標系原点 (図中●印で示す) に要素座標系による面内変位の自由度 $(u_A)_5, (v_A)_5, (\theta_A)_5, (u_B)_6, (v_B)_6, (\theta_B)_6$ を設定する。これらの変位自由度と a_i^A, a_i^B ($i=1, 2, \dots, 6$) の関係は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{a\} &= [A] \{u\} \\ \text{ここに} \quad \{a\}^t &= [a_1^A \ a_2^A \ a_3^A \ a_4^A \ a_5^A \ a_6^A \ a_1^B \ a_2^B \ a_3^B \ a_4^B \ a_5^B \ a_6^B] \\ \{u\}^t &= [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ (u_A)_5 \ (v_A)_5 \ (\theta_A)_5 \ (u_B)_6 \ (v_B)_6 \ (\theta_B)_6] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

各変位自由度をいずれも平板要素中央面上に設ければ、(10) 式における $[A]$ マトリックスとして前報¹⁾の Table 2 をそのまま用いることができる。

(iii) 相対変位

前報の微小変形問題の定式化においては、平板要素中央面の並進および回転相対変位の両者を用いて隣接要素間の相対変位を定義したが、有限変形解析においては、塑性安定問題などで肉厚方向の塑性域の進展過程を考慮する必要性から、要素境界断面上の各点 P における並進変位成分を用い要素間相対変位を定義する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= \{l_x^B (u_B)_P + m_x^B (v_B)_P\} \\ &\quad - \{l_x^A (u_A)_P + m_x^A (v_A)_P\} \\ \delta_y &= \{l_y^B (u_B)_P + m_y^B (v_B)_P + n_y^B (w_B)_P\} \\ &\quad - \{l_y^A (u_A)_P + m_y^A (v_A)_P + n_y^A (w_A)_P\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} l_x^A &= \vec{x}' \cdot \vec{x}_A & m_x^A &= \vec{x}' \cdot \vec{y}_A \\ l_x^B &= \vec{x}' \cdot \vec{x}_B & m_x^B &= \vec{x}' \cdot \vec{y}_B \\ l_y^A &= \vec{y}' \cdot \vec{x}_A & m_y^A &= \vec{y}' \cdot \vec{y}_A & n_y^A &= \vec{y}' \cdot \vec{z}_A \\ l_y^B &= \vec{y}' \cdot \vec{x}_B & m_y^B &= \vec{y}' \cdot \vec{y}_B & n_y^B &= \vec{y}' \cdot \vec{z}_B \end{aligned} \right\}$$

($\vec{\cdot}$ は各座標軸方向の単位ベクトル、 $\cdot$ は内積を意味する)。 (11) 式の δ_x, δ_y はそれぞれ要素境界断面上の任意点 P における x' 軸、 y' 軸方向の並進相対変位である。前項で述べたように節点に横たわみの自由度を設定しているため、 z' 軸方向の並進相対変位 δ_z は無視される。

(iv) 相対変位の増分

Table 1 Matrix $[B]$ in eq. (14)(where $x_A = (x_A)_P$, etc.)

	a_1^A	a_2^A	a_3^A	a_4^A	a_5^A	a_6^A
δ_x	$m_x^A z_A + m_x^A a_1^A y_A$ $-\frac{1}{2} l_x^A a_2^A y_A - \frac{1}{2} m_x^A a_2^A x_A$	$-l_x^A z_A + l_x^A a_2^A x_A$ $-\frac{1}{2} l_x^A a_1^A y_A - \frac{1}{2} m_x^A a_1^A x_A$	$l_x^A y_A - m_x^A x_A$	$-l_x^A$	$-m_x^A$	0
δ_y	$m_y^A z_A + m_y^A a_1^A y_A - n_y^A y_A$ $-\frac{1}{2} l_y^A a_2^A y_A - \frac{1}{2} m_y^A a_2^A x_A$	$-l_y^A z_A + l_y^A a_2^A x_A + n_y^A x_A$ $-\frac{1}{2} l_y^A a_1^A y_A - \frac{1}{2} m_y^A a_1^A x_A$	$l_y^A y_A - m_y^A x_A$	$-l_y^A$	$-m_y^A$	$-n_y^A$

	a_1^B	a_2^B	a_3^B	a_4^B	a_5^B	a_6^B
	$-m_x^B z_B - m_x^B a_1^B y_B$ $+\frac{1}{2} l_x^B a_2^B y_B + \frac{1}{2} m_x^B a_2^B x_B$	$l_x^B z_B - l_x^B a_2^B x_B$ $+\frac{1}{2} l_x^B a_1^B y_B + \frac{1}{2} m_x^B a_1^B x_B$	$-l_x^B y_B + m_x^B x_B$	l_x^B	m_x^B	0
	$-m_y^B z_B - m_y^B a_1^B y_B + n_y^B y_B$ $+\frac{1}{2} l_y^B a_2^B y_B + \frac{1}{2} m_y^B a_2^B x_B$	$l_y^B z_B - l_y^B a_2^B x_B - n_y^B x_B$ $+\frac{1}{2} l_y^B a_1^B y_B + \frac{1}{2} m_y^B a_1^B x_B$	$-l_y^B y_B + m_y^B x_B$	l_y^B	m_y^B	n_y^B

(11)式より, 非線形項まで含めた相対変位増分 $\Delta\delta_x^*$, $\Delta\delta_y^*$ は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\delta_x^* &= \{l_x^B(\Delta u_B)_P + m_x^B(\Delta v_B)_P\} \\ &\quad - \{l_x^A(\Delta u_A)_P + m_x^A(\Delta v_A)_P\} \\ \Delta\delta_y^* &= \{l_y^B(\Delta u_B)_P + m_y^B(\Delta v_B)_P + n_y^B(\Delta w_B)_P\} \\ &\quad - \{l_y^A(\Delta u_A)_P + m_y^A(\Delta v_A)_P + n_y^A(\Delta w_A)_P\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに, 右辺の変位増分 Δu_A , Δv_A , Δw_A は, (8) 式より次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_A &= u_A(a_i^A + \Delta a_i^A) - u_A(a_i^A) \\ &= z_A \Delta a_2^A - y_A \Delta a_3^A + \Delta a_4^A - x_A a_2^A \Delta a_2^A \\ &\quad + y_A a_1^A \Delta a_2^A / 2 + y_A a_2^A \Delta a_1^A / 2 \\ &\quad - x_A (\Delta a_2^A)^2 / 2 + y_A \Delta a_1^A \Delta a_2^A / 2 \\ \Delta v_A &= v_A(a_i^A + \Delta a_i^A) - v_A(a_i^A) \\ &= x_A \Delta a_3^A - z_A \Delta a_1^A + \Delta a_5^A - y_A a_1^A \Delta a_1^A \\ &\quad + x_A a_1^A \Delta a_2^A / 2 + x_A a_2^A \Delta a_1^A / 2 \\ &\quad - y_A (\Delta a_1^A)^2 / 2 + x_A \Delta a_1^A \Delta a_2^A / 2 \\ \Delta w_A &= w_A(a_i^A + \Delta a_i^A) - w_A(a_i^A) \\ &= y_A \Delta a_1^A - x_A \Delta a_2^A + \Delta a_6^A \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

また, 変位増分 Δu_B , Δv_B , Δw_B は, (13) 式の添字 A を B に置き換えたものである。これらを (12) 式に代入して整理すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta d^*\} &= \{\Delta d(\text{linear})\} + \{\overline{\Delta d}(\text{nonlinear})\} \\ &= [B]\{\Delta a\} + \{\overline{\Delta d}\} \\ \text{ここに} \quad \{\Delta d^*\}^t &= [\Delta\delta_x^* \Delta\delta_y^*] \\ \{\Delta d\}^t &= [\Delta\delta_x \Delta\delta_y] \quad \{\overline{\Delta d}\}^t = [\overline{\Delta\delta_x} \overline{\Delta\delta_y}] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14) 式中の $[B]$ マトリックスの具体形を Table 1 に示す。また, 非線形成分 $\overline{\Delta\delta_x}$, $\overline{\Delta\delta_y}$ はそれぞれ次式のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta\delta_x} &= (1/2) \{l_x^A(x_A)_P(\Delta a_2^A)^2 - l_x^A(y_A)_P \Delta a_1^A \Delta a_2^A \\ &\quad + m_x^A(y_A)_P(\Delta a_1^A)^2 - m_x^A(x_A)_P \Delta a_1^A \Delta a_2^A\} \\ &\quad - (1/2) \{l_x^B(x_B)_P(\Delta a_2^B)^2 - l_x^B(y_B)_P \Delta a_1^B \Delta a_2^B \\ &\quad + m_x^B(y_B)_P(\Delta a_1^B)^2 - m_x^B(x_B)_P \Delta a_1^B \Delta a_2^B\} \\ \overline{\Delta\delta_y} &= (1/2) \{l_y^A(x_A)_P(\Delta a_2^A)^2 - l_y^A(y_A)_P \Delta a_1^A \Delta a_2^A \\ &\quad + m_y^A(y_A)_P(\Delta a_1^A)^2 - m_y^A(x_A)_P \Delta a_1^A \Delta a_2^A\} \\ &\quad - (1/2) \{l_y^B(x_B)_P(\Delta a_2^B)^2 - l_y^B(y_B)_P \Delta a_1^B \Delta a_2^B \\ &\quad + m_y^B(y_B)_P(\Delta a_1^B)^2 - m_y^B(x_B)_P \Delta a_1^B \Delta a_2^B\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(v) 応力

隣接剛体要素 A と B は, 要素境界断面上の各点において相対変位成分 δ_x , δ_y に抵抗するばね系により連結されている。(9) 式に与えられている相対変位増分の線形成分 $\{\Delta d\}$ にこれらのばね定数を乗ずることにより, 次のように点 P における応力増分が計算される。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta s\} &= [D]\{\Delta d\} \\ \text{ここに} \quad \{\Delta s\}^t &= [\Delta\tau \Delta\sigma] \quad [D] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16) 式の τ は面内せん断応力, σ は境界断面法線方向の直応力を意味する。

(vi) 増分形剛性方程式

点 P のばね系に対する増分形の仮想仕事式は, 次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta\tau\delta(\Delta\delta_x) + \Delta\sigma\delta(\Delta\delta_y) + \tau\delta(\overline{\Delta\delta_x}) + \sigma\delta(\overline{\Delta\delta_y}) \\ = [\delta\Delta u]\{\Delta f\} + ([\delta\Delta u]\{f\} - \tau\delta(\Delta\delta_x) - \sigma\delta(\Delta\delta_y)) \end{aligned} \quad (17)$$

ここに, 左辺第 1, 2 項は応力増分, 第 3, 4 項は初期応力, 右辺第 1 項は外力増分, 第 2 項は前段階における不平衡力のなす仮想仕事を意味する。すでに導いた (10), (14), (15), (16) の諸関係式を (17) 式に代入し

Table 2 Matrix $[k_G]$ in eq. (18)(where $x_A = (x_A)_P$, etc.)(a) $[k_G(\tau)]$ matrix($\times \tau$)

	a_1^A	a_2^A	a_1^B	a_2^B
a_1^A	$\frac{1}{2} m_x^A y_A$	$-\frac{1}{4} (l_x^A y_A + m_x^A x_A)$	0	0
a_2^A	sym.	$\frac{1}{2} l_x^A x_A$	0	0
a_1^B			$-\frac{1}{2} m_x^B y_B$	$\frac{1}{4} (l_x^B y_B + m_x^B x_B)$
a_2^B				$-\frac{1}{2} l_x^B x_B$

(b) $[k_G(\sigma)]$ matrix($\times \sigma$)

	a_1^A	a_2^A	a_1^B	a_2^B
a_1^A	$\frac{1}{2} m_y^A y_A$	$-\frac{1}{4} (l_y^A y_A + m_y^A x_A)$	0	0
a_2^A	sym.	$\frac{1}{2} l_y^A x_A$	0	0
a_1^B			$-\frac{1}{2} m_y^B y_B$	$\frac{1}{4} (l_y^B y_B + m_y^B x_B)$
a_2^B				$-\frac{1}{2} l_y^B x_B$

て整理すると、次の増分剛性方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 &([k] + [k_G]) \{du\} = \{df\} + \{f_r\} \\
 &\left. \begin{aligned}
 &\text{ここに} \\
 &[k] = [A]^t [B]^t [D] [B] [A] \\
 &[k_G] = [A]^t ([k_G(\tau)] + [k_G(\sigma)]) [A] \\
 &\{f_r\} = \{f\} - [A]^t [B] \{s\}
 \end{aligned} \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

$[k]$ は初期変形の影響を含む増分剛性マトリックス、 $[k_G]$ は初期応力マトリックスであり、 $[k_G(\tau)]$ および $[k_G(\sigma)]$ の具体形は Table 2 に示されている。 $\{f\}$ および $\{f_r\}$ はそれぞれ外力および不平衡力ベクトルである。

(vii) 断面剛性マトリックス

(18) 式の剛性マトリックス $[k]$ および $[k_G]$ は点 P における単位面積当たりの剛性マトリックスであり、これを要素境界断面上で積分することにより、断面剛性マトリックスが得られる。(18) 式の $[k]$ および $[k_G]$ は点 P の要素座標 $((x_A)_P, (y_A)_P, (z_A)_P)$, $((x_B)_P, (y_B)_P, (z_B)_P)$ の関数として表わされているが、積分の便宜上これらを次のようにパラメータ表示する。

$$\left. \begin{aligned}
 (x_A)_P &= h_1(s)(x_A)_1 + h_2(s)(x_A)_3 \\
 (y_A)_P &= h_1(s)(y_A)_1 + h_2(s)(y_A)_3 \\
 (x_B)_P &= h_1(s)(x_B)_1 + h_2(s)(x_B)_3 \\
 (y_B)_P &= h_1(s)(y_B)_1 + h_2(s)(y_B)_3 \\
 (z_A)_P &= (z_B)_P = (H/2)t
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに

$$h_1(s) = (l_{13} - s)/l_{13}, \quad h_2(s) = s/l_{13}$$

式中、 l_{13} は境界辺 13 の長さ、 H は肉厚である。このように表示すると、 $[k]$ および $[k_G]$ は無次元パラメータ s, t の関数となり、積分領域は

$$-1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (20)$$

である。このとき、境界線方向、肉厚方向の積分点の数をそれぞれ M, N とすれば、境界断面の接線剛性マトリックス $[k_T]$ は次のように計算される。

$$[k_T] = l_{13} H \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{ij} ([k(s_i, t_j)] + [k_G(s_i, t_j)]) \quad (21)$$

ここに、 w_{ij} は適当な重み係数である。

なお、(18) 式における不平衡力ベクトル $\{f_r\}$ に対しても以下に示す同様の数値積分が必要になる。

$$\{f_r\} = \{f\} - l_{13} H \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{ij} [A]^t [B(s_i, t_j)] \quad (22)$$

本離散化手法の主目的は短い計算時間で極限強度をよりの確に評価することであり、数値積分点の数は最少限に押える必要がある。従来の塑性解析における断面力表示による降伏曲面も近似的なものに過ぎないことを考慮すれば、境界線方向については $M=1 \sim 3$ 程度、肉厚方向については $N=3 \sim 5$ 程度で十分であろう。

3.3 ばね定数

(14) 式で与えた相対変位増分を用いて、点 P におけ

るせん断ひずみ増分 $\Delta\gamma$ と直ひずみ増分 $\Delta\epsilon$ を次のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma &= 2\Delta\delta_x/(d_5+d_6) \\ \Delta\epsilon &= \Delta\delta_y/(d_5+d_6) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここに、 d_5 と d_6 はそれぞれ要素座標系原点 5 および 6 から境界辺 13 に降ろした垂線の長さである。(23) 式を平面応力問題の構成式に代入し、(16) 式の関係を用いると、弾性状態におけるばね定数が次式のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^e &= E/(1+\nu)(d_5+d_6) \\ k_{22}^e &= E/(1-\nu^2)(d_5+d_6) \\ k_{12}^e &= k_{21}^e = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

塑性変形時のばね定数は、仮定された降伏条件式

$$\bar{\sigma} = f(\tau, \sigma) = \sigma_y \quad (25)$$

(ここに、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 σ_y は単軸降伏応力) における $f(\tau, \sigma)$ を塑性ポテンシャルとして塑性流れ理論に従い

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^p &= k_{11}^e - (k_{11}^e)^2 (\partial f / \partial \tau)^2 / S \\ k_{12}^p &= k_{21}^p = -k_{11}^e k_{22}^e (\partial f / \partial \tau) (\partial f / \partial \sigma) / S \\ k_{22}^p &= k_{22}^e - (k_{22}^e)^2 (\partial f / \partial \sigma)^2 / S \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここに

$S = H'/(d_5+d_6) + k_{11}^e (\partial f / \partial \tau)^2 + k_{22}^e (\partial f / \partial \sigma)^2$ と定めることができる¹⁰⁾。(26) 式における H' はひずみ硬化係数であり、接線係数 E_t と次の関係がある。

$$H' = E_t E / (E - E_t) \quad (27)$$

なお、除荷の判定条件は次式により表わされる。

$$k_{11}^e (\partial f / \partial \tau) \Delta\delta_x + k_{22}^e (\partial f / \partial \sigma) \Delta\delta_y \leq 0 \quad (28)$$

4 安定問題のシミュレーション

前章までの定式化に従い、代表的な薄肉構造要素の安定問題に対する低自由度シミュレーションを試みる。まず、本アルゴリズムの構成手順を 1 次元部材に適用すると、よく知られた柱の塑性座屈問題に対する Shanley モデル¹¹⁾が得られることを説明し、続いて、3 章の三角形平板剛体要素モデルに対する定式化を平板の塑性座屈問題および円筒殻の非軸対称弾性座屈問題に応用し、「一般化 Shanley モデル」とも称すべき一連の低自由度解析モデルが構成されることを明らかにする。

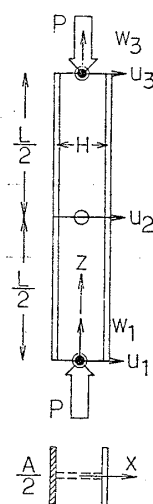
4.1 柱の塑性座屈

Fig. 3 (a) に示すような 2 剛体棒要素にモデル化された両端支持 H 型断面柱の強軸方向の曲げ変形を伴う軸圧縮塑性座屈問題を考える。

Fig. 3 (a) のように各剛体要素の変位自由度を設定すると、境界条件および問題の対称性より

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_3 = 0 \\ w_1 &= -w_3 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

が成立するので、 w_3 および u_2 を独立自由度とする 2 自由度系として扱えることになり、以下ではこれらを単に w および u と記述する。



(a) Rigid bar element representation

Fig. 3 Plastic buckling of axially-compressed columns

3.2 節 (i) 項の (8) 式に相当する各要素の剛体変位関数は

$$\left. \begin{aligned} u(x, z) &= a_2 z + a_4 \\ w(x, z) &= a_6 - (a_2)^2 z^2 / 2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

と表わされる。(30) 式を用いて (ii)~(iii) 項に相当する手順を踏むことにより、柱中央部の要素境界断面における軸方向相対変位として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_z &= 2w + (2tH/L)u + (2/L)u^2 \\ x &= (H/2)t \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

(31) 式から (iv) 項 (14), (15) 式のような増分形の相対変位が次のように計算される。

$$\begin{aligned} \Delta\delta_z^* &= \Delta\delta_z + \bar{\Delta}\delta_z \\ &= 2\Delta w + (2tH/L)\Delta u + (4/L)u\Delta u \\ &\quad + (2/L)(\Delta u)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

中央部断面に分布するばねに生ずる応力増分は (v) 項 (16) 式に倣い

$$\Delta\sigma = k\Delta\delta_z \quad (33)$$

と表わされ、弾性変形時のばね定数は 3.3 節と同様の方法により

$$k = E/L \quad (34)$$

と決定される。応力-ひずみ関係における比例限は $0.7\sigma_y$ と仮定し、比例限以後、降伏応力に達するまでは次式に従い、接線係数が減少するものと仮定する。

$$E_t/E = -(10/3)|\sigma/\sigma_y| + 10/3 \quad (35)$$

問題の対称性より 1/2 解析とすれば、(vi) 項 (17) 式に相当する増分形仮想仕事式は

$$(1/2)\{\Delta\sigma\delta(\Delta\delta_z) + \sigma\delta(\bar{\Delta}\delta_z)\} = \Delta P\delta(\Delta w) \quad (36)$$

と表わされる。ただし、不平衡力の項は省略されている。すでに誘導した諸関係式を用いれば、中央部断面任意点に対する増分形剛性方程式として次式を得る。

$$\left(2k \begin{bmatrix} 1 & \frac{tH}{L} + \frac{2}{L}u \\ \frac{tH}{L} + \frac{2}{L}u & \left(\frac{tH}{L} + \frac{2}{L}u \right)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma}{L} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta w \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37a)$$

または

$$[k(t)]\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (37b)$$

各フランジ断面上で応力は一様分布と仮定し、ウェブの存在を無視すると、(vii) 項で述べた断面剛性方程式は次式のように表わされる。

$$(A/2)([k(t=-1)] + [k(t=1)])\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (38)$$

(37), (38) 式は、軸方向の変形まで考慮に入れた Shanley モデルに対する増分形の剛性方程式を与えており、(32)~(35) 式を併用することにより、柱の塑性座屈現象に対する 2 自由度シミュレーションが可能となる。

数値計算は、微小な初期たわみ u^0 を有し、 $A=0.2$, $H=1$, $E=100$, $\sigma_y=1$ なる諸元を有する柱について行い、結果を Fig. 3 (b) と (c) に示す。Fig. 3 (b) には細長比 $L/r=20$, 初期たわみ $u^0/L=10^{-7}$ の柱に対する荷重・たわみ曲線および断面内のひずみ分布が示されており、Shanley が説明したように、接線係数応力を超えた柱が除荷を伴いながら (図中○印) 急激にそのたわみを増し、等価係数応力に至る前に最高荷重 (図中↓印) に達している様子が理解される。Fig. 3 (b) は column curve であり、初期たわみ u^0/L を 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-7} と減じてゆくと、最高荷重が接線係数応力を超え等価係数応力に近付く様子が示されている。 $u^0/L=10^{-4}$ 程度では最高荷重はほぼ接線係数応力に一致しており、最高荷重が接線係数応力以上の時は常に除荷を伴っていたことを述べておく。

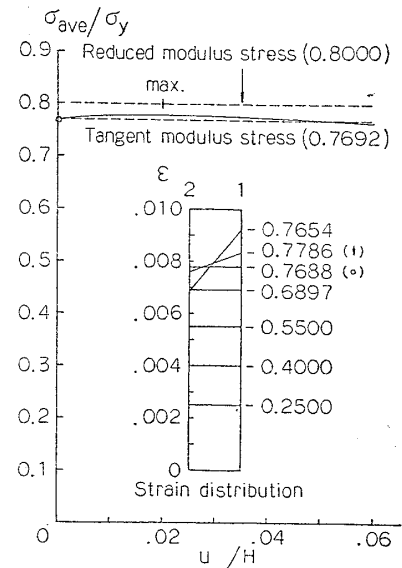
以上で説明したことから、板殻構造を対象とした平板剛体要素モデルの有限変形解析アルゴリズムを 1 次元部材に適用すると、Shanley モデルに相当する 2 自由度モデルが得られることが明らかである。

4.2 平板の塑性座屈

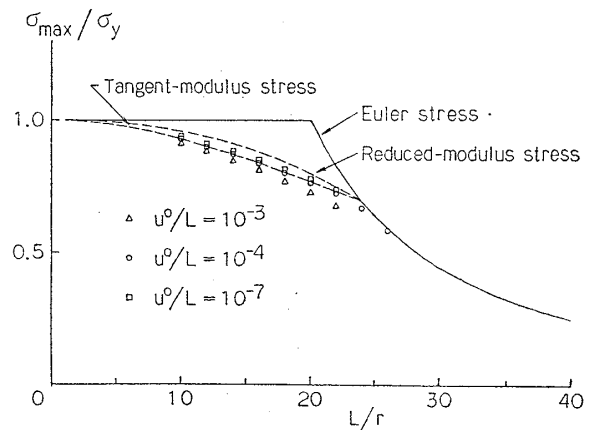
面内圧縮荷重を受ける周辺支持正方形板を Fig. 4 (a) に示すように 4 剛体三角形要素にモデル化する。各要素座標系および節点座標系は図中の全体座標系と同じ方向に定義し、面内自由度が設定される要素座標系原点は正方形板の 4 辺の中点 (図中●印) に設ける。

問題の対称性と境界条件を考慮すると変位自由度間に

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -u_4 \\ v_1 &= -v_3 \\ w_1 &= w_2 = w_3 = w_4 = 0 \\ u_1 &= u_3 = v_2 = v_4 = 0 \\ \theta_1 &= \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$



(b) Load-deflection curve
($L/r=20$, $u^0/L=10^{-7}$)



(c) Column curves

Fig. 3 Plastic buckling of axially-compressed columns

なる関係が成立するので、平板全体の独立自由度は u_4 , v_3 , w_5 の 3 自由度となり、以下ではこれらを単に u , v , w と記述する。また、境界辺 45 のみに着目し、1/4 解析として扱うことができる。

定式化は 3.2 節および 3.3 節に示した諸式に従えばよい。積分点の数を $M=1$, $N=3$ とすることを前提とし、境界辺 45 の中央部における肉厚方向任意点 P の相対変位増分を 3.2 節 (i)~(iv) 項に従い計算し、(10) 式を用いて u, v, w により表現すれば

$$\left. \begin{aligned} \Delta \delta_x^* &= \Delta \delta_x = -(\Delta u + \Delta v)/\sqrt{2} \\ \Delta \delta_y^* &= \Delta \delta_y + \Delta \delta_y \\ &= (\Delta v - \Delta u)/\sqrt{2} + \sqrt{2} t H \Delta w / L \\ &\quad + \sqrt{2} w \Delta w / L + (\Delta w)^2 / \sqrt{2} L \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

さらに、(v), (vi) 項に従い、点 P に対する増分形剛性方程式として次式を得る。

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2}(k_{11}+2k_{21}+k_{22}) & \frac{1}{2}(k_{11}-k_{22}) & -\frac{1}{L}(k_{21}+k_{22})(w-tH) \\ \hline \text{sym.} & \frac{1}{2}(k_{11}-2k_{21}+k_{22}) & \frac{1}{L}(k_{22}-k_{21})(w-tH) \\ \hline & & \frac{2}{L^2}k_{22}(w-tH)^2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \\ \hline \text{sym.} & \frac{\sqrt{2}\sigma}{L} & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sigma LH}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41a)$$

または

$$[k(t)]\{u\} = \{\Delta f\} \quad (41b)$$

数値積分則として台形則を用いれば、境界辺 45 の断面剛性方程式は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} & (LH/4\sqrt{2})\{[k(t=1)]+2[k(t=0)] \\ & +[k(t=1)]\}\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \end{aligned} \quad (42)$$

(41), (42) 式は圧縮平板の塑性座屈現象に対する 3 自由度シミュレーションの基礎となる増分形剛性方程式であり、柱の塑性座屈問題における Shanley モデルを平板に拡張した解析モデルと考えることができる。

数値計算は微小な初期たわみ $w=w^0$ を有する $H=1$, $E=200$, $\nu=0$, $\sigma_y=1$ なる正方形平板に対し行った。応力-ひずみ関係における比例限 σ_p を判定する条件として、Mises の降伏条件を参照し、次式を仮定した。

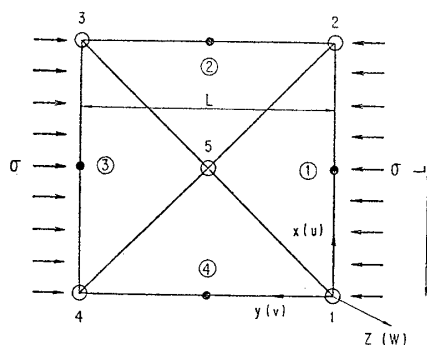
$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= f(\tau, \sigma) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} = \sigma_p \\ \text{ここに} \quad \sigma_p &= 0.7\sigma_y \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

比例限以後、降伏応力に達する間は、柱の場合と同様、

$$E_t/E = -10\bar{\sigma}/3\sigma_y + 10/3 \quad (44)$$

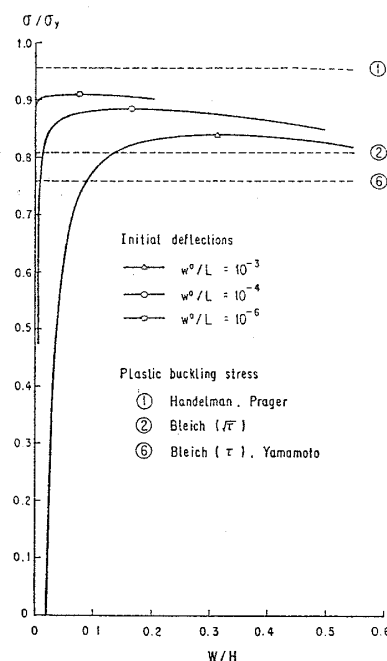
に従い接線係数が減少するものと仮定し、3.3 節 (26) 式によりばね定数を定めた。

初期たわみを $w^0/L=10^{-3}$, 10^{-4} , 10^{-6} と仮定して得た解析結果を代表的な塑性座屈荷重の理論解¹³⁾と比較して Fig. 4 (b) および (c) に示す (Fig. 4 (b) における○, △, □印は最高荷重点を示す)。これらの解析結果から判断される定性的事項を列挙すると以下のようなになる。(i) $w^0/L \rightarrow 0$ の時、数値計算による最高荷重は、塑性流れ理論に基づく最も精密な理論解と考えられる Handelman と Prager の解に漸近してゆく。(ii) 実際

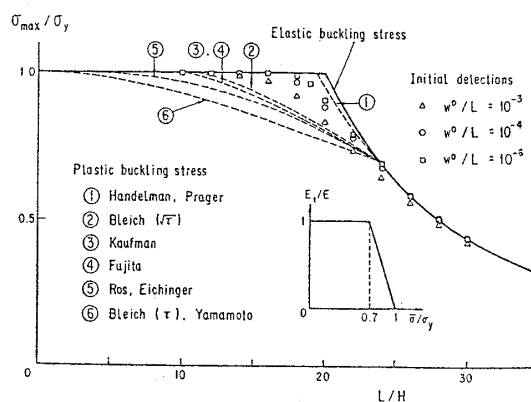


(a) Rigid element representation
Fig. 4 Plastic buckling of compressed square plates

の平板の初期たわみのオーダーと考えられる $w^0/L=10^{-3}$ 程度では Bleich の $\sqrt{\tau}$ 公式 (この呼び方は文献 14) による) などが比較の数値解に近い。(iii) 等方性接線係数理論による Bleich の τ 公式 (あるいは山本による Shanley 安定限下限) は数値解と比較してかなり安全側にあり、塑性座屈荷重の下限と考えられる。これらの事



(b) Load-deflection curves ($L/H=20$)



(c) Comparison between calculated maximum stresses and theoretical buckling stresses
Fig. 4 Plastic buckling of compressed square plates

項はいずれも古くから数多く行われた解析的・実験的研究から得られている定性的知見^{14),15)}と一致しており、本解析モデルの妥当性が確認されたと考えられる。

なお、任意の曲面を対象にした3章の定式化を平板に適用する場合の単純化については文献9)で触れられており、本3自由度モデルに即した詳細な定式化は文献12)を参照されたい。

4.3 円筒殻の非軸対称弾性座屈

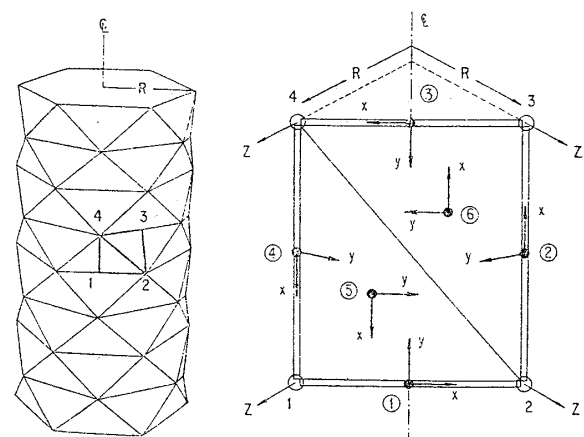
軸圧縮荷重を受ける薄肉円筒の座屈崩壊時には Fig. 5 (a) に示すような diamond pattern が観察される。これは Yoshimura buckle pattern¹⁶⁾ として知られており、円筒殻の非軸対称座屈挙動の研究、特にその定性的把握のための解析モデルとしてしばしば利用される^{17)~19)}。この座屈パターンは互いに折れ曲がった三角形平板の集合体であり、本平板剛体要素モデルをそのまま用いて模擬することができる。本節ではこの座屈パターンの規則性を利用して、平板剛体要素モデルによる低自由度シミュレーションモデルを構成し、非軸対称座屈問題に対する固有値解析を試みる。

境界条件を無視すれば、Yoshimura buckle pattern の周期性より Fig. 5 (a) における四辺形領域 1 2 3 4 のみを解析対象とすればよく、この部分を Fig. 5 (b) に示すように6要素にモデル化する。図中には各変位自由度を定義するための要素座標軸および節点座標軸が示されている。また、4つの領域境界辺(12, 23, 34, 41)上における要素境界座標を含む各局所座標系は、それぞれの原点位置における円筒曲面の法線および接線方向を正確に指し示すように定義されている。総変位自由度数は26であるが、座屈モードの周期性と対称性を考慮し、さらに要素5と6の面内回転変位を無視すると、変位自由度間に次の関係が成立する。

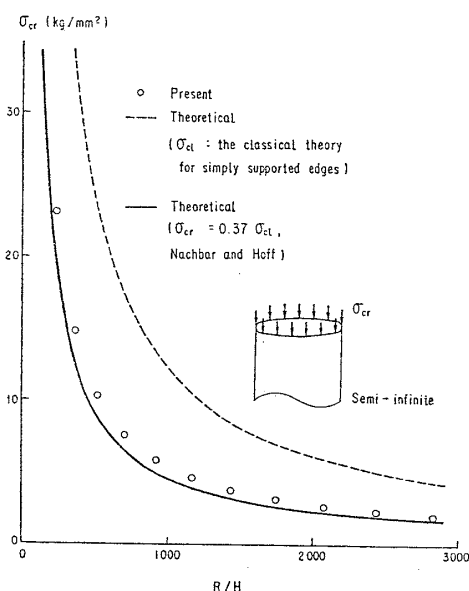
$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_3 \\ w_2 &= w_4 \\ u_1 &= u_3 \\ v_5 &= v_6 \\ v_1 &= v_2 = v_4 = 0 \\ \theta_1 &= \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0 \\ \theta_1' &= \theta_2' = \theta_3' = \theta_4' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

(ここに、 θ_i' は線要素 i の軸まわり回転変位を意味する。)したがって、本解析モデルにおける独立自由度は $w_1, w_2, u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, v_3, v_5$ の9自由度となる。この9自由度モデルに対し、3章の定式化に従い特有方程式を導き、座屈固有値解析を行った。

円筒殻の諸元は $R=100\text{ mm}$, $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\nu=0$ である。断面剛性を得るための数値積分は $M=1$, $N=3$ とし台形則を用いた。Nachbar と Hoff による軸圧縮円筒の端部座屈問題の理論解²⁰⁾を比較対象とすれ



(a) Yoshimura buckle pattern (b) Analytical model with rigid elements



(c) Comparison between calculated eigenvalues and theoretical buckling stresses

Fig. 5 Non-axisymmetric elastic buckling of circular cylindrical shells under axial compression

ば、周方向の波数 n は次式により計算される。

$$n^2 = 0.32 / (2H/R\sqrt{3(1-\nu^2)}) \quad (46)$$

アスペクト比(辺12と23の長さの比)は試算により最も低い座屈荷重を与える値として1を用いた。半径-肉厚比 R/H を変えながら固有値計算をして得た座屈荷重値を Fig. 5 (c) で理論解と比較している。両端支持の有限長円筒の古典座屈応力 σ_{cl} に対し、Nachbar と Hoff は $0.37\sigma_{cl}$ なる座屈応力値を与えている。本計算結果は約 $0.44\sigma_{cl}$ であり、低自由度モデルのためやや高目の値が得られたが、 R/H の座屈応力に及ぼす影響など定性的には理論解析結果をよく説明している。また、アスペクト比も理論解の波形とほぼ対応する。

5 結 論

本論文では、三角形平板剛体要素モデルによる薄肉板殻構造の一般的な離散化極限解析アルゴリズムを紹介した。本アルゴリズムの主な特徴を以下に示す。

(1) 任意の薄肉板殻構造要素に対し、幾何学的非線形性、材料非線形性の両者を考慮した極限強度解析が可能であり、従来の塑性解析法の適用範囲が大きく拡張される。

(2) 薄肉構造要素の安定問題に応用すると、柱の塑性座屈問題における Shanley モデルから円筒殻の非軸対称座屈問題における Yoshimura buckle pattern に至る一連の低自由度シミュレーションモデルを包括的に構成することが可能であり、種々の不安定現象に対する定性的研究に特に有用である。

(3) 断面力表示の定式化から応力-ひずみ表示に改めたため、任意の構成方程式を導入可能であり、粘弾塑性問題など一般の材料非線形問題への応用が容易である。

参 考 文 献

- 1) 都井, 上田, 川井: 薄肉構造の離散化極限解析 (その2)——一般シェル構造解析のための平板剛体要素モデル——, 日本造船学会論文集, 第151号 (1982), 211.
- 2) P. G. Hodge, Jr.: Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill (1959).
- 3) B. G. Neal: The Plastic Methods of Structural Analysis, 2nd Ed., Chapman & Hall Ltd. (1963).
- 4) 藤田, 楠田, 川井: 塑性設計法, 森北出版 (1960).
- 5) K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd Ed., Pergamon Press (1975).
- 6) 原島: 力学 (改訂版), 裳華房 (1965).
- 7) 都井, 川井: シェル構造の離散化極限解析 (その4)——厚肉シェルの有限変形解析——, 生産研究, 第34巻, 第8号 (1982).
- 8) Y. C. Fung: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall (1965).
- 9) 都井, 川井: シェル構造の離散化極限解析 (その3)——平板剛体要素モデルによる有限変形解析——, 生産研究, 第33巻, 第11号 (1981), 16.
- 10) 山田: 塑性・粘弾性 (コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A), 培風館 (1972).
- 11) F. R. Shanley: Weight-Strength Analysis of Aircraft Structures, McGraw-Hill (1952).
- 12) 都井: 平板の塑性座屈モデル, 東京大学工学部紀要A, No. 19 (1981), 30.
- 13) The Column Research Committee of Japan: Handbook of Structural Stability, Corona Publishing Company, Tokyo (1971).
- 14) 山本: 平板の塑性座屈, 日本機械学会誌, 第60巻, 第467号 (1957), 39.
- 15) 吉識, 藤田: 圧縮力を受ける波板の最高荷重について, 造船協会論文集, 第106号 (1959), 163.
- 16) Y. Yoshimura: On the Mechanism of Buckling of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression, NACA, TM 1390 (1955).
- 17) C. G. Foster: Some Observations on the Yoshimura Buckle Pattern for Thin-Walled Cylinders, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 46 (1979) 377.
- 18) C. G. Foster: Estimation of the Collapse Loads of Thin-Walled Cylinders in Axial Compression, *ibid.*, Vol. 46 (1979), 381.
- 19) R. P. Nimmer and J. Mayers: Limit Point Buckling Loads of Axially Compressed, Circular Cylindrical Shells——The Effect of Nonlinear Material Behavior, *ibid.*, Vol. 46 (1979), 386.
- 20) W. Nachbar and N. J. Hoff: The Buckling of a Free Edge of an Axially-Compressed Circular Cylindrical Shell, Quart. Appl. Math., Vol. 20, No. 3 (1962), 267.