

(昭和 57 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

ランダム荷重下での疲労挙動に関する研究 (第 1 報)

——指数分布のランダム荷重下での疲労寿命の統計的性質——

正員 八 木 順 吉* 正員 長 田 元 宏**
 正員 富 田 康 光* 正員 浅 田 雅 文**
 橋 本 聖 史*

Fatigue Life under Random Loading (1st Report)

——Statistical Values of Fatigue Life under Random

Loading with Exponential Distribution——

by Junkichi Yagi, *Member* Motohiro Nagata, *Member*
 Yasumitu Tomita, *Member* Masafumi Asada, *Member*
 Kiyoshi Hashimoto

Summary

Main purpose of this investigation is to estimate fatigue life or allowable stress under random loading without using well known cumulative damage laws. Basis of the analysis is to obtain fatigue strength diagrams, namely $S-N$ curves, under random loading, and to determine fatigue life or allowable stress directly from the above $S-N$ curves.

Therefore, it is necessary to develop reasonable fatigue test method under random loading and to get $S-N$ curves for random loading experimentally or analytically.

For this reason, it is required to study statistical characteristics of fatigue life under random loading and to compare with results of constant loading tests under various conditions, for example, kind of materials ; type of loading ; shape of specimen or model structure ; range of fatigue life, etc.

To achieve the above purpose, the following experiments were carried out and obtained statistical values of fatigue life and cumulative damage sum by Miner's Rule. The experiments are axial reversed fatigue tests with about 30 pieces of mild steel plain specimen in life range of about 3×10^4 cycles, and loading conditions are (a) constant loading amplitude, and (b) load and strain controlled random loadings with exponential distribution.

From results of these tests, the following conclusions were obtained.

(1) It was found that probability distribution of fatigue life under the above loading conditions conformed with normal or logarithmic normal distribution approximately, by plotting tests on the probability paper and χ^2 tests.

(2) Using F tests, it was clarified that scatter band of fatigue life under random loading was considerably narrower than that of constant loading and the band of the life under strain controlled random loading was little smaller than that of load controlled random loading.

(3) Probability distribution of cumulative damage sum is nearly equal to normal distribution.

(4) Cumulative damage sum is less than 1 and arithmetic mean value of the sum is 0.222 for load controlled loading tests and 0.551 for strain controlled ones.

1 緒 言

構造物あるいは機械要素などが基本的に要求されるこ

とのひとつは使用中に破損しないことで、この破損には種々の様式がある。疲労破壊は各分野での重要な問題で、最近は確率論的な検討を要求されることも多くなった。

構造物、機械要素などに負荷される荷重はその生涯を

* 大阪大学工学部

** 大阪大学大学院工学研究科

通じて一定荷重の繰返しであることは少なく、一般にはある確率密度分布のランダム荷重である。それ故、疲労破壊に対してはランダム荷重下での疲労寿命あるいは許容応力の信頼性の高い解析法の確立が切望されている。

現在、ランダム荷重下での疲労強度解析は通常の一定荷重疲労試験結果（ $S-N$ 線図）と累積被害則（線形累積被害則が多い）を用い、累積被害量が限界値例えば 1 に達すると破壊するという考え方を基本にしている。

この解析法に対しては、累積被害則、限界累積被害量あるいは確率論的な考察に際しての不確定性など多くの問題点が指摘されている。そのため、これらの問題点を明らかにするためにブロック荷重、プログラム荷重、ランダム荷重下の疲労に関する研究が極めて多数精力的に行われているにもかかわらず、これらを代表する適切な解析法が未だ開発されておらず、各分野で上記の解析法が広く使用されている。

本研究は、ランダム荷重下での疲労寿命あるいは許容応力を上記の解析法ではなく、新しく次節 2 で詳述するような解析法で行うための基礎的研究である。

その基本は、ランダム荷重下の材料の疲労強度線図を求めるものである。これは一定荷重疲労試験で得られる $P-S_a-N$ 線図（ここに、 P ：非破壊確率または破壊確率、 S_a ：応力振幅、 N ：疲労き裂発生または破断までの繰返し数）の S_a の代りに、ランダム荷重疲労試験を行いランダム荷重を特徴づける応力の確率密度関数 $f(S_a)$ から定まる $S_a(Q)$ （超過確率が Q である応力振幅）を用いた $P-S_a(Q)-N$ 線図を求め、この線図を用いて直接疲労寿命または許容応力を求めるものである。

それ故、 $P-S_a(Q)-N$ 線図を求めることが重要で、まずその疲労試験法を明らかにすることである。このためには、次節 2 で述べるようにランダム荷重下の疲労寿命の分散および密度分布を種々の条件のもとで求め、特に分散について一定荷重疲労試験での寿命の分散との統計的考察が重要な課題となる。

現在までにブロック荷重、プログラム荷重を含めてランダム荷重下の疲労の諸問題に関する研究は極めて多数実施されているが、上述のような観点からの研究は著者らの知る限りでは皆無であり、単に一定荷重下の寿命とランダム荷重下の寿命の標準偏差を比較している研究が 2, 3 報告されている程度である^{1)~3)}。

本研究は、一定荷重下での疲労寿命の分散とランダム荷重下での寿命の分散とを統計的に考察したものの一部である。

軟鋼の丸棒平滑試験片を用い、破断寿命が約 3×10^4 回の領域で軸力完全両振りのランダム荷重試験を実施した。

ランダム荷重の密度分布は指数分布とし、荷重振幅の

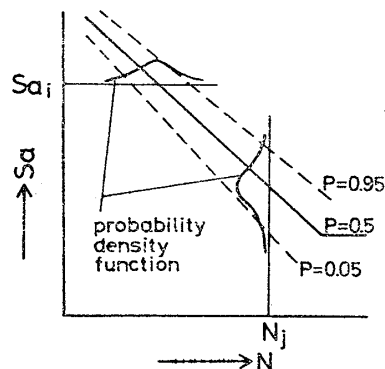


Fig. 1 $P-S_a-N$ diagram

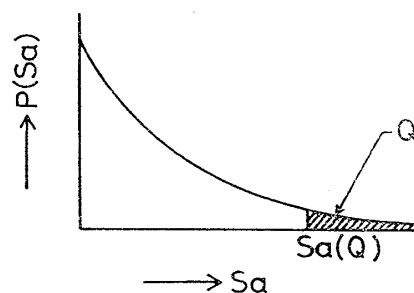


Fig. 2 Probability density function of stress amplitude

下限値をほぼ疲労限に対応する値として、荷重制御および歪制御の 2 種のランダム荷重試験を実施し、疲労寿命の分散、密度分布などの統計量および累積被害量などについて検討した。

2 ランダム荷重下での疲労寿命または許容応力の解析法

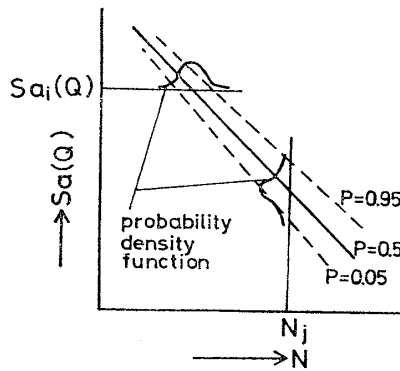
ランダム荷重下での構造物あるいは機械要素などの疲労強度の解析には、設計荷重-耐用期間に負荷されるランダム荷重の密度分布（確率密度関数）および累積繰返し数—ならびにその荷重に対する材料強度— $S-N$ 線図—に関する資料を準備する必要がある。

構造物あるいは機械要素などの生涯に一定荷重が繰返し負荷される場合には、種々の値の一定荷重 S_{ai} を負荷する通常の疲労試験を行い Fig. 1 に示すような $P-S_a-N$ 線図を求める。

この線図から設計応力 S_{ai} に対する寿命 N_i の確率密度関数、または耐用期間に対応する繰返し数 N_j に対する強度（許容応力） S_{aj} の確率密度関数を求めることができる。それ故、設計荷重および材料強度がそれぞれ正確に与えられれば、疲労寿命あるいは許容応力は決定論的にも確率論的にも信頼性のある解析が行える。

次にランダム荷重が負荷される場合について考察する。

ランダムに負荷される応力 S_a の確率密度関数 $f(S_a)$ が例えば Fig. 2 のように求まっているとする。図に示す

Fig. 3 $P-S_a(Q)-N$ diagram

ような確率 Q (斜線部の面積) で定まる応力 $S_a(Q)$ を考えるとき, この確率 Q とは確率密度関数 $f(S_a)$ に従って荷重が負荷されるとき $S_a(Q)$ よりも大きい応力が負荷される確率を表わし超過確率といわれる。したがって, 一つのランダム荷重系はその確率密度関数が与えられれば, ある超過確率 Q をもつ応力 $S_a(Q)$ で表わすことができる。

ランダム荷重が負荷される場合には設計荷重である確率密度関数 $f_i(S_a)$ に従い種々の値の $S_{ai}(Q)$ を負荷する疲労試験を行う。一定荷重を負荷した疲労試験で $P-S_a-N$ 線図を求めたと同様に, S_a の代りに $S_a(Q)$ を縦軸にとった $P-S_a(Q)-N$ 線図を Fig. 3 のように求める*。ここで, 縦軸の $S_a(Q)$ は例えば $Q=Q_0$ である S_a を代表値として $S_a(Q_0)$ で表わすと約束する。なお, $P-S_a(Q)-N$ 線図は今後の研究により明らかにされるもので, Fig. 3 は仮想した線図である。

この $P-S_a(Q)-N$ 線図より, 設計応力 $S_{ai}(Q)$ に対する寿命 N_i の確率密度関数または耐用期間に対応する繰返し数 N_j に対する強度 (許容応力) の確率密度関数を求めることができる。一定荷重の繰返しの場合と同様に, 設計荷重とその設計荷重に対応する材料強度 $P-S_a(Q)-N$ 線図が用意 ($P-S_a(Q)-N$ 線図において $S_a(Q)$ と N および $S_{ai}(Q)$ と寿命の分散の関係にある関数形 $S_a(Q)=f(N)$, $S_{ai}(Q)=g$ (寿命の分散) で近似すること) であれば, 決定論的にも確率論的にも信頼性のあ

る解析が容易に行える。

上述の解析法をとれば, 現在広く使用されている一定荷重下の $P-S-N$ 線図と累積被害則を用いる解析法の種々の問題点—例えば, (1) どの累積被害則を使用するのが適切か, (2) 疲労限の低下の処理, (3) 限界累積被害量 f_{cr} をいくらにすればよいか—などの不確定要素を避けることができ, 従来法に比べ信頼度の高い解析を行うことができる。さらに, 確率論的に考察する場合には, 破損確率が上述の (1), (2), (3) に大きな影響を受け⁴⁾, (1), (2), (3) などの問題点が解決されていない現状では, 上述の解析法は確率論的考察においてますます有効となる。

以上から, $P-S_a(Q)-N$ 線図を求めることが重要な課題であり, これにはランダム荷重下の疲労試験法を確立すること, あるいは $P-S_a-N$ 線図から $P-S_a(Q)-N$ 線図を導くことなどがある。

このうち, 疲労試験法を確立するには種々の問題点があるが, そのうちでも最も重要と考えられるのがランダム荷重下の材料の寿命の分散および密度分布である。

ランダム荷重疲労試験で重要な点のひとつは, ある確率密度関数に従って例えば $S_{a1}(Q)$ を定めて試験を行うとき, これはある大きさの荷重の出現頻度は密度分布に従い, 荷重履歴 (荷重繰返し順序) はほぼ無数にある荷重履歴のうちの任意の一つの試験となる。それ故, 今 $S_{a1}(Q)$ で指定されるランダム荷重疲労試験を2回行ったとすると, それらは荷重の出現頻度および履歴に再現性がない。

もし, 寿命が荷重の出現頻度および履歴に影響を受けるものであれば, $S_{ai}(Q)$ に対する寿命 N_i の分散は一定荷重下の寿命に比べ大きくなる。すると任意に選んだ一つの荷重出現頻度および履歴から求める実験点は平均値から離れた値をとる確率が増え, $P-S_a(Q)-N$ 線図を求めるには多大の労力を要することになり, 場合によっては無意味になることも考えられる。一方, もし分散が一定荷重下の分散に比べ小さければ, 実験点は平均値に近い値をとる確率が大きくなり, 一定荷重下の $S-N$ 線図を求めるのと同程度の労力で, 少なくとも同程度の精度の $S-N$ 線図が得られる。

したがって, ランダム荷重下の疲労寿命の分散を種々の条件下について求め, それと同条件の一定荷重下の寿命の分散とを統計的手法で考察することが必要である。

また, $P-S_a-N$ 線図から $P-S_a(Q)-N$ 線図を推定する考え方は, 上述の資料を基にして考察できる課題と思われる。

* 平均応力または応力比が一定のランダム荷重試験について考察する。 $S_{a1}(Q)$ を負荷するとは, $S_{a1}(Q)$ で超過確率 Q の応力 S_{a1} を指定するとこのランダム荷重系は1つに定まり, 密度分布 $f_1(S_a)$ に従って指定された上下限の荷重範囲内で個々の荷重が定められた出現確率で現われるような繰返し疲労試験となり, その寿命 N_1 が求まる。次に $S_{a2}(Q)$ で超過確率 Q の応力を指定すると, またこのランダム荷重系も決まり同様に寿命 N_2 が求まる。こうして順次 $S_{a3}(Q)$, $S_{a4}(Q)$, ... を負荷して得られる $S_a(Q)-N$ 線図は, 密度分布が $f(S_a)$ であるランダム荷重の下限荷重振幅がある値, 例えば零に対応する $S-N$ 線図である。

Table 1 Chemical composition (%)

	C	Si	Mn	P	S
SM 41 B	0.12	0.23	0.98	0.015	0.012

Table 2 Mechanical properties

	Yield point (Kg/mm ²)	Tensile strength (Kg/mm ²)	Elongation (%)
SM 41 B	31	45	34

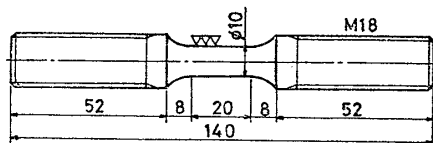


Fig. 4 Size and shape of a specimen (unit mm)

3 実 験

3.1 試 験 片

供試材は軟鋼 SM 41 B で、丸棒試験片は公称板厚 19 mm の板から加工した。ミルシートによる材料の化学成分および機械的性質は Table 1 および Table 2 に示すとおりである。

試験片は最小断面の直径が 10 mm で 20 mm の平行部をもつ WES 162-2 号で、その形状、寸法を Fig. 4 に示す。

試験片は長手方向が圧延方向に一致するように採取し、加工後の熱処理は施していない。

3.2 試験方法

使用した試験機は電気-油圧サーボ式疲労試験機で、容量は ± 25 トン、繰返し速度は 0.1~15 ヘルツ、荷重波形はサイン波である。

疲労試験はすべて軸力の完全両振り荷重である。試験内容は、静的引張試験、繰返し中の応力-歪関係を求めるステップテスト、応力振幅 S_a -破断寿命 N_f 線図を求めるための定荷重疲労試験(18)、歪振幅 ϵ_a -破断寿命 N_f 線図を求めるための定歪疲労試験(16)、一定荷重下の疲労寿命の統計量を求めるための定荷重疲労試験(25)およびランダム荷重下の疲労寿命の統計量を求めるための荷重制御ランダム疲労試験(33)、ならびに歪制御ランダム荷重試験(27)である(なお、() 内の数字は試験した試験片数を表わす)。

定荷重および定歪疲労試験は繰返し速度 0.1~12 ヘルツで行った。

疲労寿命の統計量は破断寿命がおおよそ 3×10^4 回について考察した。そのため定荷重疲労試験では応力振幅を $S_a = 27 \text{ kg/mm}^2$ とし、繰返し速度 5~8 ヘルツで試験

した。ランダム荷重では、その密度分布を指数分布とし、繰返し速度はおおよそ 1.3 ヘルツで負荷荷重範囲を次のように定めた。荷重制御では、応力振幅の上限値は試験中座屈を生じない応力振幅の最大値を選び 40.5 kg/mm^2 、応力振幅の下限値はほぼ疲労限 ($N_f = 2 \times 10^6$) に対応する 21.5 kg/mm^2 で、歪制御の場合は、それぞれの応力振幅にほぼ対応し上限値が $10,000 \mu$ (10^{-2})、おおよび下限値が $1,600 \mu$ (1.6×10^{-3}) である。応力および歪の上限値の超過確率 Q を $Q = 3.33 \times 10^{-5}$ とし—したがって、 $S_a(3.33 \times 10^{-5}) = 40.5 \text{ kg/mm}^2$ の荷重制御ランダム試験を 33 本、 $\epsilon_a(3.33 \times 10^{-5}) = 10,000 \mu$ の歪制御ランダム試験を 27 本実施した—繰返し中の応力振幅は 40.5 kg/mm^2 , 39.5 kg/mm^2 , ..., 21.5 kg/mm^2 のように 1 kg/mm^2 ごとに、歪振幅は $10,000 \mu$, $9,600 \mu$, ..., $1,600 \mu$ のように 400μ ごとに 20 ステップに分割した。ランダム荷重試験での応力の分割数については最低 8 分割が必要とされている⁵⁾。本研究での分割数は 20 であり十分と考えられる。ランダム荷重の応力振幅(歪振幅)の出現頻度および履歴に関しては、それらが全く異なる試験と、それらが同じ試験(寿命のばらつきにより出現頻度は若干異なる)の 2 種類を行い、それらの試験に用いた試験片数は、荷重制御でそれぞれ 24 本および 9 本、歪制御でそれぞれ 19 本および 8 本である。

疲労試験中の歪計測および歪制御には gage length 10 mm の axial extensometer (Model-series 632, 13C) を用いた。

ランダム荷重の発生法の詳細は付録に示す。

4 実験結果および考察

4.1 繰返し中の応力-歪曲線

繰返し中の応力-歪関係は Landgraf らにより提案された step test⁶⁾ を用いて求めた。これは平滑試験片を 1 本用いて完全両振り試験状態での応力-歪曲線を求めるもので 4 種類の方法がある。本実験ではそのうち incremental step test を用いた⁷⁾。

3 本の丸棒試験片を用いた荷重制御の step test の結果を Fig. 5 に示す。図中の 1 点鎖線は静的引張試験の結果である(なお、丸棒試験片の静的引張試験による降伏応力は 33.1 kg/mm^2 、引張強さは 47.1 kg/mm^2 であった)。繰返し中の応力-歪曲線は次式で近似でき、それを図中に実線で示した。

$$S_a/\sigma_Y' = 1.04(\epsilon_a/\epsilon_Y')^{0.314} \quad (1)$$

ただし、 $S_a \geq 18 \text{ kg/mm}^2$

ここに、 σ_Y' は XY レコーダに記録したヒステリシスループにおいて、応力-歪関係が直接関係から離れる点の応力で定義した降伏応力で 18 kg/mm^2 、 ϵ_Y' は σ_Y' に対応する降伏歪で 8.5×10^{-4} である。

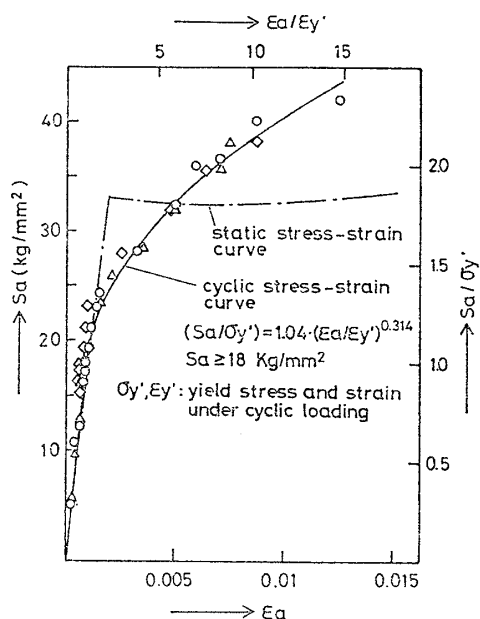


Fig. 5 Stress-strain curves

静的引張試験と step test で得られるヤング率はほぼ同じであるが、降伏応力は後者の方が小さくおよそ 54 %程度である。

4.2 定荷重および定歪疲労試験

疲労試験に先立ち予備実験として丸棒平滑試験片平行部の繰返し中の歪挙動を調べ、その結果として、繰返し中の歪振幅は平行部ではほとんど同じであることを確認した。そのため、以後は axial extensometer で試験片中央部の歪を計測または制御した。

疲労試験全般について、疲労き裂発生あるいは破断は、両端部近傍、中央部など平行部 20mm の領域で生じたが、破断位置以外でもき裂発生が認められた。

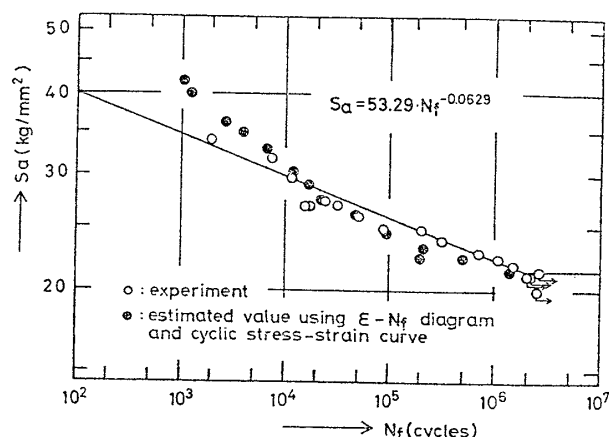
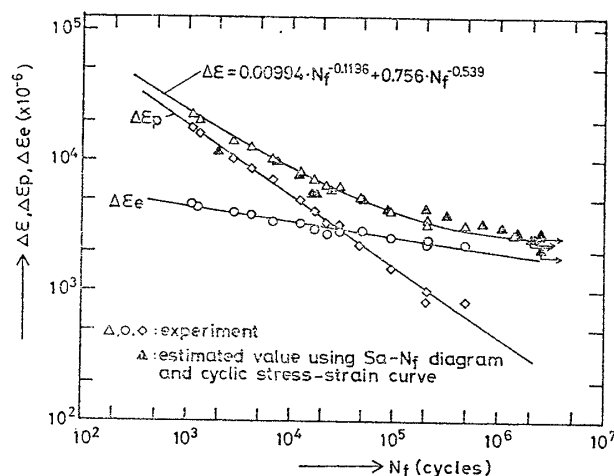
定荷重疲労試験および定歪疲労試験で得られた結果を日抜きの印で Fig. 6, Fig. 7 に示す。

Fig. 6 の S_a (応力振幅)- N_f (破断寿命) 線図は、 S_a と N_f の関係が $S_a = a \cdot N_f^b$ で表示できるものとし、 a, b を直線回帰で求めて実線で表わしたもので、 S_a と N_f の関係は次式のようにになる。

$$S_a = 53.29 \cdot N_f^{-0.0629} \quad (2)$$

疲労限は $N_f = 2 \times 10^6$ と仮定し、疲労限と予想される応力付近で 0.5 kg/mm^2 ごとに変化させるステア・ケース法で求め 21.5 kg/mm^2 を得た。

Fig. 7 の $\Delta \epsilon$ (全歪幅)- N_f (破断寿命) 線図は、 $\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_e + \Delta \epsilon_p$ ($\Delta \epsilon_e$: 弾性歪幅, $\Delta \epsilon_p$: 塑性歪幅) の関係から、 $\Delta \epsilon_e, \Delta \epsilon_p$ を疲労試験中に計測したヒステリシスループより求め、それぞれ寿命との関係が $\Delta \epsilon_e = c \cdot N_f^d$, $\Delta \epsilon_p = e \cdot N_f^f$ で表示できるものとし、同様に直線回帰で求め実線で表わしたもので、 $\Delta \epsilon$ と N_f の関係は次式のようにになる。

Fig. 6 S_a - N_f diagram (S_a : stress amplitude, N_f : fracture life)Fig. 7 ϵ - N_f diagram ($\Delta \epsilon$: total strain range, $\Delta \epsilon_e$: elastic strain range, $\Delta \epsilon_p$: plastic strain range, N_f : fracture life)

$$\Delta \epsilon = 0.00994 N_f^{-0.1136} + 0.756 N_f^{-0.539} \quad (3)$$

Fig. 6 および Fig. 7 の図中の黒く塗った点は次のように求めた。すなわち、繰返し中の応力-歪曲線 (Fig. 5) を用いて、定歪疲労試験での制御歪値に対応する応力を求め、この S_a と N_f の関係を Fig. 6 に黒く塗った点で示した。同様に定荷重疲労試験での制御応力値に対応する歪を Fig. 5 を用いて求め、この $\Delta \epsilon$ と N_f の関係を Fig. 7 に黒く塗った点で示した。

両図から明らかなように step test で求められる繰返し中の応力-歪曲線と S_a - N_f 線図から $\Delta \epsilon$ - N_f 線図を十分な精度で推定することができる。また、低サイクル領域を除けば $\Delta \epsilon$ - N_f 線図から S_a - N_f 線図を推定できる。

4.3 疲労寿命の統計的性質

各荷重制御条件下での疲労寿命の統計量をまとめて Table 3 に示す。

4.3.1 サンプル・サイズ

疲労強度の統計的性質を求める場合には、試験片数すなわちサンプル・サイズが問題となる。

Table 3 Statistical values of fatigue life

	Sample size	Probability distribution	Arithmetic mean	Standard deviation	Variance	Coefficient of variation
Load controlled constant amplitude loading	25	normal distribution	2.76×10^4	7.57×10^3	5.73×10^7	0.274
		logarithmic normal distribution	4.426	0.115	0.0132	0.026
Load controlled random loading	33	normal distribution	2.97×10^4	4.15×10^3	1.72×10^7	0.140
		logarithmic normal distribution	4.458	0.0635	0.004	0.014
Strain controlled random loading	28	normal distribution	2.59×10^4	2.71×10^3	7.34×10^6	0.105
		logarithmic normal distribution	4.411	0.0446	0.002	0.010

寿命など密度分布のあてはまりの検定には相当数（例えば 100 本程度の資料でも十分でない）が必要であるが、平均、分散などでは 20 本程度の資料が必要であるとする報告⁸⁾があり、また統計処理の面から判断して平均、分散などの統計量には 30 本程度のサンプル・サイズが必要と思われる。

本研究の一応力レベルで 25~33 のサンプル・サイズは、寿命の密度分布の正確な検定には十分でないが、他の統計量に関しては一応満足できるものと考えられる。

4.3.2 疲労寿命の密度分布

平滑試験片の定荷重または定歪疲労試験での疲労寿命の密度分布に関してはすでに詳細に研究されており、その結果として疲労限近くでは極値分布、それより高応力側になるに従って対数正規分布、正規分布が適合し、ワイブル分布は寿命のほぼ全域にわたって適合するといわれている。しかし、ランダム荷重下の寿命の密度分布について研究した例は極めてわずかである^{1), 3)}。

疲労寿命の分布の適合度の検定にはいくつかの方法があるが、本研究では確率紙にプロットし直線性を検討する方法と、Pearson によって導入された χ^2 分布による適合度検定 (χ^2 検定) を用いて考察した。

(1) 確率紙による方法

繰返し数 N_i で試験片がき裂発生または破断する確率 P_i は、試験片の数が比較的小さい場合は近似的に次式で与えられる。

$$P_i = i/(n+1) \quad (4)$$

ただし、 P_i は試験片の総数 n についてそれらの寿命を小さい方から順に並べたときの i 番目の寿命 N_i に対応する破壊確率である。すなわち

$$N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq \dots \leq N_{i-1} \leq N_i \leq N_{i+1} \quad (5)$$

(4) 式で得られた確率 P_i を正規確率紙、対数正規確率紙にプロットした。

定荷重試験、荷重制御ランダム試験、歪制御ランダム

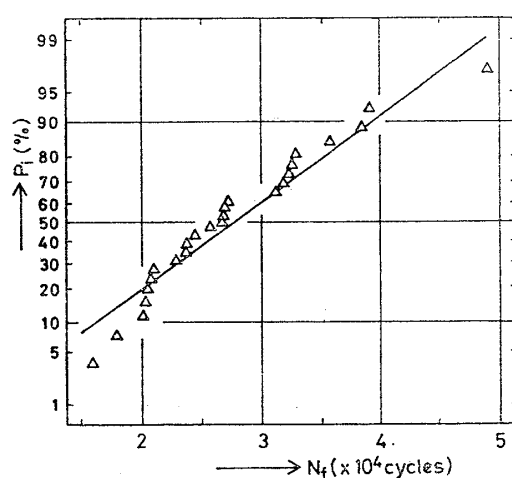


Fig. 8 Probability of fracture life under constant amplitude loading plotted in normal probability paper

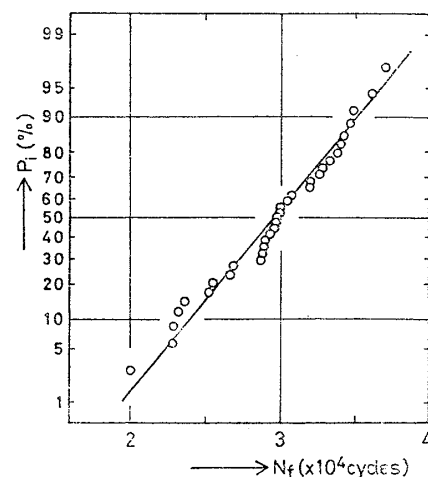


Fig. 9 Probability of fracture life under load controlled random loading plotted in normal probability paper

試験の P_i と N_f の関係を正規確率紙にプロットした図をそれぞれ Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10 に、対数正規確率紙にプロットした図をそれぞれ Fig. 11, Fig. 12, Fig. 13

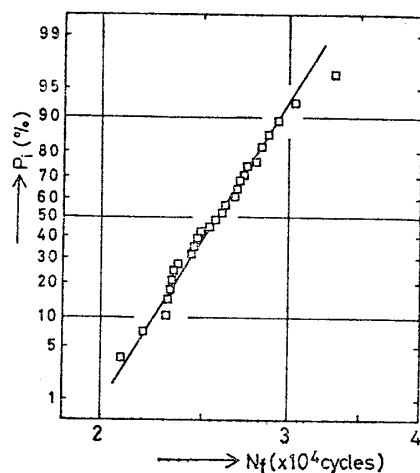


Fig. 10 Probability of fracture life under strain controlled random loading plotted in normal probability paper

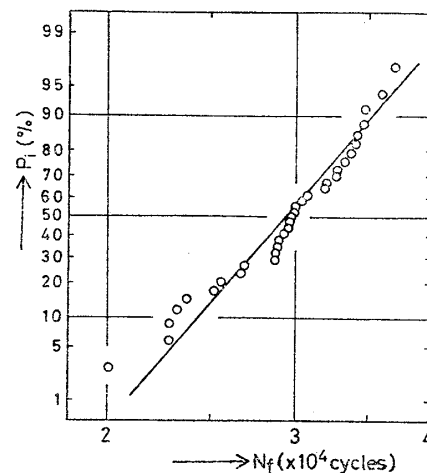


Fig. 12 Probability of fracture life under load controlled random loading plotted in logarithmic normal probability paper

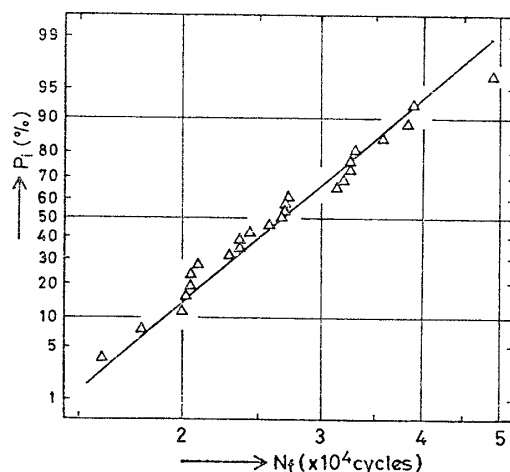


Fig. 11 Probability of fracture life under constant amplitude loading plotted in logarithmic normal probability paper

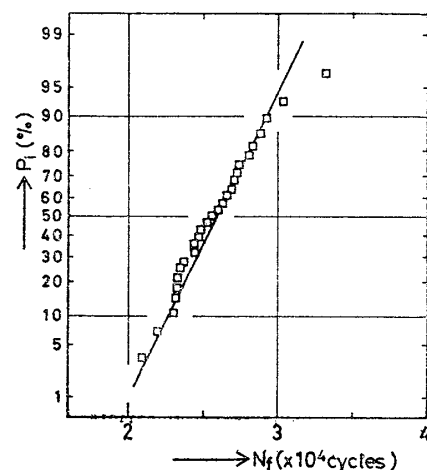


Fig. 13 Probability of fracture life under strain controlled random loading plotted in logarithmic normal probability paper

に示す。

それぞれの図から明らかなように、各制御条件とも若干対数正規分布への適合度が良いと思われるが、いずれにも適合していると考えることができる。

(2) χ^2 検定

ある密度分布をする母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本を用いて、この母集団の密度分布を推定する方法に χ^2 検定がある。母集団の分布が連続的な場合には適当 (例えば k 個) に級階分けを行い、この階級に入る実測した度数 n_i ($i=1, 2, \dots, k$) を求める。ここに $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ である。次に、母集団をある密度分布と仮定したとき、仮定された分布から求まる上記の各階級に入る期待度数を e_i とする。実測度数と期待度数との差を次式で求める。

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} \quad (6)$$

(6) 式の χ^2 は n が十分大きいときは、近似的に自由度 $(k-1)$ の χ^2 分布をする。有意水準を α とし χ^2 分布表から $\chi^2(\alpha)$ の値を求め、 χ^2 (標本からの計算値) $> \chi^2(\alpha)$ ならば有意水準 α で標本は仮定した密度分布から抽出されたものでないと結論される。逆に χ^2 (計算値) $< \chi^2(\alpha)$ であれば仮定した分布から抽出されたものと結論する。

この検定法では、 $k \geq 5$, $e_i \geq 5$ のとき満足 of いく結果が得られるが、 $e_i \geq 5$ なら $k < 5$ でも十分な結果が得られる。

寿命の適合度の検定に、有意水準 α として 0.05 をとる。

定荷重試験ではサンプル・サイズから $k=4$ となり、 $e_i \geq 5$ を考慮して χ^2 検定を行う。正規分布への適合度は $\chi^2=0.881$, $\chi^2(0.05)=3.841$ から $\chi^2 < \chi^2(0.05)$ 。

また、対数正規分布への適合度は $\chi^2=1.294$, $\chi^2(0.05)=3.841$ から $\chi^2 < \chi^2(0.05)$ 。したがって、有意水準 0.05 で正規分布、対数正規分布のいずれにも適合していると結論できる。

荷重制御ランダム試験では、 $k=5$, $e_i \geq 5$ を考慮して検討を行う。正規分布については $\chi^2=0.366 < \chi^2(0.05)=5.991$, 対数正規分布については $\chi^2=1.124 < \chi^2(0.05)=5.991$ となった。したがって、有意水準 0.05 で正規分布、対数正規分布のいずれにも適合しているといえる。

歪制御ランダム試験で $k=5$, $e_i \geq 5$ を考慮して検定を行う。その結果、正規分布については $\chi^2=0.812 < \chi^2(0.05)=5.991$, 対数正規分布についても $\chi^2=1.124 < \chi^2(0.05)=5.991$ となった。それ故、同様に有意水準 0.05 で正規分布、対数正規分布のいずれにも適合していると結論できる。

Jacoby ら¹⁾ は、アルミニウム合金 2024 材の平板切欠試験片（応力集中係数 3.1）を用いて、寿命が 10^6 回のオーダーで片振り定荷重試験、通常の方法による 8 段階プログラム荷重試験（最大応力 29.7 kg/mm^2 , 平均応力 12.7 kg/mm^2 ）およびランダム荷重試験（digital random signal 使用、応力はプログラム試験と同じ）をサンプル・サイズ 30 程度で実施している。寿命の密度分布は確率紙にプロットする方法で調べ、対数正規分布、ワイブル分布のいずれにも適合するが、簡単さなどの面から有限寿命範囲では対数正規分布に適合するとして十分であるとしている。

ElMaraghy ら²⁾ は、SAE 1008 材の平板試験片を用いて、寿命が $3 \sim 4 \times 10^5$ の領域で両振り曲げ荷重の定歪疲労試験、歪制御ブロック疲労試験およびランダム疲労試験（narrow band random loading）をサンプル・サイズ 30～45 で行っている。その結果から寿命の密度分布は対数正規分布に適合しているようである。

上述のように、著者らの実験では寿命の密度分布の適合度検定には、サンプル・サイズが小さいため明確な結論を得ることはできないが、本試験条件のもとでは正規分布、対数正規分布のいずれにも適合するという結果が得られた。疲労試験結果の整理法あるいは解析の容易さなどから、寿命は対数正規分布とするとしても良いものと思われる。

ランダム荷重下の疲労寿命の分布は、疲労設計の面からも極めて重要であるから、今後さらに広い条件下での研究が望まれる課題である。

4.3.3 疲労寿命の分散

Table 3 から、疲労寿命の分散は歪制御ランダム試験での値が最も小さく荷重制御ランダム試験、定荷重試験の順になっている。

軸力定荷重試験下での平滑材の破断寿命が 3×10^4 回

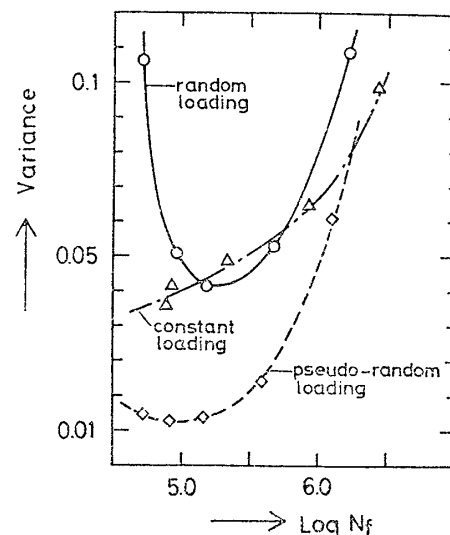


Fig. 14 Dependence of the variance of fatigue life on the mean fracture life

程度の分散に関してはわずかに横堀⁹⁾による資料があるだけである。これによるとサンプル・サイズ 112 で寿命 ($\log N_f=4.59$) の分散（対数）は 0.0396 で本実験での分散 0.0132 に比べ相当大きい値となっている。軸力荷重と平面曲げ荷重試験下の寿命の分散については明らかでないが、著者らの両振り平面曲げ荷重下の資料¹⁰⁾と比較すると、サンプル・サイズ 37 で寿命 ($\log N_f=4.06$) の分散（対数）は 0.0053 で本実験での値 0.0132 より小さく、曲げ荷重下の分散の方が小さいようである。

ランダム荷重試験下の寿命の分散については、Jacoby ら¹⁾, Chernous ら²⁾, ElMaraghy ら³⁾の研究がある。

Jacoby ら¹⁾ は、前述の試験条件で分散（対数）を求め、片振り定荷重試験で 0.0066, プログラム荷重試験で 0.0024, ランダム荷重試験で 0.0035 と求めており、ランダム荷重試験下の分散の方が定荷重試験下の分散に比べ小さい。

Chernous ら²⁾ は、切欠試験片（材料 steel 09G2S）を用い回転曲げの定荷重試験、ランダム荷重試験（white noise を用いた narrow band signal）および擬似ランダム荷重試験（応力履歴が同じランダム試験）を実施している。寿命域は $3 \times 10^4 \leq N_f \leq 2.5 \times 10^6$ でサンプル・サイズは 24 である。その結果、Fig. 14 を得ており、低寿命域でランダム荷重試験の分散が大きいものの全般的には定荷重試験下の分散に比べ、ランダム荷重試験系列の分散の方が小さいといえる。また、Chernous らによるランダム荷重試験と擬似ランダム荷重試験での寿命の分散は Fig. 14 から応力履歴を固定した後者の分散が相当小さい値となっている。本研究での擬似ランダム荷重試験に対応する荷重制御および歪制御ランダム試験ではサンプル・サイズがそれぞれ 9 および 8 と少ないが、寿命

の平均、分散ともにほぼ同じ結果が得られている。

ElMaraghy ら³⁾は、前述の試験条件で分散(対数)を定歪試験で0.0538、歪制御ブロック荷重試験で0.0655、ランダム荷重試験で0.0243と求めており、この場合にもランダム荷重下の分散が小さい。

以上、本試験結果および他の試験結果ともに試験条件は種々異なるが、いずれの場合にもランダム荷重試験下の寿命の分散が定荷重試験下の分散より小さい値となっている。

次に上記の結果を統計的に考察する。

2つの正規分布する母集団の分散が同じかどうかを調べるには、各々の母集団から抽出した標本の分散を用いてF分布を利用したF検定法で検定できる。

すなわち、母集団の分散 σ_1^2 と σ_2^2 が同じかどうかを不偏分散 S_1^2 と S_2^2 との比 $F=S_1^2/S_2^2$ ($S_1^2 \geq S_2^2$)を用いて次のようにする。いま母集団の分散が等しければF値は1に近いはずである。F値が有意水準 α で定まる $F(\alpha)$ より大きいときは、これが起こる確率はもし分散が等しければ極めて少ない(α 程度)から分散は等しくない、すなわちこの有意水準で統計的に有意の差があると結論する。

定荷重疲労試験、荷重制御ランダム疲労試験、歪制御ランダム疲労試験での各々の疲労寿命の分散をF検定法で考察する。なお、有意水準 α は0.05で検定を行う。

(1) 定荷重試験と荷重制御ランダム試験での疲労寿命の分散

疲労寿命の密度分布が正規分布をする場合にはTable 3に示した値を用いてF値を計算すると $F=3.337$ となる。 $F(0.05)=1.86$ であるから $F(\text{計算値}) > F(0.05)$ となる。同様に密度分布が対数正規分布の場合には $F(\text{計算値})=3.278 > F(0.05)=1.86$ となる。それ故、寿命の密度分布が正規分布、対数正規分布のいずれの場合にも、有意水準0.05で分散には有意の差があり、荷重制御ランダム試験での寿命の分散が定荷重試験に比べ小さいと結論できる。

(2) 定荷重試験と歪制御ランダム試験での疲労寿命の分散

寿命の密度分布が正規分布の場合には $F(\text{計算値})=7.833 > F(0.05)=1.95$ 、同様に対数正規分布の場合には $F(\text{計算値})=6.648 > F(0.05)=1.95$ となる。したがって、荷重制御ランダム試験と同様、歪制御ランダム試験での寿命の分散が定荷重試験に比べ小さいと結論できる。

(3) 荷重制御ランダム試験と歪制御ランダム試験での疲労寿命の分散

寿命の密度分布が正規分布の場合には $F(\text{計算値})=2.348 > F(0.05)=1.90$ 、同様に対数正規分布の場合には

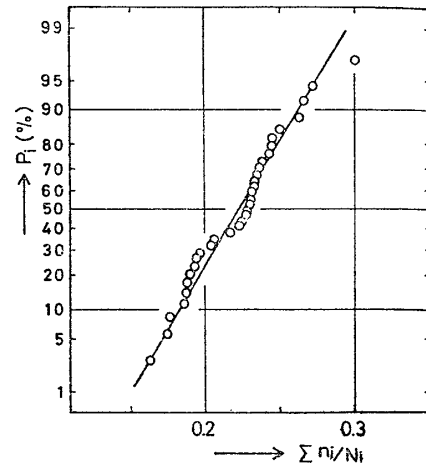


Fig. 15 Probability of cumulative damage sum for load controlled random loading plotted in normal probability paper

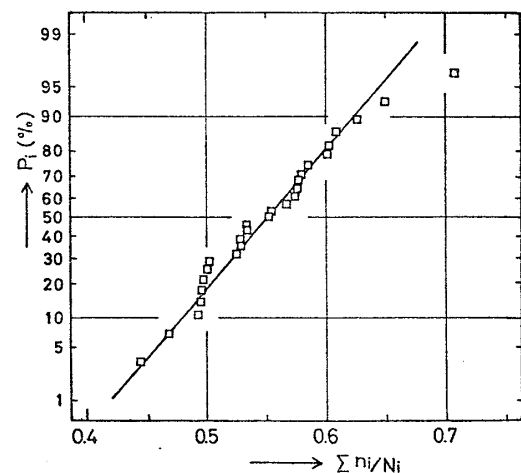


Fig. 16 Probability of cumulative damage sum for strain controlled random loading plotted in normal probability paper

$F(\text{計算値})=2.028 > F(0.05)=1.90$ となる。したがって、ランダム試験では、歪制御試験の方が荷重制御試験に比べ寿命の分散が有意水準0.05で小さいと結論できる。

疲労寿命の分散は密度分布同様重要な量で、材料、試験片形状、寿命域、荷重条件(密度分布、平均応力、上下限など)など種々の因子の影響を受けるものと思われる。上述の結果の理由は明らかでないが、これを物理的あるいは力学的に考察するとともに、さらに広い範囲の条件下での研究が望まれる。

4.4 ランダム荷重疲労試験下の累積被害量

ランダム荷重試験下の疲労寿命を一定荷重疲労試験結果と累積被害則を用いて累積被害量(usage factor)を計算し推定するとき、破損時の限界被害量は1を中心にしてかなり広い範囲にちらばることが明らかにされてい

Table 4 Statistical values of cumulative damage sum with Miner's Rule

	Probability distribution	Arithmetic mean	Standard deviation	Variance	Coefficient of variation
Load controlled random loading	normal distribution	0.222	0.0309	0.00095	0.139
Strain controlled random loading	normal distribution	0.551	0.0582	0.0034	0.106

る^{11),12)}。この理由を明らかにするとともにより良い推定法を得るためにブロック荷重試験、プログラム荷重試験を含めた極めて多数の研究が行われ、 $S-N$ 線図の修正、累積被害則などについて種々の提案がなされている。しかし、未だ適当な推定法はなく、各分野で従来からの推定法をそれぞれの経験に基づいて工夫し使用している現状である。

本研究のランダム試験での累積被害量を(2)式の S_a-N_f 線図および(3)式の $\Delta\epsilon-N_f$ 線図と Miner 則を用いて求めた。累積被害量の密度分布を正規確率紙にプロットした図を荷重制御ランダム試験について Fig. 15 に、歪制御ランダム試験について Fig. 16 に示す。図からはいずれも正規分布に適合していると考えられる。寿命の場合と同様に χ^2 検定により正規分布への適合度を検定すると、有意水準 0.05 で正規分布へ適合しているという結果が得られる。累積被害量の密度分布は、これまでに正規分布であるといわれており、密度分布に関しては一応正規分布としてもよいものと思われる。しかし、その平均値および分散などは Table 4 に示すように制御条件により異なっている。また、荷重の上限値を本試験での 1/2, 1/3 にした荷重制御ランダム試験での累積被害量は平均値 0.222 より相当小さい値となり、さらに高強度材料(引張強さ 163 kg/mm²) の場合には 0.98 程度の結果を得ている*。

河本¹¹⁾は荷重の上限値が累積被害量に及ぼす影響を調べており、S40C の平滑材および切欠材のガウス性ランダム荷重試験で、荷重の上限値を変えて累積被害量を求め、平滑材では上限値が大きくなるに従い被害量は増加し 0.3 から 6 の範囲の値を、逆に切欠材では減少し 0.95 から 0.35 の範囲の値となる結果を得ている。

Buch¹²⁾ は、数多くの文献を参照し累積被害量は試験条件により 0.1~10 の範囲にちらばるとしてその理由なども検討しているが、明確な結論は得られていない。

* 荷重振幅が疲労限界以上で累積被害量の平均値が 1 より相当小さくなった理由は今のところ明らかでないが、ある大きさの荷重負荷によりそれ以下の荷重による被害が一定荷重振幅下に比べ増加すること、あるいは繰返し中の応力-歪挙動などによるものと思われる。この問題については定量的ならびに定性的に研究を継続している。

以上のように、累積被害量は材料、試験片形状、寸法、荷重の制御条件、密度分布、上下限、平均応力、寿命域などの種々の因子の影響を受けるものと思われる。それ故、累積被害則を用いてランダム荷重下の疲労寿命あるいは許容応力を求めるとき、限界累積被害量を一律にいくらに定めるのが妥当であるかは極めて難しい問題である。もし、この推定法をとるなら、種々の条件下での限界累積被害量をあらかじめ個々に求めておき、その条件に応じた累積被害量を限界値とすることが当面の課題であろう。

5 結 言

本研究は、ランダム荷重下の疲労寿命あるいは許容応力を $P-S_a(Q)-N$ 線図から直接求めることを目的とする研究の一環である。そのためには、まず $P-S_a(Q)-N$ 線図を得る疲労試験法を明らかにすることが課題となる。

本研究はその第一歩として、軟鋼丸棒平滑試験片を用いおよそ 3×10^4 の寿命域で、軸力両振り定荷重試験およびランダム荷重試験を実施した。ランダム荷重の密度分布は指数分布で、制御条件は荷重制御および歪制御、荷重範囲は下限値をほぼ疲労限、上限値はほぼ寿命 10^8 回に対応する値とし、その超過確率 Q は 3.33×10^{-5} である。

上述の試験条件で得られた疲労寿命の統計的性質は次のようである。

(1) 疲労寿命の密度分布は正規分布にも対数正規分布にも適合する。

(2) 疲労寿命の分散は、定荷重試験が最も大きく、荷重制御ランダム試験、歪制御ランダム試験の順で小さくなり、それらには有意水準 0.05 で有意の差がある。

また、この試験条件下で Miner 則を用いて計算される累積被害量については

(3) 累積被害量の密度分布は正規分布に適合する。

(4) 累積被害量の平均値は、荷重制御試験が 0.222 で、歪制御試験が 0.551 である。

今後はさらに種々の試験条件下での疲労寿命の統計的性質あるいは累積被害量を求めるとともにこれらについての物理的あるいは力学的考察を進めていく計画である。

最後に、実験は本学造船学科、澤 康彦君 (現 AB 船級協会) および 4 年生の神野光正君、杉本 隆君、中山雅之君の協力に負うところが多いことを記して感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) G. H. Jacoby, H. Nowack : Comparison of Scatter Under Program and Random Loading and Influencing Factors, ASTM STP 511 (1972), p. 61.
- 2) B. A. Chernous, V. I. Pereponov : Fatigue Life Scatter and Methods of Reproducing Loading Conditions, Russian Engineering. J. 56. 6 (1976), p. 5.
- 3) H. A. ElMaraghy, J. N. Siddall : Finite Fatigue Life Distributions of SAE 1008 Subjected to Various Load-Time Histories, Trans ASME Ser. H, 1, 102 (1980), p. 135.
- 4) 村山 理 : 船体構造部材の疲労に対する許容応力の信頼性解析, 大阪大学大学院造船学専攻修士論文 (1980).
- 5) A. H. Carse, B. Crossland : Accelerated Fatigue Testing, Automotive Engineering (SAE paper 720266), 80, 3 (1972), p. 87.
- 6) Landgraf. R. W., Morrow, JoDean, and Endo, T. : Determination of the Cyclic Stress-Strain Curve, Journal of Materials, Vol. 4, No. 1 (1969), p. 176.
- 7) 八木順吉, 富田康光, 藤本由紀夫, 村山 理 : 応力集中部の動的局部歪推定に関する研究, 関西造船協会誌, 第 177 号 (1980), p. 117.
- 8) W. Weibull : Fatigue Testing and Analysis of Results, Pergamon Press (1961).
- 9) T. Yokobori : Fatigue Fracture from the Standpoint of the Stochastic Theory, J. of Physical Society of Japan, Vol. 8 (1953), p. 265.
- 10) 八木順吉, 富田康光, 豊 英明 : 突合せおよび十字すみ肉継手の疲労寿命の統計的解析, 関西造船協会誌, 第 170 号 (1978), p. 90.
- 11) 河本 実, 石川 浩, 高木俊治, 家木俊温 : 強さの異なるガウス性ランダム荷重の重複荷重下における疲労寿命の推定, 材料, 24 巻, 260 号 (1975), p. 113.

- 12) A. Buch : The Damage Sum in Fatigue of Structure Components, Eng. Fracture Mech. Vol. 10 (1978), p. 233.

付録 ランダム荷重発生法

任意の確率分布に従う乱数は、原乱数 (一様乱数) からある種の変換法を用いて作成できる。

本研究では、原乱数をパーソナルコンピュータ (OKI if 800) を用い、BASIC の組込み関数 RND(1) で求め、指数分布する乱数の作成には逆変換法を用いた。

計算機で作成する乱数は擬乱数であり、一様性、独立性、周期性の検定が必要である。求めた原乱数は有意水準 0.05 で一様性、独立性が認められ、周期性に関しては 10^7 回までは周期性がないことを確かめた。

ランダム波を発生させるフローチャートおよび得られたランダム波の例を次に示す。

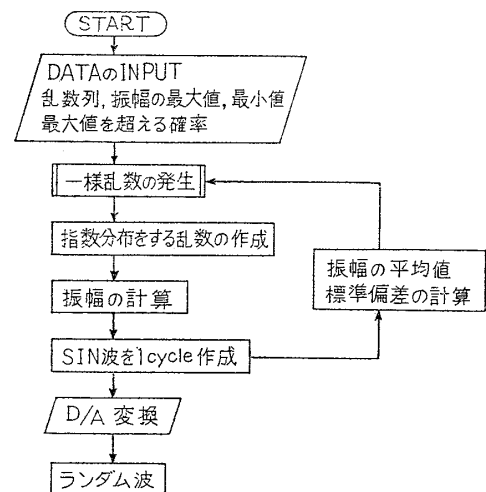


Fig. A-1 Flow chart

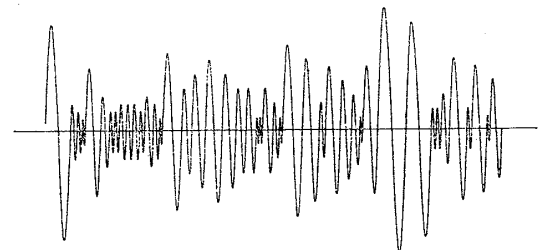


Fig. A-2 Random wave