

不規則波中における非線形応答の極値分布の計算

正員 日根野元裕*

The Calculation of the Statistical Distribution of the Maxima of Nonlinear Responses in Irregular Waves

by Motohiro Hineno, Member

Summary

According to a linear theory, the probability density function of the maxima of response whose spectrum is narrow banded can be expressed by the Rayleigh probability density function. However, this function does not reflect the asymmetrical characteristics with regard to maxima (positive amplitudes) and minima (negative amplitudes) which are seen in the experimental results. Especially in the case of relative motion (one of the most important factors in the safety operations of semi-submersibles), the linear theory tends to underestimate results relative to the experimental data. In order to obtain better results, the second order theory must be considered.

Starting from the functional polynomial method, Vinje derived a method to calculate the nonlinear distribution using both time domain and frequency domain representations of the system. However, he did not show the calculated results of the density or distribution.

In the present work, the frequency domain method proposed by Vinje is applied to calculate the probability distribution and density of the relative motion of a semi-submersible.

At first, the distribution of irregular wave elevation was calculated and compared with experimental data.

After ascertaining the effectiveness of the present method, a calculation of the relative motion was carried out as the second step. The calculated results agree fairly well with the experimental results.

1 緒 言

線形理論においては、正規確率過程とした不規則波中にある構造物に働く波力や、その運動などの応答の極大値(正の振幅)および極小値(負の振幅)の確率分布は等しくなる。さらに応答のスペクトラムが狭帯域であるとすれば、これらの極値の確率密度はレイレイ分布で表わすことができる¹⁾。しかし、緩係留された浮遊構造物やセミサブ型海洋構造物などのように、運動の固有周期が非常に長い場合には、非線形波力の作用によって、不規則波中で長周期運動が発生し、応答の極大値および極小値の確率密度は等しくならぬことが知られている^{2),3),4)}。このため係留系の強度設計や、セミサブの安全性や稼働率と密接な関連のある Air gap などの予測計算を行う際に、線形理論を用いて応答の最大期待値などを計算すると、最大値を過小評価する場合がある。し

たがって、たとえば運動応答の場合には、非線形波力を考慮して、時間領域で運動方程式を解き、求められた運動応答の時系列を統計解析するような方法が用いられる。しかし、このようにして得られた統計値の信頼性は時系列の長さに依存しており、信頼性の高い統計値を得るためには、十分長い時系列を解析する必要がある。

山内ら⁵⁾は船体応答の非線形性と応答のスペクトラムの関係について述べているが、極値の分布については言及していない。Vinje⁶⁾は非線形波力の極値分布を周波数領域で求める方法を示したが、具体的な計算例は示していない。本論では非線形応答の極値分布を調べるために、Vinjeの方法を用いて、2次の項まで考慮した不規則波の水面変位およびセミサブの相対運動についての計算を行い、実験結果との比較を行った。

2 非線形応答の極値分布

一般に不規則波中における構造物が受ける波力は、2次の項まで含めて考えると(1)式のように表わされる。

* 三井造船(株)昭島研究所

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau + \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau_1, \tau_2) \cdot x(t-\tau_1) \cdot x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (1)$$

ここで、 $x(t)$: 不規則波の時系列

$z(t)$: 波力の時系列

$g_1(\tau)$: 波力の線形インパルス応答関数

$g_2(\tau_1, \tau_2)$: 波力の2次のインパルス応答関数

(1)式の右辺第1項はよく知られているように線形の波力を表わし、第2項が2次の非線形波力を表わしている。 $g_1(\tau)$ や $g_2(\tau_1, \tau_2)$ はそれぞれ波力の線形および2次の非線形な周波数応答関数をフーリエ変換することによって表わされ、ここでは次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} g_1(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ g_2(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega_1, \omega_2) \times e^{i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

逆に

$$\left. \begin{aligned} G_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ G_2(\omega_1, \omega_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $G_1(\omega)$: 波力の線形周波数応答関数

$G_2(\omega_1, \omega_2)$: 波力の2次の非線形周波数応答関数であり、 $G_1(\omega)$ は周知のように、正弦規則波中において構造物に働く線形波力を表わしている。 $G_2(\omega_1, \omega_2)$ は2成分波中において構造物に働く非線形波力を表わし、2成分入射波を

$$\zeta = a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} \quad (4)$$

($\omega_1 > \omega_2 > 0$ とする)

とすると、2次の非線形波力は、 $G_2(\omega_1, \omega_2)$ を用いて

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} a_1^2 G_2(\omega_1, -\omega_1) + \frac{1}{2} a_2^2 G_2(\omega_2, -\omega_2) \\ &+ \frac{1}{2} a_1^2 G_2(\omega_1, \omega_1) e^{2i\omega_1 t} + \frac{1}{2} a_2^2 G_2(\omega_2, \omega_2) e^{2i\omega_2 t} \\ &+ a_1 a_2 G_2(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} \\ &+ a_1 a_2 G_2(\omega_1, -\omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \end{aligned} \quad (5)$$

と表わすことができる⁷⁾。(5)式より2次の非線形波力は、定常成分、倍調波成分、和の周波数成分および差の周波数成分の4つの成分を含んでいることがわかる。

ここで次のような仮定を設けると

- (1) 不規則波 $x(t)$ は定常な正規確率過程である。
- (2) 波力 $z(t)$ は狭帯域スペクトラムを持ち、極値の個数とゼロクロス個数は等しい。
- (3) 2次の非線形波力は、線形波力に比べて小さい。

波力が(1)式で表わされた場合、波力の極値がある値よりも大きくなる確率、すなわち極値の確率分布は、波力の高次のモーメントで表わされることを Vinje⁶⁾ は示した。Vinjeの方法に従って、波力の極値の確率分布を表わす式を誘導すると次式のようなになる。(Appendix A参照)

$$P(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{2h_{20}}\right) \left\{ 1 + \left(\frac{h_{10}}{h_{20}} + \frac{h_{12}}{2h_{20}h_{02}} - \frac{h_{30}}{2h_{20}^2}\right)z + \frac{h_{30}}{6h_{20}^3}z^3 \right\} \quad (6)$$

ここで、 h_{ij} は波力のモーメントを表わし、両側定義の不規則波のスペクトルを $S(\omega)$ とすると、次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} h_{10} &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) G_2(\omega, -\omega) d\omega \\ h_{20} &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |G_1(\omega)|^2 d\omega \\ h_{02} &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) |G_1(\omega)|^2 d\omega \\ h_{12} &= \iint_{-\infty}^{\infty} (\omega_1 \omega_2 + 2\omega_2^2) \cdot S(\omega_1) \cdot S(\omega_2) \\ &\quad \times \{ G_1(-\omega_1) G_1(-\omega_2) G_2(\omega_1, \omega_2) \\ &\quad + G_1^*(-\omega_1) G_1^*(-\omega_2) \\ &\quad + G_2^*(\omega_1, \omega_2) \} d\omega_1 d\omega_2 \\ h_{30} &= 3 \iint_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) \cdot S(\omega_2) \{ G_1(-\omega_1) \\ &\quad \times G_1(-\omega_2) G_2(\omega_1, \omega_2) \\ &\quad + G_1^*(-\omega_1) G_1^*(-\omega_2) \\ &\quad + G_2^*(\omega_1, \omega_2) \} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ただし、*は複素共役を表わす。

(6)式は極大値の確率分布を表わし、極小値の確率分布は、 z を $-z$ として(6)式の右辺に代入すればよい。

(6)式のように確率分布が表わされると、極大値の確率密度および $1/n$ 最大期待値は同式より容易に求まり、次のようになる。

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{d}{dz} \{1 - P(z)\} \\ &= \exp\left(-\frac{z^2}{2h_{20}}\right) \left\{ -\frac{h_{10}}{h_{20}} - \frac{h_{12}}{2h_{20}h_{02}} + \frac{h_{30}}{2h_{20}^2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{h_{20}} z + \frac{1}{h_{20}^2} \left(h_{10} + \frac{h_{12}}{2h_{02}} - \frac{h_{30}}{h_{20}} \right) z^2 \\ &\quad \left. + \frac{h_{30}}{6h_{20}^3} z^4 \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{z}_{1/n} = n \int_{z_{1/n}}^{\infty} z \cdot F(z) dz \quad (9)$$

ここで、 $F(z)$: 極大値の確率密度関数

$\bar{z}_{1/n}$: $1/n$ 最大期待値

$z_{1/n}$: $1/n$ 最大極大値

$$\frac{1}{n} = \int_{z_{1/n}}^{\infty} F(z) dz = P(z_{1/n})$$

極小値についても同様に求めることができる。線形

応答の場合には、(7)式より明らかなように、 h_{10} , h_{12} および h_{30} の項は0となり、(6)式の確率分布は正規分布、また(8)式の確率密度はレイレイ分布になる。

3 計算例

2章で示された極値の統計値は波力についてのものであるが、波力以外の非線形問題にも適用できると考えられ、本論では非対称な極値分布を持つ例として、不規則波の水面変位およびセミサブの相対運動の2つの場合について計算を行った。この場合の計算に用いられる周波数応答関数は、それぞれ波の水面変位およびセミサブの相対運動の周波数応答関数となる。これらのいずれの場合も、(6)式を誘導する際に設けられた出力応答は狭帯域スペクトラムを持つという仮定を満たさないが、今回の方法の有効性を調べるという面からも十分意味があると考えられる。

3.1 不規則波の水面変位

非線形性を考慮した不規則波の水面変位については、時間領域での計算例^{8),9)}があるが、直接極値の統計量を計算した例は無いと思われる。

無限水深における長波頂不規則波を考えると、(1)式において、 $x(t)$ は入力としての線形不規則波であり、 $z(t)$ は非線形成分波を含んだ実際に生じた不規則波と見なすことができるから¹⁰⁾、この場合の線形周波数応答関数は

$$G_1(\omega) = 1 \quad (10)$$

となる。

干渉を考慮した波の2次の速度ポテンシャルは、Longuet-Higgins¹¹⁾, Newman¹²⁾などが求めており、ここでは Longuet-Higgins の方法に従って水面変位の2次の周波数応答関数を求めると、次式のようになる。(Appendix B 参照)

$$G_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2g} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \quad (11)$$

$$G_2(\omega_1, -\omega_2) = -\frac{1}{2g} |\omega_1^2 - \omega_2^2| \quad (12)$$

ここで、波は x 軸の正方向に進行しており、 g は重力加速度を表わす。

(10), (11) および (12) 式の周波数応答関数を用いて、有義波高が 11.6m, スペクトラムの1次のモーメントより定義される平均波周期が 16.1 秒の PM 型スペクトラムの不規則波についての計算を行った。(6)~(9)式より計算された確率分布、確率密度および $1/n$ 最大期待値の結果を、線形の計算結果と共に、Fig. 1, 2, 3 に示す。Fig. 1 と Fig. 2 より大きな極値においては、波の山側の振幅を表わす極大値 (Maxima) は線形値 (Linear) よりも確率が大きく、逆に波の谷側の振幅を表わす極小

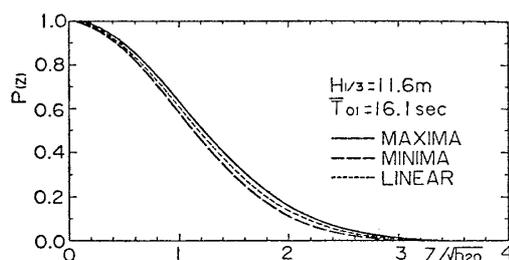


Fig. 1 Probability distribution function of wave amplitude

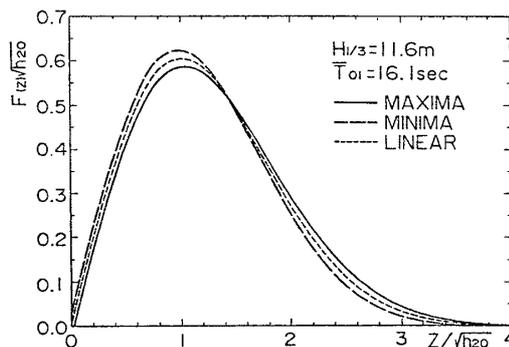


Fig. 2 Probability density function of wave amplitude

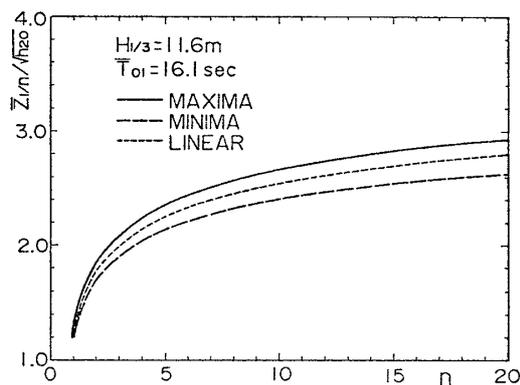


Fig. 3 $1/n$ th highest expected wave amplitude

値 (Minima) の確率は線形値に比べて小さくなっていることがわかる。このため、Fig. 3 に示されたように、 $1/n$ 最大期待振幅値は極大値の方が極小値よりも大きくなっている。この極大値と極小値の分布が非対称になる傾向は、有義波高が増加したり、平均波周期が減少したりするにつれて大きくなる。Fig. 2 において、 $z=0$ における極大値および極小値の確率密度が0になっていないが、これは非線形成分は線形成分に比べて小さいとしてテイラー級数展開を行い、(6)式のように確率分布を正規分布と多項式の積の形で表わしたためである。

竹沢は水槽で起こした長波頂不規則波について、山側と谷側の振幅をそれぞれ統計解析し、有義波振幅を求めた¹³⁾。Fig. 4 がその結果であり、山側の振幅が谷側の振幅よりも大きくなっていることがわかる。同図の解析結果にほぼ対応する有義波高と平均波周期の組み合わせにつ

いて、本論の方法で計算した結果を同図に黒丸印で示す。計算は狭帯域スペクトラムの仮定に基づいているので、実験値に比べて大きくなる可能性があるが、計算値は実験値にほぼ一致しており、少なくとも有義波振幅については今回の方法は良好な結果を与えることがわかる。

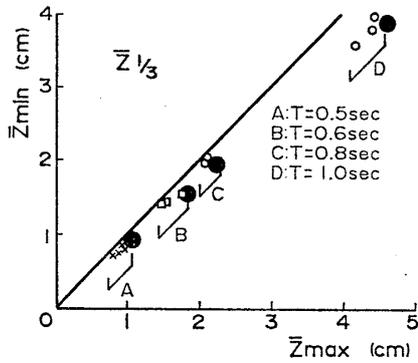


Fig. 4 Significant wave amplitude [Ref. 13) より]

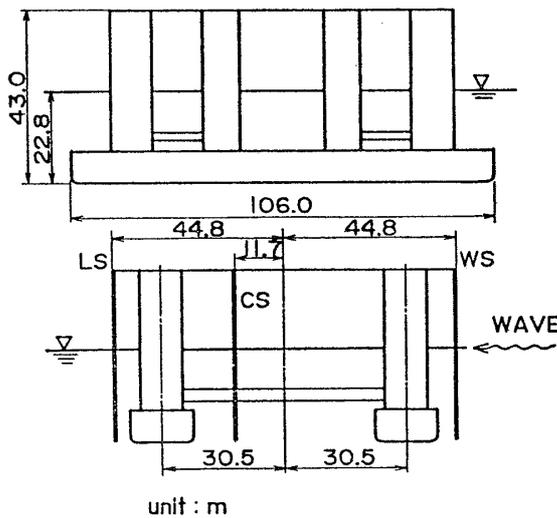


Fig. 5 Configuration of semi-submersible platform

Table 1 Principal particulars of semi-submersible platform

DRAFT	(m)	22.8
DISPLACEMENT	(ton)	36500.
CG above BASE LINE	(m)	21.0
RADIUS of GYRATION in ROLL DIRECTION	(m)	31.1
TRANSVERSE META-CENTRIC HEIGHT	(m)	2.1
NATURAL PERIOD	(sec)	
HEAVE		23.
ROLL		66.

3.2 セミサブの相対運動

セミサブは復原力が小さいので、固有周期が長く、不規則波中では長周期運動が発生し、相対運動の極値分布が非対称になる場合がある³⁾。本論ではこのような非線形影響の現われている相対運動についての計算を行った。

計算に用いたセミサブは Fig. 5 に示すように前後左右が対称形状の 2 ローハルタイプで、文献 3) に示されたものと同一である。Table 1 にセミサブの主要目を示す。

計算を行ううえで必要な相対運動の周波数応答関数は次のようにして求めた。

(1) 線形周波数応答関数

線形周波数応答関数については、理論計算の結果と実験結果の比較検討¹⁴⁾が数多く行われており、流体力の線形重ね合わせに基づいた計算方法によっても、ほぼ妥当な結果が得られることがわかっている。しかし、相対運動の場合、文献 3) にも示されているように、波周期が小さくなると、計算値と実験値には差が見られるので、今回は実験値³⁾ から得られた周波数応答関数を一部用いた。

(2) 非線形周波数応答関数

横波中におけるセミサブの相対運動は次式で表わすことができる。

$$z_R = z + l \cdot \varphi - \zeta \quad (13)$$

ここで、 z_R : セミサブのある位置における水面との相対運動変位

z : セミサブの重心における上下動揺変位

φ : セミサブの横揺れ角変位

ζ : 相対運動を求める位置での入射波の水面変位

l : 相対運動を求める位置とセンターライン間の水平距離

したがって、セミサブの上下動揺、横揺れおよび入射波の 2 次の周波数応答関数がわかればよいのであるが、実験結果によると上下動揺の影響は小さいと考えられたので、上下動揺成分は無視し、横揺れと入射波の成分のみを考えた。

入射波の 2 次の周波数応答関数 $G_2^W(\omega_1, \omega_2)$ は Appendix B で与えられているが、計算に際しては後述する横揺れの場合と同じように、次のように近似した。

$$G_2^W(\omega_1, \omega_2) \doteq G_2^W\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \quad (14)$$

$$G_2^W(\omega_1, -\omega_2) \doteq G_2^W\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \quad (15)$$

したがって、(B. 15), (B. 16) 式より明らかなように波については、(15)式の差の周波数成分は 0 となり、(14)式の和の周波数成分のみを考慮することになる。

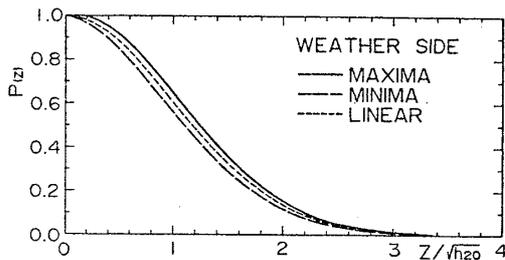


Fig. 6.1 Probability distribution function of relative motion (weather side)

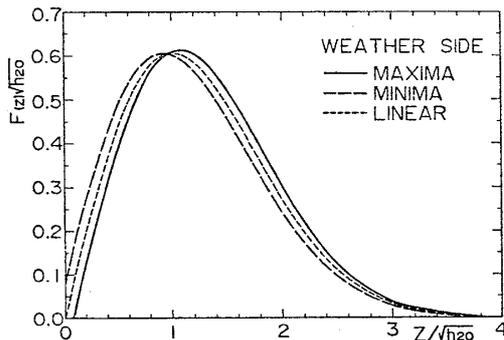


Fig. 6.2 Probability density function of relative motion (weather side)

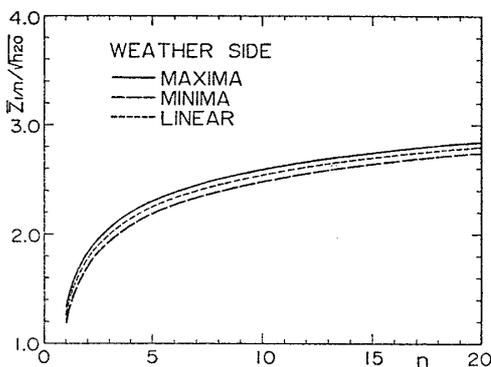


Fig. 6.3 1/n th highest expected amplitude of relative motion (weather side)

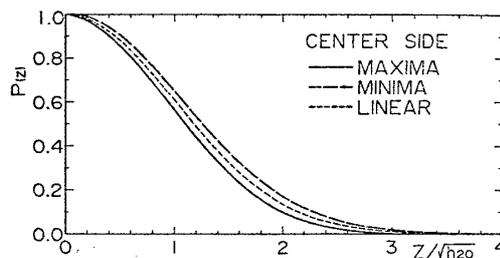


Fig. 7.1 Probability distribution function of relative motion (center side)

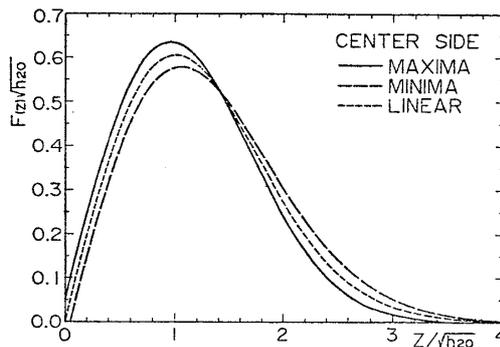


Fig. 7.2 Probability density function of relative motion (center side)

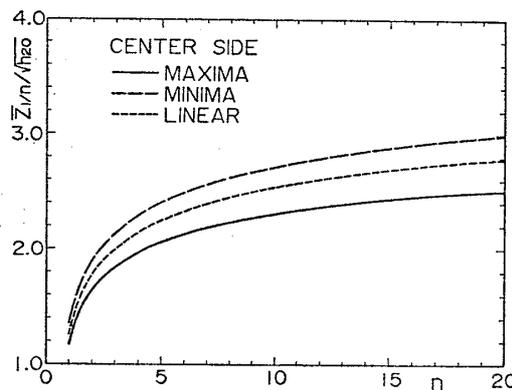


Fig. 7.3 1/n th highest expected amplitude of relative motion (center side)

次に、波に対する2次の横揺れモーメントの周波数応答関数を $G_2^M(\omega_1, \omega_2)$ とし、横揺れモーメントに対する横揺れ運動の周波数応答関数を $H(\omega)$ とすると、横揺れ運動の2次の周波数応答関数 $G_2^R(\omega_1, \omega_2)$ は

$$G_2^R(\omega_1, \omega_2) = G_2^M(\omega_1, \omega_2) \cdot H(\omega_1 + \omega_2) \quad (16)$$

$$G_2^R(\omega_1, -\omega_2) = G_2^M(\omega_1, -\omega_2) \cdot H(\omega_1 - \omega_2) \quad (17)$$

と表わされる。厳密には抵抗や復原力などの非線形影響によって、 $H(\omega)$ にも2次の量を考慮しなければならないが、今回の場合、横揺れ角はそれほど大きくないので、ここでは横揺れモーメントに対する運動応答は線形で表わされるとする。さらに左右揺れとの連成も小さいとして無視する。したがって、 $H(\omega)$ は2階の線形微分方程式の解で表わされ、抵抗係数は平水中の自由横揺れ

試験より得られた線形抵抗係数を用いた。今回のようにセミサブの長周期運動が問題となる場合には、(16)式の和の周波数成分は無視できて、(17)式の差の周波数成分のみを考えればよい。 $G_2^M(\omega_1, -\omega_2)$ は(5)式から明らかのように、2成分波中においてセミサブに働く、円周波数が $\omega_1 - \omega_2$ の変動横揺れモーメントであるが、Pinkster¹⁵⁾ が行った近似

$$G_2^M(\omega_1, -\omega_2) \doteq G_2^M\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \quad (18)$$

を用いると、この量は規則波中においてセミサブに働く定常横揺れモーメントに等しくなる。したがって、横揺れ運動の2次の周波数応答関数は(16), (17), (18)式より次式のようにになる。

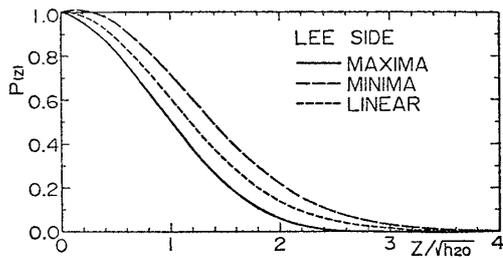


Fig. 8.1 Probability distribution function of relative motion (lee side)

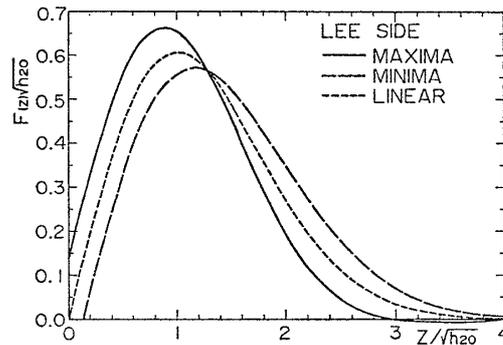


Fig. 8.2 Probability density function of relative motion (lee side)

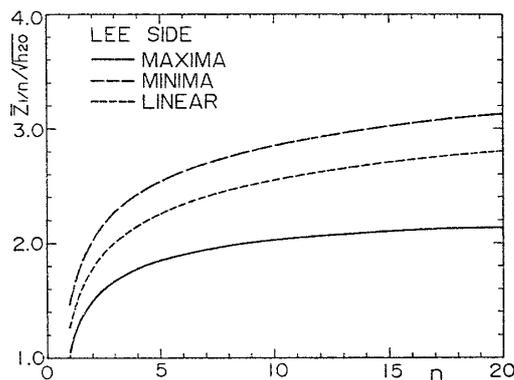


Fig. 8.3 $1/n$ th highest expected amplitude of relative motion (lee side)

$$\left. \begin{aligned} G_2^R(\omega_1, \omega_2) &= 0 \\ G_2^R(\omega_1, -\omega_2) &= G_2^M\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \\ &\quad \times H(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \right\} (19)$$

計算に際しては、文献3)に示されている $G_2^M(\omega, -\omega)$ の実験値の平均を求めて使用した。

計算に用いた不規則波は 3.1 節と同じ、有義波高が 11.6m、平均波周期が 16.1 秒の PM 型スペクトラムを持つ不規則波である。相対運動の計算位置は Fig. 5 に示すように Weather side, Lee side および Center side の 3 か所である。これらの計算状態および計算位置は、文献 3) の実験状態に対応している。

計算結果を Fig. 6, 7, 8 に示す。これらの図から不規則波の場合と同じように、極値の確率分布および密度は非対称になっており、WS (Weather side の略) では

大きな極大値 (セミサブのデッキが水面から遠ざかる方向の振幅) の発生確率が線形値に比べて大きくなっており、逆に CS (Center side の略) および LS (Lee side の略) では大きな極小値 (デッキが水面に近づく方向の振幅) の発生確率が線形値に比べて大きくなっていることがわかる。このため、WS では極大値が、また CS および LS では極小値の $1/n$ 最大期待値が線形計算値よりも大きくなっている。LS で非対称性が大きく、WS で小さくなっている原因の一つは、LS では横揺れと波の非線形性が同じ方向に作用し、非対称性が大きくなるのに対し、WS ではこれらの非線形性が逆方向に作用して、非対称性が小さくなるためである。これは波の 2 次成分を無視して計算を行うと、Fig. 6, 8 の計算結果に比べて、LS では非対称性が小さくなり、逆に WS では非対称性が大きくなることからわかる。

不規則波の場合と同じように Fig. 6, 7, 8 の確率密度は $z=0$ で 0 になっておらず、特に非対称性の強い Fig. 8 の LS では、この傾向が強くと表われており、確率分布も 1 を超えている。また z が大きいところでは、確率密度が負の値になっており、今回の方法で小さい極値や大きい極値の確率密度を求めるのは、特に非線形性が強い場合には問題があると考えられる。

抵抗の影響を調べるために、抵抗係数をいくつか変えた (19) 式の $H(\omega)$ を用いて計算を行ったが、Fig. 6, 7, 8 に示した結果と大差なかった。

水槽実験³⁾で得られた約 30 分間 (実機換算値) の相対運動の時系列を極大値および極小値別に統計解析して得られた $1/n$ 最大期待値を計算結果と共に Fig. 9 に示す。同図より、WS と CS では計算値はほぼ実験値に一致しているが、LS では極小値の計算値が実験値に比べて小さいことがわかる。この原因の一つとして、実験では LS における波の 2 次成分が変化したことなどが考えられるが、今後さらに検討が必要とされる。また、いずれの位置においても $n=1$ の最大期待値の計算値は実験値よりも大きくなっている。これは実験では、応答のスペクトラムは狭帯域ではないので、極大値に対しては負の極大値、また極小値に対しては正の極小値をもつものに対し、計算では応答のスペクトラムは狭帯域であると仮定しているため、それぞれ正の極大値、負の極小値しかもたず、このため平均値が大きくなることも原因の一つと考えられる。

4 結 言

不規則波中における非線形応答の極値の確率分布を直接求めるために、Vinje によって示された方法を用いて、2 次の項まで考慮した不規則波の水面変位およびセミサブの相対運動についての計算を行い、実験結果と比較し

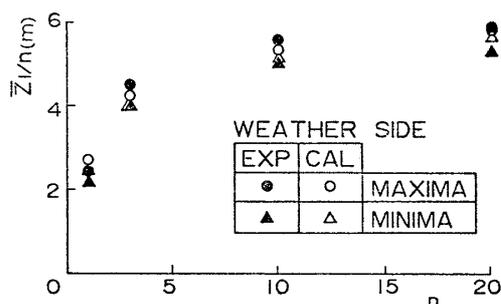


Fig. 9.1 $1/n$ th highest expected amplitude of relative motion (weather side)

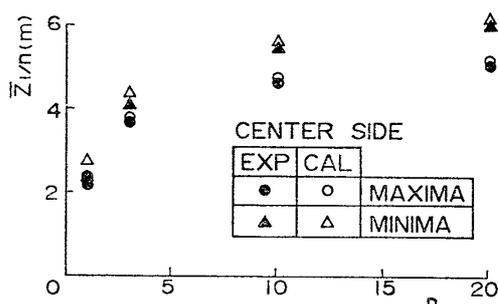


Fig. 9.2 $1/n$ th highest expected amplitude of relative motion (center side)

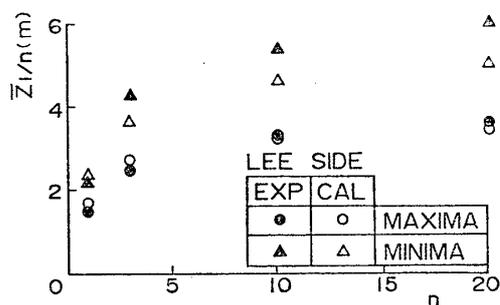


Fig. 9.3 $1/n$ th highest expected amplitude of relative motion (lee side)

た。得られた主な結論は次のとおりである。

(1) Vinje によって示された方法を用いて計算を行い、不規則波の水面変位およびセミサブの相対運動についての非対称な極値の確率分布が得られた。

(2) 不規則波の山側および谷側の振幅の有義値の計算結果は実験結果とほぼ一致した。

(3) セミサブの Weather side および Center side における相対運動の $1/n$ 最大期待値の計算結果は、極大値、極小値ともに実験結果とほぼ一致した。

(4) 確率分布の非対称性が強く現われた Lee side における相対運動の $1/n$ 最大期待値については、極大値の計算結果は実験結果とほぼ一致したが、設計上重要と考えられる極小値の計算結果は実験結果よりも小さく、実験における水面変位の変形などについて、さらに検討を行う必要がある。

以上のことより、非線形性が弱い場合には、応答のスペクトラムは狭帯域をもつという仮定のもとに導かれた Vinje の方法は、少なくとも $1/n$ 最大期待値については、ほぼ妥当な結果を与えられられる。しかし、非線形性が強くなった場合、Vinje の方法によってどの程度の精度まで推定できるのか、また応答のスペクトラムのバンド幅パラメータとの関係、さらには緩係留された浮遊構造物などの非線形応答への応用などについても今後さらに研究を行う必要がある。

終りに臨み、Davidson Laboratory, Stevens Institute of Technology に滞在中、本研究を行うにあたって、研究動機を与えていただき、終始懇切な御指導をいただきました Mr. John F. Dalzell に深く感謝いたします。また有益な御助言、御討論をいただいた三井造船(株)山内保文顧問ならびに小林正典運動研究室室長に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- 1) Cartwright, D. E. & Longuet-Higgins, M. S.: The statistical distribution of the maxima of a random function, Proceedings of the Royal Society, A, Vol.237 (1956).
- 2) 新井信一ほか：不規則波中の係留浮体の運動に関する研究，日本造船学会論文集，第140号（昭和51年12月）。
- 3) Hineno, M. et al.: The Effect of Low Frequency Roll Motion on Under-deck Clearance of a Semi-submersible Platform, 2nd International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehicles (October, 1982).
- 4) 日本造船研究協会第187研究部会：海洋構造物の深海係留に関する調査研究報告書（昭和58年3月）。
- 5) 山内保文，大津皓平：船の応答の非線形性と高次元スペクトラム，日本造船学会論文集，第131号（昭和47年6月）。
- 6) Vinje, T.: On the Calculation of Maxima of Non-linear Waveforces and Wave Induced Motions, International Shipbuilding Progress, Vol.23, No.268 (1976).
- 7) Dalzell, J.F.: Application of the Functional Polynomial Model to the Ship Added Resistance Problem, 11th Symposium on Naval Hydrodynamics (1976).
- 8) Tick, L.J.: Nonlinear Probability Models of Ocean Waves, Ocean Wave Spectra, Proc. of a Conf., Prentice-Hall (1961).
- 9) Anastasiou, K. et al.: The Non-linear Properties of Random Wave Kinematics, 3rd International Conference on Behaviour of Offshore Structures (1982).
- 10) Hasselman, K.: On Nonlinear Ship Motions

- in Irregular Waves, Journal of Ship Research (March, 1966).
- 11) Longuet-Higgins, M. S.: Resonant Interactions Between Two Trains of Gravity Waves, Journal of Fluid Mechanics, Vol.12 (1962).
 - 12) Newman, J.N.: Second-order, Slowly-varying Forces on Vessels in Irregular Waves, International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves (1974).
 - 13) 竹沢誠二: 海洋構造物水槽試験に使用する波浪(Ⅲ), 日本造船学会誌, 第615号(昭和55年9月).
 - 14) たとえば, ITTC: Report of the Ocean Engineering Committee, 17th ITTC (September, 1984).
 - 15) Pinkster, J.A.: Low Frequency Phenomena Associated with Vessels Moored at Sea, Society of Petroleum Engineers of AIME, SPE paper No. 4837 (1974).
 - 16) Price, W.G. & Bishop, R.E.D.: Probabilistic Theory of Ship Dynamics, Chapman and Hall Ltd (1974), pp.164~167.

Appendix A 非線形波力の極値の確率分布

Vinje が示した方法に従って, 非線形波力の極値の確率分布を表わす式を誘導する。

不規則波中における構造物が受ける波力が次式で表わされるとする。

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau + \varepsilon \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau_1, \tau_2) \cdot x(t-\tau_1) \cdot x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (A.1)$$

- ここで, $x(t)$: 不規則波の時系列
- $z(t)$: 波力の時系列
- $g_1(\tau)$: 波力の線形インパルス応答関数
- $g_2(\tau_1, \tau_2)$: 波力の2次のインパルス応答関数
- ε : 微小パラメータ

(A.1) 式より波力の時間微分項は次式のようになる。

$$\dot{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \cdot \dot{x}(t-\tau) \cdot d\tau + 2\varepsilon \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau_1, \tau_2) \cdot \dot{x}(t-\tau_1) \cdot x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (A.2)$$

ここで, $\dot{}$ は時間微分を表わす
 z と \dot{z} の結合確率密度関数を求めるために, モーメント母関数 ϕ を次式で定義する。

$$\phi = E[e^{i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)}] \quad (A.3)$$

ここで, $E[\]$: 期待値を表わす
 θ_1, θ_2 : 任意のダミー変数
 $z_1 \equiv z, z_2 \equiv \dot{z}$

(A.3) 式をテイラー級数展開すると

$$\phi = \sum_m \sum_n \frac{\mu_{mn}}{m!n!} (i\theta_1)^m (i\theta_2)^n, (m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (A.4)$$

となる。 μ_{mn} は z_1 と z_2 の $m-n$ 次のモーメントを表わし, 次式で定義される。

$$\mu_{mn} = E[z_1^m z_2^n] \quad (A.5)$$

一方, モーメント母関数は結合確率密度関数を用いても表わすことができ, $f_{z_1 z_2}(z_1, z_2)$ を z_1 と z_2 の結合確率密度関数とすると

$$\phi = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)} \cdot f_{z_1 z_2}(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \quad (A.6)$$

となり, 本式を二重フーリエ変換すると, 結合確率密度関数は, 逆にモーメント母関数で表わすことができ

$$f_{z_1 z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi \cdot e^{-i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)} d\theta_1 d\theta_2 \quad (A.7)$$

となる。したがって, μ_{mn} が求めれば(A.4)式と(A.7)式より結合確率密度関数が求まるのであるが, 計算を簡単にするために次式で定義される cumulant K を用いる。

$$K = \log \phi \quad (A.8)$$

(A.8) 式をテイラー級数展開し, (A.4) 式を代入して整理すると

$$K = \sum_m \sum_n \frac{K_{mn}}{m!n!} (i\theta_1)^m (i\theta_2)^n, (m, n=1, 2, 3, \dots) \quad (A.9)$$

と表わされる。ここで, K_{mn} は Table A に示されるような μ_{mn} の関数であり, (A.7) 式を K_{mn} を用い

Table A Relation between K_{mn} and μ_{mn}

K _{mn}	m			
	0	1	2	3
0	X	μ_{10}	$\mu_{20} - \mu_{10}^2$	$\mu_{30} - 3\mu_{10}\mu_{20} + 2\mu_{10}^3$
1	μ_{01}	$\mu_{11} - \mu_{10}\mu_{01}$	$\mu_{21} - 2\mu_{10}\mu_{11} - \mu_{01}\mu_{20} + 2\mu_{10}^2\mu_{01}$
2	$\mu_{02} - \mu_{01}^2$	$\mu_{12} - \mu_{10}\mu_{02} - 2\mu_{01}\mu_{11} + 2\mu_{10}\mu_{01}^2$
3	$\mu_{03} - 3\mu_{01}\mu_{02} + 2\mu_{01}^3$

て表わすと

$$f_{z_1 z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\sum_m \sum_n \frac{K_{mn}}{m!n!} (i\theta_1)^m (i\theta_2)^n \right] \times e^{-i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)} d\theta_1 d\theta_2 \quad (\text{A. 10})$$

となる。

K_{mn} は μ_{mn} で表わされるので、(A. 1), (A. 2), (A. 5) 式より μ_{mn} のオーダーが求まれば K_{mn} のオーダーがわかる。したがって (A. 10) 式を $\varepsilon=0$ のまわりにテイラー級数展開し、 $O(\varepsilon)$ の項までとると

$$f_{z_1 z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} K_{20}(0) \cdot \theta_1^2 - \frac{1}{2} K_{02}(0) \cdot \theta_2^2 \right] \times \left[1 + K_{10} \cdot i\theta_1 + \frac{\varepsilon}{6} K_{30}'(0) \cdot (i\theta_1)^3 + \frac{\varepsilon}{6} K_{03}'(0) \cdot (i\theta_2)^3 + \frac{\varepsilon}{2} K_{12}'(0) \cdot i\theta_1 \cdot (i\theta_2)^2 \right] \times e^{-i(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)} d\theta_1 d\theta_2 \quad (\text{A. 11})$$

ここで、 $K_{ij}(0) \equiv [K_{ij}]_{\varepsilon=0}$

$$K_{ij}'(0) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} K_{ij} \right]_{\varepsilon=0}$$

となり、整理すると次式のようになる。

$$f_{z_1 z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{K_{20}K_{02}}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \bar{z}_1^2 - \frac{1}{2} \bar{z}_2^2 \right) \times \left[H_0^2 + \frac{K_{10}}{\sqrt{K_{20}}} \cdot H_1(\bar{z}_1) + \frac{\varepsilon}{6} \frac{K_{30}'}{\sqrt{K_{20}}} \cdot H_3(\bar{z}_1) + \frac{\varepsilon}{6} \frac{K_{03}'}{\sqrt{K_{02}}} \cdot H_3(\bar{z}_2) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{K_{12}'}{\sqrt{K_{20}}} \cdot H_1(\bar{z}_1) \cdot H_2(\bar{z}_2) \right] \quad (\text{A. 12})$$

ここで、 $\bar{z}_1 \equiv z_1 / \sqrt{K_{20}}$

$$\bar{z}_2 \equiv z_2 / \sqrt{K_{02}}$$

$H_n(x)$: エルミート多項式

$$\left(= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot (x + i\sqrt{2} \cdot t)^n dt \right)$$

なお、 K_{ij} の (0) は省略してある。

波力 $z(t)$ は狭帯域スペクトラムを持つという仮定より、波力の極大値の個数は、波力のゼロアップクロス個数に等しくなり、ある値 z_0 より大きい極大値の個数の単位時間当りの期待値は

$$E[N_+(z_0)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |z_2| \cdot f_{z_1 z_2}(z_0, z_2) dz_2 \quad (\text{A. 13})$$

となる¹⁶⁾。波力 $z(t)$ の平均値を \bar{z} とすれば

$$\begin{aligned} \bar{z} &= E[z(t)] \\ &= \mu_{10} \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

であり、すべての極大値の個数の期待値は

$$E[N_+(\bar{z})] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |z_2| \cdot f_{z_1 z_2}(\bar{z}, z_2) dz_2 \quad (\text{A. 15})$$

と表わせる。したがって、極大値がある値 z よりも大きくなる確率、すなわち極大値の確率分布は、(A. 14) 式

と (A. 15) 式の比で表わせるから、次式のようになる。

$$P(z) = \frac{E[N_+(z)]}{E[N_+(\bar{z})]} \quad (\text{A. 16})$$

(A. 12)~(A. 15) 式を (A. 16) 式に代入すると、確率分布 $P(z)$ は、 K_{mn} で表わすことができ、さらに Table A の関係を用いると確率分布は μ_{mn} で表わすことができる。 μ_{mn} を求めるには、(A. 5) 式に (A. 1), (A. 2) 式を代入し、スペクトラムは相関関数のフーリエ変換で表わされることを考えれば、最終的に μ_{mn} は不規則波のスペクトラムと波力の周波数応答関数で表わすことができる。たとえば、 $m=1, n=0$ の場合には (A. 5) 式と (A. 1) 式より

$$\begin{aligned} \mu_{10} &= E[z_1] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \cdot E[x(t-\tau)] d\tau \\ &\quad + \varepsilon \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau_1, \tau_2) \cdot E[x(t-\tau_1) \cdot x(t-\tau_2)] \\ &\quad \times d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (\text{A. 17})$$

となり、 $x(t)$ は正規確率過程であるので上式の右辺第 1 項は 0 となり、第 2 項を自己相関関数を用いて表わすと、(A. 17) 式は次式のようになる。

$$\mu_{10} = \varepsilon \iint_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau_1, \tau_2) \cdot R(\tau_2 - \tau_1) \cdot d\tau_1 d\tau_2 \quad (\text{A. 18})$$

ここで、 $R(\tau)$: $x(t)$ の自己相関関数 ($= E[x(t) \cdot x(t+\tau)]$)

$x(t)$ は定常確率過程であるので、自己相関関数はスペクトラムのフーリエ変換で表わすことができ

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega \quad (\text{A. 19})$$

となる。ここで $S(\omega)$ は両側定義の $x(t)$ のスペクトラムである。(A. 18) 式に (A. 19) 式を代入し、本文(3) 式の関係を用いると

$$\mu_{10} = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot G_2(\omega, -\omega) d\omega \quad (\text{A. 20})$$

となる。

他の項についても同様の方法で求めることができ、 $O(\varepsilon)$ の項までとると、最終的に (A. 16) 式は次式になる。

$$\begin{aligned} P(z) &= \exp \left(-\frac{z^2}{2h_{20}} \right) \\ &\quad \times \left[1 + \varepsilon \left\{ \left(\frac{h_{10}}{h_{20}} + \frac{h_{12}}{2h_{20}h_{02}} - \frac{h_{30}}{2h_{20}^2} \right) z + \frac{h_{30}}{6h_{20}^3} z^3 \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 21})$$

実際の計算においては、微小パラメータの ε は周波数応答関数に含まれるので、上式は本文(6)式になる。また、 h_{ij} は μ_{ij} を書き直したもので、本文(7)式で示されるような波力のモーメントである。

Appendix B 波の 2 次の周波数応答関数

Longuet-Higgins の方法に従って波の 2 次の周波数応答関数を求める。

無限水深の完全流体中での長波頂規則波の速度ポテンシャルを ϕ とすれば、 ϕ はラプラスの方程式を満たすから

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{B. 1})$$

となる。波の進行方向に x 軸をとり、鉛直上向きに z 軸

をとると、自由表面上での力学的および運動学的条件は、それぞれ次式で与えられる。

$$g\zeta + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 = 0 \quad \text{at } z = \zeta \quad (\text{B. 2})$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0 \quad \text{at } z = \zeta \quad (\text{B. 3})$$

ここで、 $u = \nabla\phi$

この両式より、 ζ を消去すると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}(u^2) + u \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}u^2 \right) = 0 \quad \text{at } z = \zeta \quad (\text{B. 4})$$

となり、(B. 2), (B. 4) 式を $z=0$ のまわりにテイラー級数展開すると、次式を得る。

$$g\zeta + \left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \zeta \frac{\partial^2\phi}{\partial t \cdot \partial z} + \dots \right] + \left[\frac{1}{2}u^2 + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2}u^2 \right) + \dots \right] = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (\text{B. 5})$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) + \dots \right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}(u^2) + \zeta \frac{\partial^2}{\partial t \cdot \partial z}(u^2) + \dots \right] + \left[u \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}u^2 \right) + \dots \right] = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (\text{B. 6})$$

ここで速度ポテンシャルなどの量が次式のように展開できるとする。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \alpha\phi_{10} + \beta\phi_{01} + \alpha^2\phi_{20} + \alpha\beta\phi_{11} + \beta^2\phi_{02} + \dots \\ u &= \alpha u_{10} + \beta u_{01} + \alpha^2 u_{20} + \alpha\beta u_{11} + \beta^2 u_{02} + \dots \\ \zeta &= \alpha\zeta_{10} + \beta\zeta_{01} + \alpha^2\zeta_{20} + \alpha\beta\zeta_{11} + \beta^2\zeta_{02} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 7})$$

ただし、 ϕ_{10} と ϕ_{01} はそれぞれ独立な正弦規則波の速度ポテンシャルを表わし、 α と β は微小パラメータである。(B. 7) 式を (B. 5), (B. 6) 式に代入しオーダー別に整理すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} O(\alpha) : g\zeta_{10} + \frac{\partial\phi_{10}}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2\phi_{10}}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi_{10}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 8})$$

$$\left. \begin{aligned} O(\alpha^2) : g\zeta_{20} + \frac{\partial\phi_{20}}{\partial t} + \zeta_{10} \frac{\partial^2\phi_{10}}{\partial t \cdot \partial z} + \frac{1}{2}u_{10}^2 = 0 \\ \frac{\partial^2\phi_{20}}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi_{20}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}(u_{10}^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 9})$$

$$\left. \begin{aligned} O(\alpha\beta) : g\zeta_{11} + \frac{\partial\phi_{11}}{\partial t} + \zeta_{10} \frac{\partial^2\phi_{01}}{\partial t \cdot \partial z} \\ + \zeta_{01} \frac{\partial^2\phi_{10}}{\partial t \cdot \partial z} + u_{10} \cdot u_{01} = 0 \\ \frac{\partial^2\phi_{11}}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi_{11}}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial t}(u_{10} \cdot u_{01}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 10})$$

$O(\beta), O(\beta^2)$ についても同様に条件式が得られる(以下簡単のため、これらの項については省略する)。

(B. 1), (B. 8) 式を満足する1次の速度ポテンシャルは、よく知られているように次式で表わされる。

$$\phi_{10} = a_1 \omega_1 K_1^{-1} e^{K_1 z} \cdot \sin(K_1 x - \omega_1 t) \quad (\text{B. 11})$$

ここで、 a_1 : 波の振幅

ω_1 : 円周波数

K_1 : 波数 ($=\omega_1^2/g$)

この線形速度ポテンシャルを (B. 9), (B. 10) 式に代入すると、2次の項の式は

$$\left. \begin{aligned} O(\alpha^2) : g\zeta_{20} + \frac{\partial\phi_{20}}{\partial t} = \frac{1}{2} a_1^2 \omega_1^2 \cdot \cos 2(K_1 x - \omega_1 t) \\ \frac{\partial^2\phi_{20}}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi_{20}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 12})$$

$$\left. \begin{aligned} O(\alpha\beta) : g\zeta_{11} + \frac{\partial\phi_{11}}{\partial t} = \frac{1}{2} a_1 a_2 [(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ \times \cos\{(K_1 + K_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t\} \\ + (\omega_1 - \omega_2)^2 \cdot \cos\{(K_1 - K_2)x \\ - (\omega_1 - \omega_2)t\}] \\ \frac{\partial^2\phi_{11}}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi_{11}}{\partial z} = 2 a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) \\ \times \sin\{(K_1 - K_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 13})$$

となり、これらの式と (B. 1) 式より、2次の速度ポテンシャルおよび水面変位は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{20} &= 0 \\ \phi_{11} &= \frac{2 a_1 a_2 \omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2)}{(\omega_1 - \omega_2)^2 - g |K_1 - K_2|} e^{i(K_1 - K_2)z} \\ &\quad \times \sin\{(K_1 - K_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t\} \\ \zeta_{20} &= \frac{1}{2g} a_1^2 \omega_1^2 \cos 2(K_1 x - \omega_1 t) \\ \zeta_{11} &= \frac{a_1 a_2}{2g} [(\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot \cos\{(K_1 + K_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t\} \\ &\quad - |\omega_1^2 - \omega_2^2| \cdot \cos\{(K_1 - K_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t\}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 14})$$

原点における1次の水面変位は、(B. 8), (B. 11)式より

$$\zeta_{10} = a_1 \cos(\omega_1 t)$$

であるから、 ζ_{10} と ζ_{01} を線形入力とし、 ζ_{11} をこの入力に対する2次の応答と考えれば、本文(4), (5)式の定義より、水面変位の2次の周波数応答関数は次式で表わされる。

$$G_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2g} (\omega_1^2 + \omega_2^2) e^{-i(K_1 + K_2)x} \quad (\text{B. 15})$$

$$G_2(\omega_1, -\omega_2) = -\frac{1}{2g} |\omega_1^2 - \omega_2^2| \cdot e^{-i(K_1 - K_2)x} \quad (\text{B. 16})$$

(B. 15) 式は和の周波数成分を表わし、(B. 16) 式は差の周波数成分を表わしている。