（昭和59年11月　日本造船学会秋季講演会において講演）

有限要素法による3次元非定常熱伝導問題に関する研究

正員　吉　村　洋*

Studies on Three Dimensional Unstationary Heat Conduction Problems based on the Finite Element Method

by Hiroshi Yoshimura, *Member*

Summary

Researches in finite element analyses in the area of two dimensional field problems and elastic-plastic problems under the plane stress and plane strain conditions have been vastly dealt with. However, in order to understand the phenomenon of, out-of-plane deformation resulting from welding or gas heating, it is necessary to clearly define the three dimensional temperature distributions around the moving heat source and the three dimensional thermal stress and strain distributions in the plates.

In this paper, as the first step of three dimensional finite element analyses, unstationary heat conduction problems are formulated using a simple tetrahedral element. After the development of the computer program, the present method is applied to some practical examples, and the calculated results are compared with the experimental ones to confirm the usefulness of this method.

記　　号

c：比熱（cal/gr·℃）
K：熱伝導率（cal/cm·sec·℃）
k：熱拡散率（cm^2/sec）
Q：単位時間当りの入熱量（cal/sec）
q：熱源の単位時間，単位体積当りの発生熱量（cal/sec·cm^3）
$\bar{q}$：周辺境界の熱流束（cal/sec·cm^2）
T：温度上昇（℃）
t：時間（sec）
v：溶接速度（cm/sec）
x, y, z：座標（cm, mm）
α：熱伝達係数（cal/cm^2·sec·℃）
Δt：時間増分（sec）
ρ：密度（gr/cm^3）

1　ま　え　が　き

理想流体のポテンシャル流れや熱伝導のような場の問題，あるいは弾性問題等を有限要素法を用いて定式化する場合，周知のように，支配微分方程式に対応する汎関数あるいは系のポテンシャルエネルギー等を最小化することによって最終的にはいずれも同様な形の連立方程式が得られ，大型電子計算機の存在を前提とすれば，その取扱いは至って簡単である。

有限要素法による2次元の場の問題あるいは平面応力，平面ひずみ問題に関する研究は，従来数多く行われており，著者もこれまでに2次元熱伝導解析[1),2)]あるいは平面応力場における熱弾塑性解析[3)~5)]などを行ってきたが，これらはあくまでも理想化した2次元モデルであって，問題によっては実際の現象を必ずしも忠実に表現しえないような場合も存在する。たとえば，溶接や線状加熱によって生ずる板の面外変形は，本質的には移動する熱源まわりの3次元的な温度分布に起因するものであり，これを厳密に解析するためには，3次元の熱伝導解析と熱応力解析を行う必要がある。

近年，コンピューターはさらに大型化，高速化する傾向にあり，これまで取り扱うことが困難であったような問題の解析が可能となりつつある。そこで本研究では，まず3次元非定常熱伝導問題を，四面体要素を用いて取り扱う場合の定式化を行い，その電子計算機プログラムを開発したのち，いくつかの実際的問題に適用し，解析解あるいは実験結果と比較検討した結果について報告する。

*　九州大学工学部

2 有限要素法による3次元非定常熱伝導解析

有限要素法による3次元問題の取扱いは，Zienkiewicz の著書等[6),7)]に記されているが，その記述は必ずしも明確ではない。そこで，ここでは3次元非定常熱伝導問題を四面体シンプレックス要素を用いて解析する場合の定式化を試みた。

2.1 基礎関係式

3次元非定常熱伝導問題の基礎微分方程式は，

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q \qquad (1)$$

と表わされ，周辺における境界条件は，物体表面の外法線方向を n とすると次式で与えられる[6)]。

$$K\frac{\partial T}{\partial n}+\bar{q}+\alpha T=0 \qquad (2)$$

熱伝導方程式（1）式および境界条件（2）式に等価な変分問題は，汎関数

$$\chi=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\left\{K\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+K\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+K\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right\}-\left(q-c\rho\frac{\partial T}{\partial t}\right)T\right]dV+\iint_S\bar{q}TdS+\iint_S\frac{1}{2}\alpha T^2dS \qquad (3)$$

を最小とする問題となる。ただし，（3）式の V および S は，それぞれいま考えている領域ならびにその周辺境界についての積分を意味する。

2.2 有限要素法による離散化

4表面と4節点を有する四面体シンプレックス要素の頂点をそれぞれ i, j, k, l とし，要素内で温度 T が次式で表わされるように直線的に変化するものと仮定する。

$$T=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4z \qquad (4)$$

$[N]$ を要素の形状関数，$\{T\}^e$ を要素の節点温度ベクトルとすると，要素内の温度 T は次のように表わすことができる。

$$T=[N]\{T\}^e=[N_iN_jN_kN_l]\begin{Bmatrix}T_i\\T_j\\T_k\\T_l\end{Bmatrix}$$

ただし

$$N_\beta=\frac{1}{6V}(a_\beta+b_\beta x+c_\beta y+d_\beta z),\quad \beta=i,j,k,l$$

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&x_i&y_i&z_i\\1&x_j&y_j&z_j\\1&x_k&y_k&z_k\\1&x_l&y_l&z_l\end{vmatrix},\quad V:\text{四面体 } ijkl \text{ の体積}$$

$$a_i=\begin{vmatrix}x_j&y_j&z_j\\x_k&y_k&z_k\\x_l&y_l&z_l\end{vmatrix},\quad b_i=-\begin{vmatrix}1&y_j&z_j\\1&y_k&z_k\\1&y_l&z_l\end{vmatrix},$$

$$c_i=-\begin{vmatrix}x_j&1&z_j\\x_k&1&z_k\\x_l&1&z_l\end{vmatrix},\quad d_i=-\begin{vmatrix}x_j&y_j&1\\x_k&y_k&1\\x_l&y_l&1\end{vmatrix}$$

$$a_j=-\begin{vmatrix}x_k&y_k&z_k\\x_l&y_l&z_l\\x_i&y_i&z_i\end{vmatrix},\quad b_j=\begin{vmatrix}1&y_k&z_k\\1&y_l&z_l\\1&y_i&z_i\end{vmatrix},$$

$$c_j=\begin{vmatrix}x_k&1&z_k\\x_l&1&z_l\\x_i&1&z_i\end{vmatrix},\quad d_j=\begin{vmatrix}x_k&y_k&1\\x_l&y_l&1\\x_i&y_i&1\end{vmatrix}$$

$$a_k=\begin{vmatrix}x_l&y_l&z_l\\x_i&y_i&z_i\\x_j&y_j&z_j\end{vmatrix},\quad b_k=-\begin{vmatrix}1&y_l&z_l\\1&y_i&z_i\\1&y_j&z_j\end{vmatrix},$$

$$c_k=-\begin{vmatrix}x_l&1&z_l\\x_i&1&z_i\\x_j&1&z_j\end{vmatrix},\quad d_k=-\begin{vmatrix}x_l&y_l&1\\x_i&y_i&1\\x_j&y_j&1\end{vmatrix}$$

$$a_l=-\begin{vmatrix}x_i&y_i&z_i\\x_j&y_j&z_j\\x_k&y_k&z_k\end{vmatrix},\quad b_l=\begin{vmatrix}1&y_i&z_i\\1&y_j&z_j\\1&y_k&z_k\end{vmatrix},$$

$$c_l=\begin{vmatrix}x_i&1&z_i\\x_j&1&z_j\\x_k&1&z_k\end{vmatrix},\quad d_l=\begin{vmatrix}x_i&y_i&1\\x_j&y_j&1\\x_k&y_k&1\end{vmatrix} \qquad (5)$$

ここで，次のような熱伝導率 K を含む材料特性マトリックス $[D]$ ならびに温度勾配ベクトル $\{g\}$ とその係数マトリックス $[B]$ を定義する。

$$[D]=\begin{bmatrix}K&0&0\\0&K&0\\0&0&K\end{bmatrix}$$

$$\{g\}=\begin{Bmatrix}\partial T/\partial x\\\partial T/\partial y\\\partial T/\partial z\end{Bmatrix}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}b_i&b_j&b_k&b_l\\c_i&c_j&c_k&c_l\\d_i&d_j&d_k&d_l\end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix}T_i\\T_j\\T_k\\T_l\end{Bmatrix}=[B]\{T\}^e \qquad (6)$$

要素の χ を χ^e で表わし，（5），（6）式の関係を用いると（3）式の汎関数 χ は次式のように表わせる。

$$\begin{aligned}\chi&=\sum\chi^e\\&=\sum\Big(\iiint\frac{1}{2}\{T\}^{eT}[B]^T[D][B]\{T\}^e dxdydz\\&\quad-\iiint q[N]\{T\}^e dxdydz+\iiint c\rho[N]\\&\quad\times\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}^e[N]\{T\}^e dxdydz+\iint\bar{q}[N]\{T\}^e dS\\&\quad+\iint\frac{1}{2}\alpha\{T\}^{eT}[N]^T[N]\{T\}^e dS\Big)\end{aligned} \qquad (7)$$

ただし，（7）式の $\sum$ は，すべての要素についての総和をとることを意味する。（7）式で表わされる χ を最小化するためには，$\{T\}$ をすべての節点温度ベクトルとして，次の条件を満足しなければならない。

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}}=0 \qquad (8)$$

このためには，(7) 式の χ^e を $\{T\}^e$ で偏微分して得られる次式と同様な式をすべての要素について求め，同一節点を共有するすべての要素についての総和を求めてそれらを零とすればよい。

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{T\}^e}=[s]^e\{T\}^e+[p]^e\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}^e+\{f\}^e$$

ただし

$$[s]^e=\iiint[B]^T[D][B]dxdydz+\iint\alpha[N]^T[N]dS$$

$$[p]^e=\iiint c\rho[N]^T[N]dxdydz$$

$$\{f\}^e=-\iiint q[N]^T dxdydz+\iint \bar{q}[N]^T dS \qquad (9)$$

以上の結果，最終的には次の形の連立一次方程式が得られる。

$$[S]\{T\}+[P]\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}+\{F\}=0 \qquad (10)$$

ここで，(10) 式の $[S]$, $[P]$, $\{F\}$ は，それぞれ熱伝導マトリックス，熱容量マトリックス、熱流束ベクトルであり，(9) 式の $[s]^e$, $[p]^e$, $\{f\}^e$ より組み立てられるマトリックス（ベクトル）である。

最後に，実際の計算に便利なように，(9) 式の $[s]^e$, $[p]^e$, $\{f\}^e$ の具体的な表示を行う。要素内では物性値を一定とみなすと，$[s]^e$, $[p]^e$, $\{f\}^e$ の右辺第1項は，体積座標の積分公式[9] を用いることにより，それぞれ次のようになる。

$$\iiint[B]^T[D][B]dxdydz$$

$$=\frac{K}{36V}\begin{bmatrix} b_ib_i+c_ic_i+d_id_i & b_ib_j+c_ic_j+d_id_j & b_ib_k+c_ic_k+d_id_k & b_ib_l+c_ic_l+d_id_l \\ b_jb_i+c_jc_i+d_jd_i & b_jb_j+c_jc_j+d_jd_j & b_jb_k+c_jc_k+d_jd_k & b_jb_l+c_jc_l+d_jd_l \\ b_kb_i+c_kc_i+d_kd_i & b_kb_j+c_kc_j+d_kd_j & b_kb_k+c_kc_k+d_kd_k & b_kb_l+c_kc_l+d_kd_l \\ b_lb_i+c_lc_i+d_ld_i & b_lb_j+c_lc_j+d_ld_j & b_lb_k+c_lc_k+d_ld_k & b_lb_l+c_lc_l+d_ld_l \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$\iiint c\rho[N]^T[N]dxdydz=\frac{c\rho V}{20}\begin{bmatrix} 2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$\iiint q[N]^T dxdydz=\frac{qV}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix} \qquad (13)$$

また，(9) 式の $[s]^e$ および $\{f\}^e$ の右辺第2項の物体表面に沿う積分，すなわち

$$I=\iint\alpha[N]^T[N]dS, \quad J=\iint\bar{q}[N]^T dS$$

は，面積座標の積分公式[9] により，境界が ijk 面，jkl 面，kli 面，lij 面にあるとき，それぞれ次のようになる。

$$I_{ijk}=\frac{\alpha S_{ijk}}{12}\begin{bmatrix}2&1&1&0\\1&2&1&0\\1&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \quad J_{ijk}=\frac{\bar{q}S_{ijk}}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\end{Bmatrix} \qquad (14)$$

$$I_{jkl}=\frac{\alpha S_{jkl}}{12}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&1\\0&1&2&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}, \quad J_{jkl}=\frac{\bar{q}S_{jkl}}{3}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\\1\end{Bmatrix} \qquad (15)$$

$$I_{kli}=\frac{\alpha S_{kli}}{12}\begin{bmatrix}2&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&2&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}, \quad J_{kli}=\frac{\bar{q}S_{kli}}{3}\begin{Bmatrix}1\\0\\1\\1\end{Bmatrix} \qquad (16)$$

$$I_{lij}=\frac{\alpha S_{lij}}{12}\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&2\end{bmatrix}, \quad J_{lij}=\frac{\bar{q}S_{lij}}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\\1\end{Bmatrix} \qquad (17)$$

ただし，(14)～(17) 式の $S_{ijk}, S_{jkl}, S_{kli}, S_{lij}$ は，それぞれ四面体 $ijkl$ の面 ijk, jkl, kli, lij の面積を表わす。

2.3 計算の取扱い

(10) 式を解く場合，$\{T\}$ と $\{\partial T/\partial t\}$ なる2つの未知量が存在するが，現在の時刻を t，時間増分を Δt として

$$\{T\}=\frac{1}{2}(\{T\}_t+\{T\}_{t-\Delta t}) \qquad (18)$$

および

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}=\frac{\{T\}_t-\{T\}_{t-\Delta t}}{\Delta t} \qquad (19)$$

とおくことにより，(10) 式は次のようになる[10]。

$$\left([S]+\frac{2}{\Delta t}[P]\right)\{T\}_t=\left(-[S]+\frac{2}{\Delta t}[P]\right)\times\{T\}_{t-\Delta t}-2\{F\} \qquad (20)$$

(20) 式によると，時刻 $t-\Delta t$ における $\{T\}$ の値がわかれば，この連立方程式を解くことにより $\{T\}_t$ を求めることができる。すなわち，初期条件として $\{T\}_{t=0}$ の値を与えればよい。

Fig. 1 に本計算のフローチャート，Fig. 2 に本計算で

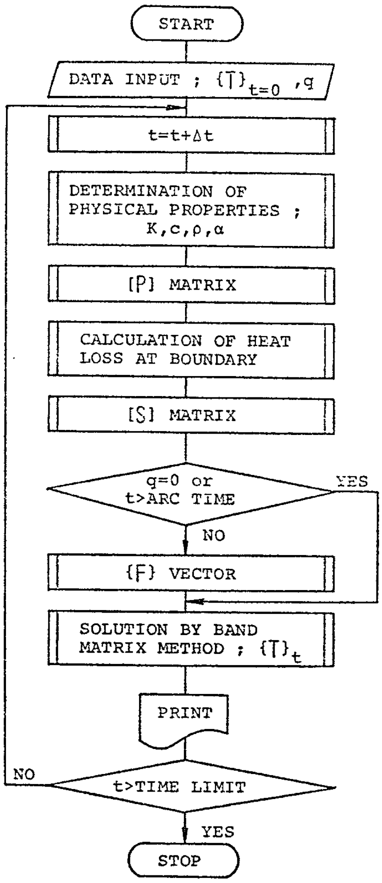

Fig. 1 Flow chart for analysis

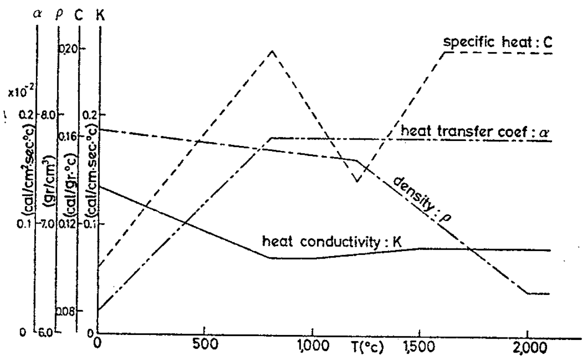

Fig. 2 Temperature dependency of physical properties

仮定した熱伝導率 K, 比熱 c, 密度 ρ および熱伝達係数 α の温度依存性[2] を示す。

3 計算結果とその考察

まず，計算プログラムの確認のために行った最も簡単な例題として，Fig. 3 に示すような頂点1が原点にあり，その他の3頂点がそれぞれ x, y, z 軸上 10 cm の位置にあるような四面体要素の初期温度 $\{T\}_{t=0}$ を

$$\{T\}_{t=0}=\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}_{t=0}=\begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (°\mathrm{C}) \qquad (21)$$

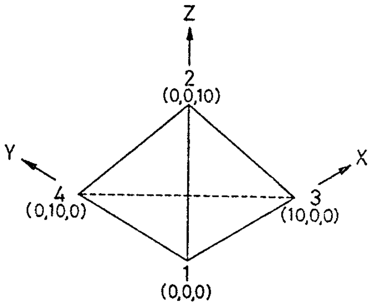

Fig. 3 Simple tetrahedral element

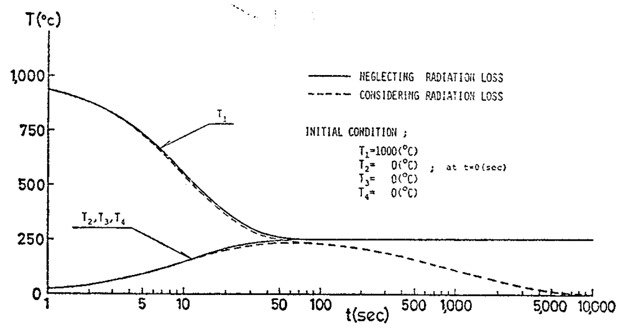

Fig. 4 Transient nodal temperatures of a simple tetrahedral elememt

とした場合について，その後の節点温度の時間的変化を計算した。その結果を Fig. 4 に示す。計算は，表面からの熱放散を無視した場合（実線）とこれを考慮した場合（破線）について行った。いずれの場合も T_2, T_3, T_4 の値はどの時刻においても完全に一致しており，また表面からの熱放散を無視した場合には，約 100 秒ですべての節点温度が 250°C となり，他方，表面からの熱放散を考慮した場合には約3時間後に温度上昇が零となることが認められる。

次に解析解が得られる問題との比較を行う。解析の対象とした問題は，無限固体の初期温度が $-a \leqq x \leqq a$ では一定温度 θ_0，他の部分では温度零であるときの任意の瞬間の温度分布を求めるものである。この問題に対する解析解は ϕ_0 を誤差関数として次式で与えられる[8]。

$$\left.\begin{aligned} &T=\frac{\theta_0}{2}\left\{\phi_0\left(\frac{x+a}{2\sqrt{kt}}\right)-\phi_0\left(\frac{x-a}{2\sqrt{kt}}\right)\right\} \\ &\text{ただし} \\ &\phi_0=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

この問題は1次元問題であるが，ここでは Fig. 3 に示したような四面体要素を6個合成することにより Fig. 5 に示す8節点を有する六面体要素を作り，これをつなぎ合わせることによって Fig. 6 に示すようなモデルを設定した。問題の対称性より，斜線部を加熱域として，$x \geqq 0$ の領域のみを解析した。なお，計算に用いた諸定数値は，$K=0.087$ cal/cm·sec·°C, $c\rho=1.5$ cal/°C·cm³ であり，したがって (22) 式の k の値は $k=K/c\rho=0.058$

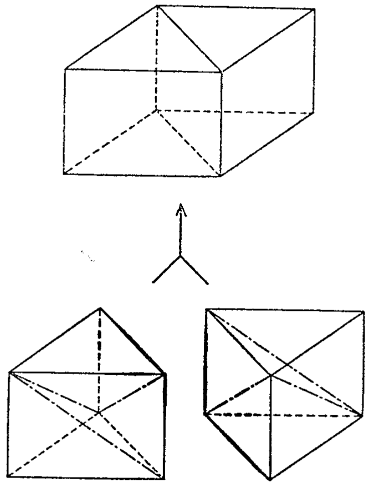

Fig. 5 Hexahedron composed of six tetrahedrons

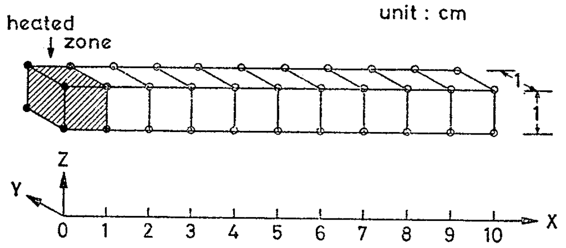

Fig. 6 Model for analysis

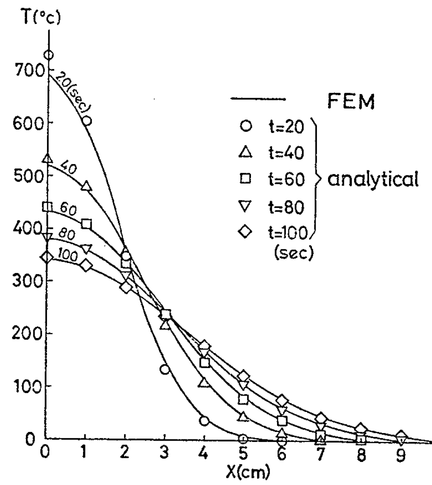

Fig. 7 Comparison of temperature distributions calculated by FEM and analytical method

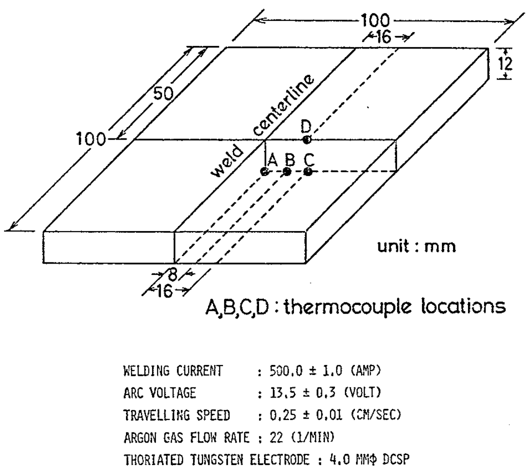

Fig. 8 Test specimen and welding condition

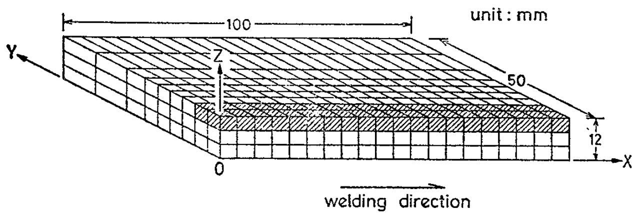

Fig. 9 Model for analysis

cm^2/sec とした。Fig. 7 は，初期温度を $\theta_0=1,000$°C，加熱幅を $a=1$ cm とした場合について，x 方向の温度分布を時間をパラメータにとって両者の結果を比較したものである。FEM 解析においては，Fig. 6 に黒丸で示したような8節点のみに初期温度を与えたため，時刻20秒の原点近傍において解析解との間に隔たりがみられるが，原点から離れるにつれ，また時間が経過するにつれて両者は良く一致するようになることがわかる。FEM 計算において，加熱域近傍の要素数ならびに節点数を増加すれば，さらに計算精度が向上するものと思われるが，ここで示したような非常にシンプルなモデルでもかなり良好な精度の解が得られることがわかる。

次に実際的な問題について本解析法の検討を行う。すなわち，Fig. 8 に示すような 100×100×12 mm の板の中心線上を全長にわたってビード溶接した場合について，図中に示す板の中央横断面上の A～D 点の温度変化に関する計算結果と実験結果の比較を行った。実験に使用した鋼材は，厚さ 12 mm の SS 41 材で，実験では図中に記した溶接条件で自走 TIG トーチによるビード溶接を行い，図中の A～D なる位置に CA 熱電対を点溶接して温度の計測を行った。なお，実験には溶加金属は用いていない。計算に際しては，問題の対称性を考慮して，Fig. 9 に示すようなモデルを設定し，図中に斜線を施した領域を熱源領域として，溶接熱は熱源の移動にともない現在の熱源位置に相当する領域に順次均等に発生するとした。この場合の要素数は3240，節点数は840である。また，アークの熱効率は実験により 65% とした。Fig. 10 は，A～D 点の温度の時間的変化に関する計算結果と実験結果を，横軸に溶接開始後の経過時間をとって比較したものである。ここで，温度の計測位置に熱源が到達するのは $t=20$ 秒，溶接が終了するのは $t=40$ 秒である。図より，計算結果と実験結果には若干の相違がみられるものの両者は比較的良く一致しており，特に溶接中心線から同一距離にあるD点（板の表面）とC点（板の裏面）の温度上昇時における時間的経過の相違は，計算によってかなり良好にシミュレートされてい

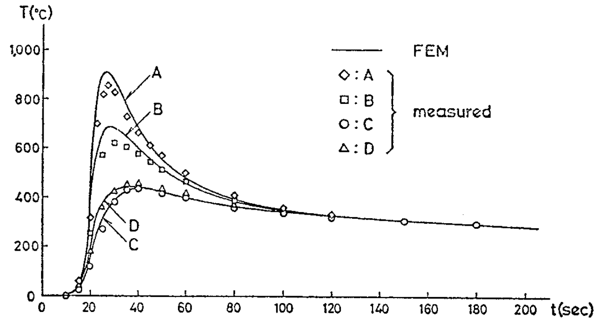

Fig. 10 Comparison between calculated and measured temperatures at four thermocouple positions

B_W , B_D	CALCULATED	MEASURED
MAX. BEAD WIDTH B_W(MM)	16.2	17.2
MAX. BEAD DEPTH B_D(MM)	5.3	5.6

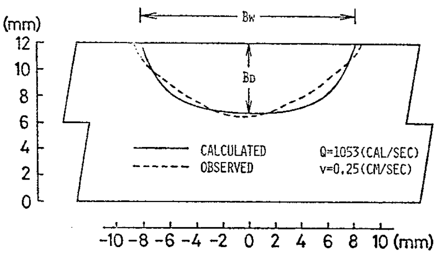

Fig. 11 Comparison of the shapes of weld penetration obtained by calculation and experiment

ることがわかる。

Fig. 11 は，Fig. 10 の場合と同一条件のもとにおける溶接部の溶け込み形状を図示したもので，破線で示された領域は，実験によって得られたビード形状，実線で示された領域は，FEM 計算において最高到達温度が 1,500°C 以上の領域を表わす。これより，ビードの最大幅を B_W，最大深さを B_D として，それらの計算値と実験値を図中に記しているが，両者はかなり良く一致していることがわかる。本計算ではアークの圧力や溶融池内の対流生成作用あるいは重力の影響等[11),12)]を考慮しておらず，単に熱伝導論的な立場[13)]からのみ取り扱ったものであるが，本計算の場合には実験結果との良好な一致がみられる。

以上の考察によって，本計算がほぼ妥当な結果を与えるものであることがわかったので，次に，前述の例よりも溶接入熱量が増加した場合を本解析法により取扱い，その溶融池形状に関して2，3の考察を行う。

Fig. 11 の場合より単位時間当りの入熱量 Q が約 90% 増加した場合の溶融池形状（$T=1,500$°C の等温線形状）を，Fig. 12 に図示した。Fig. 12 の（a），（b），（c）は，それぞれ現在の熱源位置を $x=0$ とした場合の溶融池の x-y 断面，x-z 断面および y-z 断面を示す。（a）図

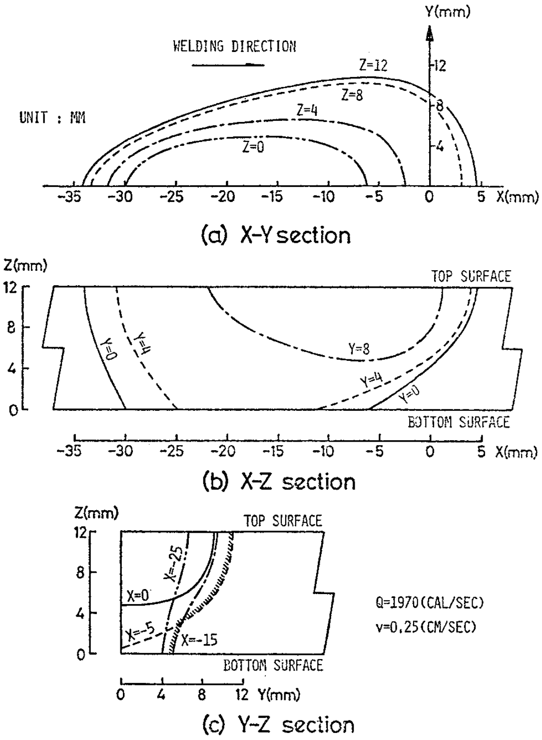

Fig. 12 Sectional shapes of molten pool

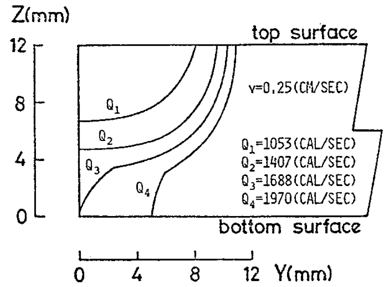

Fig. 13 Effect of heat input on the shapes of weld penetration

より，$z=$const. な断面における溶融池の最大幅は，板の表面（$z=12$ mm）から板の裏面（$z=0$）にいくにつれて次第に減少するが，その最大幅が生ずる位置は，板の裏面側の方が熱源位置より遠ざかることがわかる。これは，熱の伝導が板の表面側より板の裏面側の方で遅れて起こることによるものと考えられる。このことは，溶融池の横断面を示した（c）図により，さらに明らかになる。すなわち，溶融池の幅は板の表面側では熱源位置より 5 mm 後方の断面で最大となるが，板の裏面側では熱源位置より 15 mm 後方の断面で最大となっている。したがって，（c）図の中に斜線を施した境界は，その内部の最高到達温度が 1,500°C 以上の境界を表わしていることになり，仮に，これと同一条件のもとで溶け落ちが起きないように実験を行えば，ほぼ斜線で示されたような形状の溶け込みが得られるものと考えられる。また，溶融池の縦断面を示した（b）図より，溶融池の長さおよび深さが溶接中心線（$y=0$）より離れるにした

がって次第に減少する様子がわかる。

Fig. 13 は，溶接部の溶け込み形状が単位時間当りの入熱量Qの大小によってどのように変化するかを調べた結果を図示したもので，図中の Q_2, Q_3, Q_4 は Q_1 の場合に比べて単位時間当りの入熱量がそれぞれ約 30%，60%，90% 増加した場合の溶け込み形状を示す。図より，入熱量が増加するにつれてビードの幅および深さが次第に増加し，また，裏波ビードが形成されていく様子がわかる。

4 あとがき

本論文では，3次元非定常熱伝導問題を有限要素法を用いて解析する場合の取扱いを示し，いくつかの問題について計算を行って得られた結果の妥当性を検討した。その結果，ここで示した方法は，移動する溶接熱源まわりの3次元的温度分布すなわち溶融池の立体的形状のように，2次元解析では取り扱うことが困難であったような実際的な問題を，簡単な解析モデルによってかなり精度良く評価できることが明らかになった。また，Fig. 9 に示した要素分割を用いて，溶接開始後板が完全に冷却するまでに要した演算時間は1分程度であり，同様な手法を3次元準定常熱伝導問題に適用すれば，さらに演算時間の短縮が期待できる。著者はここで得られたような温度分布にもとづく熱応力および変形の解析を今後進めていく予定である。

本計算は，九州大学大型計算機センター FACOM-M-382 を使用して行われ，実験的研究は，九州大学工学部造船学科 山口喜久次助手のご協力をいただいた。また，東京大学工学部船舶工学科 野本敏治先生には暖いご激励をいただいた。ここに記して，心から御礼申しあげます。

参考文献

1) 辻 勇，吉村 洋：薄板のビード溶接時の温度分布と冷却速度，西部造船会会報，第58号(1979)，pp. 23〜34.

2) 辻 勇，吉村 洋：有限要素法による移動熱源まわりの2次元準定常温度分布の解析，西部造船会会報，第61号 (1981)，pp. 207〜214.

3) 辻 勇，吉村 洋：薄い軟鋼板の突合せ溶接時の過渡応力と開先の変位挙動に関する研究（第1報），日本造船学会論文集，第146号 (1979)，pp. 428〜435.

4) 辻 勇，吉村 洋：同上(第2報)，日本造船学会論文集，第149号 (1981)，pp. 279〜286.

5) 辻 勇，吉村 洋：同上(第3報)，日本造船学会論文集，第151号 (1982)，pp. 278〜284.

6) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967.

7) O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.

8) 渡辺正紀，佐藤邦彦：溶接力学とその応用，朝倉書店，1965.

9) L. J. Segerlind：川井忠彦訳：応用有限要素解析，丸善，1978.

10) J. Donea: On the Accuracy of Finite Element Solutions to the Transient Heat-Conduction Equation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 8 (1974), pp. 103〜110.

11) E. Friedman: Analysis of Weld Puddle Distortion and Its Effect on Penetration, Welding Journal, Vol. 57, No. 6 (1978), pp. 161 s〜166 s.

12) 西口公之，黄地尚義，中田尚文，石橋克哉：アーク溶接の溶融池現象に関する界面張力論的解析（第3報），溶接学会論文集，Vol. 2, No. 2 (1984), pp. 201〜207.

13) Z. Paley, P. D. Hibbert: Computation of Temperatures in Actual Weld Design, Welding Journal, Vol. 54, No. 11 (1975), pp. 385 s〜392 s.