(昭和59年11月 日本造船学会秋季講演会において講演)

繰返し荷重を受ける亀裂を有する鋼板の弾塑性挙動とJ積分による評価

正員 栖原二郎* 正員 吉永陽一**

Elastic-Plastic Behaviors of Cracked Steel Plate Subjected to Repeated Load and Its Evaluation by Means of J-Integrals

by Jiro Suhara, *Member* Youich Yoshinaga, *Member*

Summary

Finite element analysis was performed to analyze the elastic-plastic behavior of cracked steel plate subjected to monotonic or repeating load.

Variations of J-integrals obtained by integral paths around crack following the changes of loads are evaluated by the data of finite element analysis based on the stress-strain simulation of steel for arbitrary cycles.

Independency of J-value from integration paths acrossing the elastic and plastic zones is proved numerically for the cases of monotonically increasing external loads.

The variation of the J integral for the changes of clip gauge displacements for 3 mm thick steel compact tensions specimen obtained by FEM analyses of nine contributors and the experimental J value are agreed well with the corresponding results obtained by authors[3].

Bucci's estimation[7] between J-integral and over all strain for single cracked plate subjected to tension at ends, obtained by the elastic and rigid plastic analyses is proved clarifying continuous transition from linear to nonlinear behavior by authors' analysis.

Changes of J-integral values for the cyclic change of tensile load obtained from the results of FEM analyses are shown.

Finally, the estimation formula of crack growth rate da/dn of steel plate subjected to pulsating tension is expressed by the variation of J integral taking the Elber's crack closure effect into account is proposed and showed better agreement with the experimental data comparing with Paris' formula expressed by effective change of stress intensity factor.

1 緒言

波浪中を航行し変動荷重を受ける船体構造等に発生する亀裂の進展を予測するために，従来より亀裂進展法則として弾性解析による有効応力拡大係数を用いた Paris の法則[1]が用いられている。しかし実際の鋼板の亀裂先端には塑性変形が生ずるため応力拡大係数は少なくとも小規模降伏状態までしか用いられず，中規模ないし大規模降伏が生ずる場合は，応力分布の弾性解に基づく応力拡大係数を用いることは妥当ではなく，これに代って塑性変形をも許容する Rice の J-積分の導入が考えられる。ただしこれは全歪理論に基づいて定義され，一般に複雑に変動する荷重を受けて部分的除荷を生ずる場合に適用することは妥当ではない。しかし規則的に変動する荷重により生ずる塑性域における応力値の各成分が比例的に増加する場合には，これに対応するJ値の変動を考慮することができ，これを用いた疲労亀裂進展則を考慮することができる。

そこで，これに先立って規則的変動荷重を受ける亀裂を有する鋼板における応力変動およびこれより計算したJ積分値の変動 ΔJ の状態を知る必要がある。

著者ら[2]は先に鋼材の応力～歪関係の任意の変動サイクルに対するシミュレーションと異方性複合硬化関数を用いた降伏曲面理論に基づく塑性力学に基づいた有限要素法による応力および歪の解析を行った[3]。本報告ではまず規則的な荷重変動に対する過渡的および定常的なJ積分値の変動を求め，応力拡大係数の変動 ΔK で表わした Paris の疲労亀裂進展法則に代わって ΔJ による亀裂進展法則の妥当性を検討し，次にこれを繰返し引張りによる亀裂進展に関する中沢[4]の実験結果と比較し

* 九州大学名誉教授（熊本工業大学教授）
** 日本鋼管株式会社（研究当時九州大学大学院）

て，従来 Paris の式より求めた結果よりよく一致することを示した。

2　亀裂を有する鋼板の弾塑性解析

任意の荷重増分を受ける亀裂を有する鋼板の弾塑性解析については，前報告[3]に従い平面応力として定歪三角形要素を用いて有限要素法（以下 FEM と書く）により応力，歪等の変化を求める。そこで各荷重増分毎にそれらの増分値を求めこれらを累積して非線形応力～歪関係に基づいたJ積分の値を下式より求める。

$$\left.\begin{aligned} &J=\int_{\Gamma}\left(W dy-\boldsymbol{T}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}dS\right)\\ &\text{ここに,}\quad W=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)$$

また Γ は亀裂先端を囲む積分経路でその一例を Fig. 1 に示す。また$\boldsymbol{T}$は積分径路上の周辺弧長の増分における表面力ベクトル，$\boldsymbol{u}$はその点における変位ベクトルである。

まず以上述べた解析の精度を確かめるため Fig. 2 に示すコンパクト引張り試験片について，引張り荷重を変えて同図に示す AB 間のクリップゲージ変位とJ積分の値を Fig. 3 に示す FEM のメッシュを用いて求めた。同図に示すようなJ積分の値をそれぞれ3種類の積分径路 I，II および III について求め，白鳥ら[5]および Bleackley ら[6]の計算および実験結果と比較して Fig. 4 に示す。ただし径路 III は亀裂に近接し過ぎており他の結果と良く一致しなかったが，径路 I または径路 II についてのJ積分の値はそれぞれ一致し，したがって積分径路が塑性域を通過するか否かに関係せず，各クリップゲージ変位値に対して両者共良く一致しJ積分の径路に無関係なことを示すと共に，白鳥らおよび Bleackley らの実験値とも良く一致して著者らの計算法が実用上十分な精度を有することが確かめられた。ここでコンパクト引張り

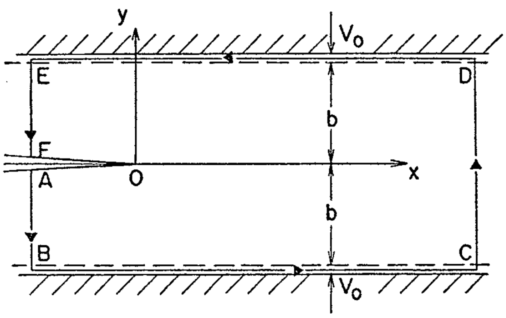

Fig. 1 Integral path for J-Integral

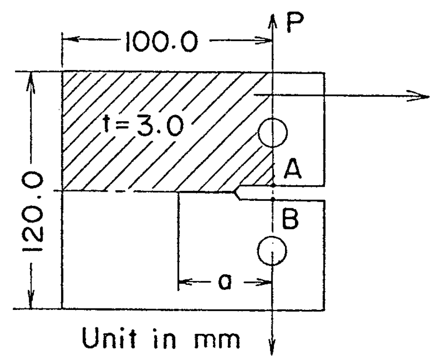

Fig. 2 Geometry of compact tension specimen and definition of clip gauge displacement AB

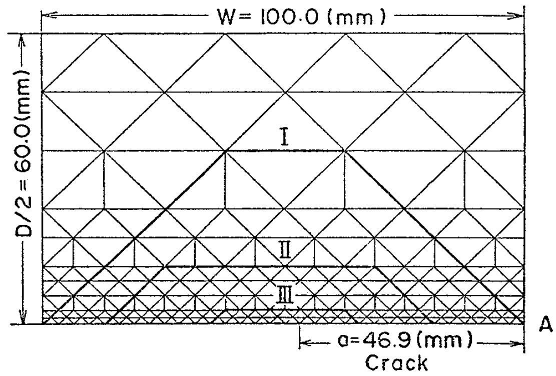

Fig. 3 Finite element mesh and paths for J-Integrals for analysis of compact tension specimen

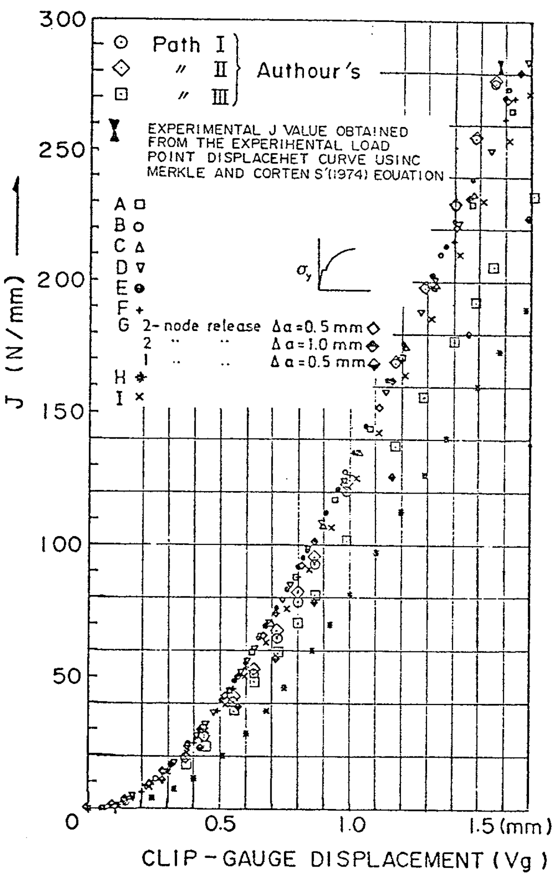

Fig. 4 Variation of the J-Integral with clip gauge displacement for the 3 mm thick compact tension specimen

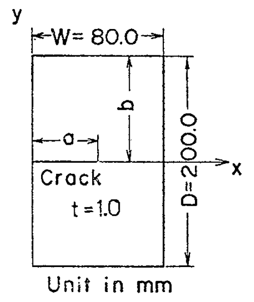

Fig. 5 Geometry of tension specimen having a crack on one side

試験片の材料定数および応力～歪関係は Bleackley ら[6]の報告に示されているものによった。

3 J積分と全体変位との関係

Fig. 5 に示す片側亀裂を有する鋼板の上下端にそれぞれ一様変位 v_0 を与えたときの荷重 P と変位 v_0 との関係を Bucci ら[7]は弾性解および加工硬化を無視した全面降伏時に対する剛塑性解から J 積分と端部変位 v_0 の関係を求めている。即ち弾性状態における J～v_0 関係は試験片の幅が十分大きい場合，Fig. 1 に示す積分径路について (2.1) 式の積分を行い次式が得られる。

$$J=\frac{E}{1-\nu^2}\cdot\frac{{v_0}^2}{b} \tag{3.1}$$

ここで，Fig. 5 に示す試験片について Young 率 $E=2.17\times10^4\,\mathrm{kgf/mm^2}$，Poisson 比 $\nu=1/3$，$b=100\,\mathrm{mm}$ を代入すると次式を得る。

$$J=244.1\,{v_0}^2 \tag{3.2}$$

上式において J および v_0 の単位はそれぞれ kgf/mm および mm である。さらに Fig. 5 に示す試験片において $b=100.0\,\mathrm{mm}$，亀裂長さ $a=20\,\mathrm{mm}$ および $a=40\,\mathrm{mm}$ の二つの場合について FEM によって求めた無次元化 J 積分 $JE/w\sigma_y{}^2$（ただし w は試験片の幅，σ_y は降伏応力$=27.0\,\mathrm{kgf/mm^2}$）と無次元化全体歪 $v_0E/D\sigma_y$ との関係を示せば Fig. 6 に示すように亀裂長さにほぼ無関係となる。ただし，このいずれの場合も端部において引張り方向の変位 v_0 は一様とし，横方向には拘束を与えていない。なお同図中に示す実線は線形弾性解析の結果であり，無次元全体歪 $v_0E/D\sigma_y=0.5$ までは FEM による計算結果とほぼ一致する。$v_0E/D\sigma_y>0.5$ では FEM 計算結果より求めた J 積分～全体歪関係はほぼ直線的となり，線形弾性解析と剛塑性解析の両極端の解析結果のみから近似的に予測した Bucci ら[7]の結果に加えて両者の中間部分即ち弾塑性変形が拡大する部分も含めて両者間の関係を滑らかに結ぶ連続的な関係が得られた。なおこの FEM 計算に用いた試験片の上半分のメッシュの分割を Fig. 6 に，また材料の応力～歪関係を

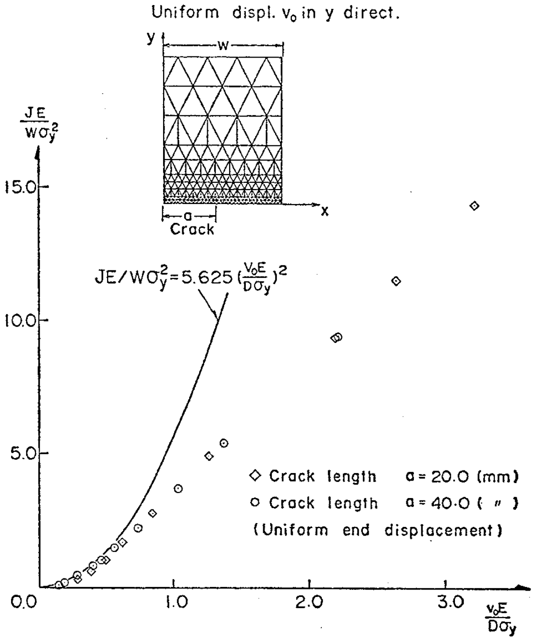

Fig. 6 Variation of J-Integral with end displacement for the compact tension specimen

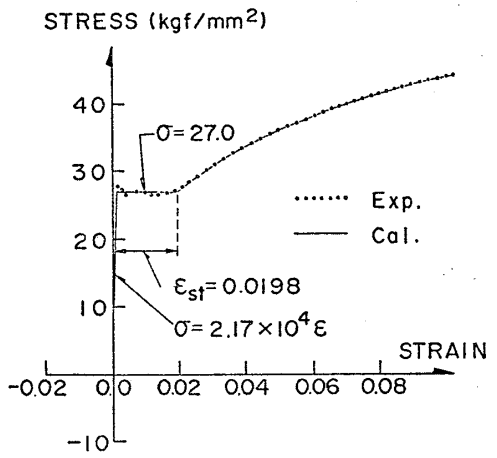

Fig. 7 Stress-strain curve for the steel used for the analysis of tension specimen with one side crack

Fig. 7 に示す。

4 J積分と端部引張り応力および亀裂開口変位との関係

次に Fig. 7 に示す材料で Fig. 5 に示す試験片について試験片の両端に一様分布応力 $\bar{\sigma}$ を負荷した場合，$\bar{\sigma}$ と J との関係を示すと Fig. 8 のようになる。同図中亀裂長さ $a=20.0\,\mathrm{mm}$，$30.0\,\mathrm{mm}$ および $40.0\,\mathrm{mm}$ の各々の場合について FEM による弾塑性解析によって得られる J～$\bar{\sigma}$ 関係をプロット点にて，また線形破壊力学に基づいた関係式

$$J=\pi a\{F(\xi)\}^2\bar{\sigma}^2/E \tag{4.1}$$

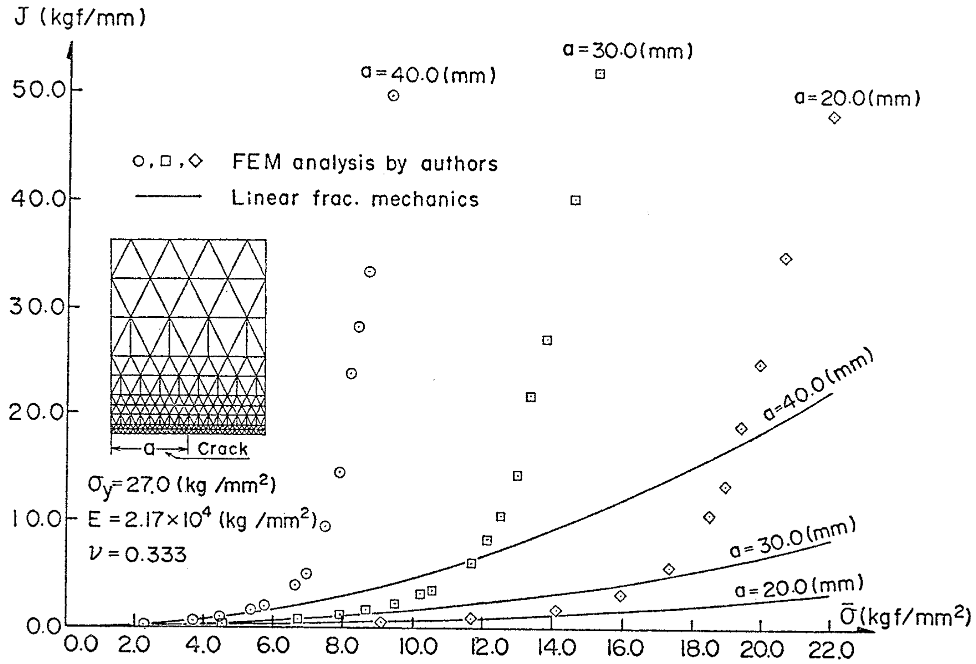

Fig. 8 Variations of J-Integrals with end stress for specimen with one side crack

をそれぞれ実線で示している。ただし K_I はモードIの応力拡大係数で (4.2) および (4.3) 式で与えられる[8]。

$$K_I=\bar{\sigma}\sqrt{\pi a}\cdot F(\xi),\ \ \xi=a/w \tag{4.2}$$

$$F(\xi)=1.12-0.231\,\xi+10.55\,\xi^2-21.72\,\xi^3+30.39\,\xi^4 \tag{4.3}$$

同図より亀裂長さに関係なく大略 $JE/w\sigma_y{}^2\leq 0.5$ では線形解析結果と本計算の結果は一致するが $JE/w\sigma_y{}^2>0.5$ では亀裂付近の降伏域の影響が顕著となり端部における引張り応力の増加と共にJ積分の値が急増することが分かる。

次に端部引張り応力の増加に伴うJ積分と亀裂先端開口変位 (CTOD) との関係を Fig. 9 に示す。ここで CTOD の定義として，小規模降伏時には亀裂先端の塑性域の大きさを γ_p として亀裂先端から γ_p+a の距離における変位量が用いられるが，本報告では FEM による解析の便宜上亀裂長さに関係なく亀裂先端から FEM の1メッシュの長さ=0.5 mm の点における開口量をもって CTOD δ_0 とした。また Fig. 9 には小規模降伏を仮定した弾性解析結果から求めた $J\sim\delta_0$ 関係[9]を実線にて示す。同図より $J\sim\delta_0$ 関係は亀裂長さには関係なく同一曲線上に乗るが $J>20$ 即ち $JE/w\sigma_y{}^2>7.44$ では平面応力問題として小規模降伏の仮定より得た線形関係

$$J=\sigma_y\cdot\delta_0 \tag{4.4}$$

と差が生じ非線形効果が現われていることが分かる。

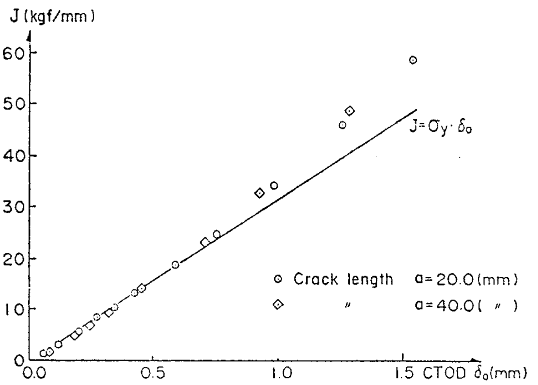

Fig. 9 Variation of J-Integral with crack tip opening displacement for one side crack specimen

5 単調引張り荷重を受ける片側切欠き付試験片に関するJ積分の積分径路独立性

単調に増加する一様分布引張り応力 $\bar{\sigma}$ を端部に受ける

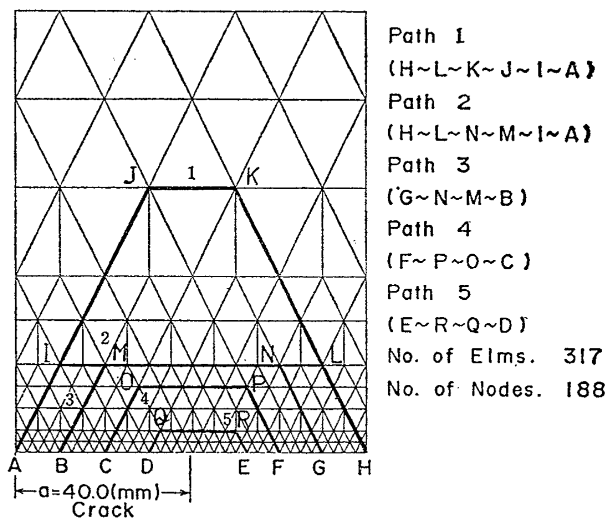

Fig. 10 Various integral paths for obtaining J-Integrals for the one side crack specimen

Fig. 5 に示す亀裂長さ $a=40.0$ mm の片側切欠き付試験片の弾塑性解析を Fig. 10 に示すようなメッシュを用いて行う。試験片端部にかける3種類の端部引張り応力について太線で示す5種類の積分径路について J 積分を求めてそれぞれ横軸に5種類の J 積分径路の径路長を縦軸に J 積分の平均値と各 J 積分の値との比を Fig. 11 に示す。なおそれぞれの端部応力の場合について塑性域の広がりを Fig. 12 に示す。即ち端部に一様引張り応力を受ける場合のこれらの例に示す各積分径路に対する J 積分の値のバラツキは，積分径路が塑性域を通過する，通過しないとにかかわらず±2％の範囲内であった。また試験片の両端に一様変位を与えた場合，Fig. 10 に示すそれぞれの積分径路についての J 積分のバラツキはその平均値に対して ±10％ 以内に収まった。

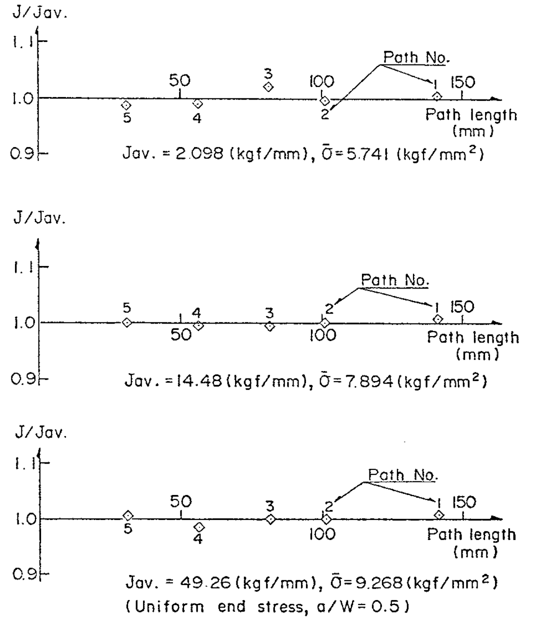

Fig. 11 J-Integral values for various integral paths of the cases for various given end stresses

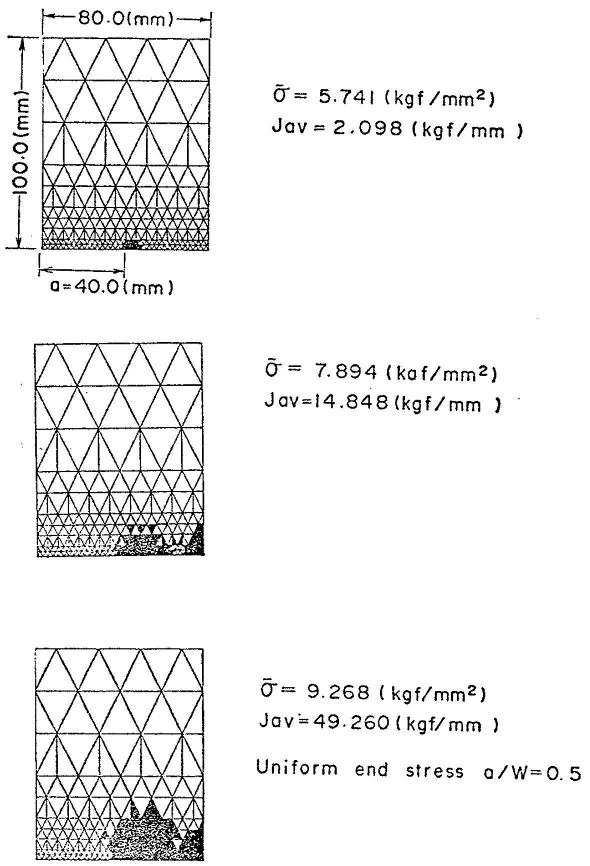

Fig. 12 Variation of plastic zone and average values of J-Integrals with end stresses

6 繰返し荷重を受ける鋼板の J 積分

J 積分は弾性理論ないしは全歪理論に基づいて定義され除荷を伴う荷重変化に対しては定義されない。しかし繰返し変動する荷重を受ける亀裂を有する鋼板において，鋼板にかかる端部負荷が増加する過程においては，荷重変動が非常に大きい特別の場合を除いて，各応力成分の変動はほぼ比例的に増加すると見られ，端部の引張り荷重の増分に対応する J 積分値の変動 $\Delta J=J_{\max}-J_{\min}$ は大規模降伏を生じている場合でも負荷による J 積分値の差として物理的意味を持つと考えられる。このことについて K. Tanaka[10] は小規模降伏を仮定し（1）塑性変形による Elber の示した crack closure の影響，（2）繰返し負荷による累積的塑性変形の増大および（3）亀裂の生長，のいずれも無視し，弾完全塑性体を仮定し，Dugdale モデルの考え方に基づき等振幅の端部荷重の変動に対しては最初の1サイクルを除いて ΔJ は端部引張り応力の変動 $\Delta\bar{\sigma}$ のみに関係し，その負荷サイクル数には関係しないとして次式を与えている。

$$\Delta J=(32/\pi)(\sigma_y{}^2a/E)ln[\sec\Delta\bar{\sigma}/4\sigma_y] \quad (6.1)$$

本報告では鋼材の塑性力学的特性として著者ら[11]が開発した任意の応力〜歪サイクルをシミュレートすることができる加工硬化を考慮した応力〜歪関係を用い，Elber の示した crack closure 効果および累積塑性歪も考慮して FEM 計算を行い，その結果を用いて J 積分を求めた。Fig. 13 はその結果を負荷サイクル数の関数として示したものである。ここでは端部応力 $\bar{\sigma}=5.0$ kgf/mm² の単調片振りで等しい大きさの繰返し負荷と，負荷サイクル数 $N=8$ または $N=12$ のときに1回だけ $\bar{\sigma}=10.0$ kgf/mm² の過大負荷をかけ，その後再び 5.0 kgf/mm² で等しい繰返し負荷をしたとき，各サイクル毎に最大および最小の J 積分値の差 ΔJ を，サイクル数 N の変化に対してそれぞれ示したものである。これによると過大負荷の影響を受けるが過大負荷をかける前後において ΔJ の値は N の増加により増加せず，即ち等しい荷重変動であれば ΔJ は N の影響は受けないことが分か

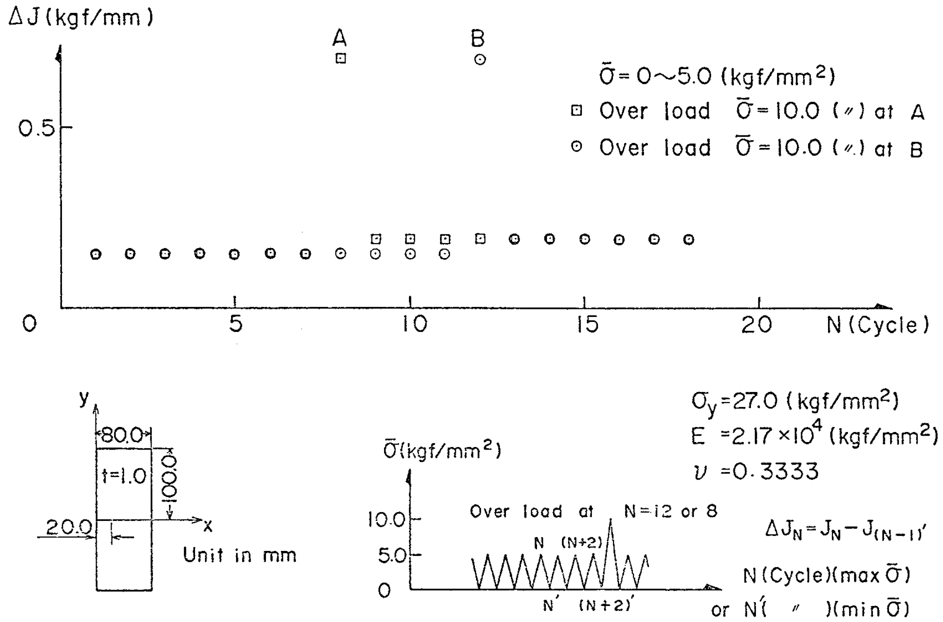

Fig. 13　Variation of J-Integral with repeating end stress and single extreme load

る。ただしこの FEM 解析において亀裂長さは変らないものとした。

これに対して Fig. 13 に示す試験片に端部引張り応力 $\bar{\sigma}=10.0$ kgf/mm^2 にて単調繰返し片振り負荷をした場合を Fig. 14 に示す。同図において亀裂長さ $a=10.0$ mm の場合は負荷回数の増大と共に ΔJ の値は変らないが，亀裂長さ $a=20.0$ mm では繰返し回数と共に ΔJ は最初増加しその後ほぼ一定値となる。しかし亀裂長さ

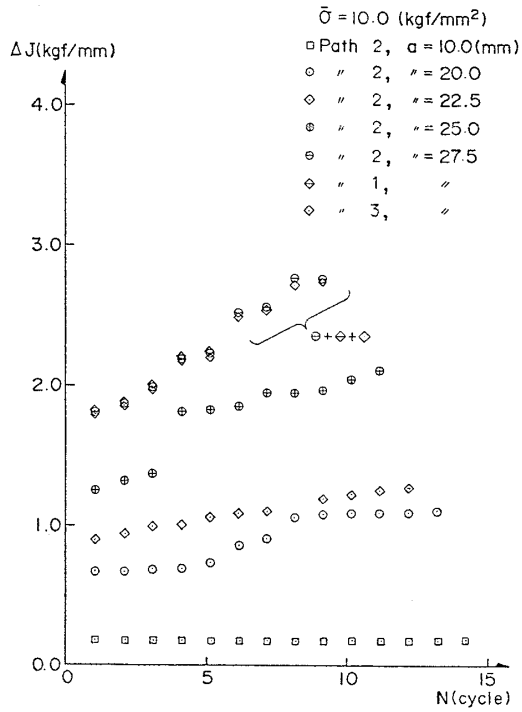

Fig. 14　Variation of the J-Integral by the pulsating end stress with number of cycles for various crack lengths

$a \geqq 22.5$ mm 以上では繰返し回数の増大と共に ΔJ は次第に増大する傾向を示す。ただしこの場合も繰返し負荷により亀裂長さは変らないものとした。なお同図中 Path 番号は Fig. 10 に示すとおりで $a=27.5$ mm の場合は精度を確かめるため，3つの異なった積分径路について各々 ΔJ を計算し，これらがそれぞれほぼ一致することから精度を確かめた。なお $a=20.0$ mm, $\bar{\sigma}=18.9$ kgf/mm^2 のとき，各サイクル毎の J 積分の値の変化の状態を Fig. 15 に示す。同図より最初のサイクルについては J の値は $\bar{\sigma}$ の変化に対して非線形的に変化するが，次のサイクルから J 変化はほぼ直線的になる。ただし J の極大値はサイクル数と共に漸次増加している。そこで ΔJ が繰返し回数 N の影響を受けない最大荷重の目安は，片側切欠きの場合の例では亀裂長さ $a=20.0$ mm，降伏応力 $\sigma_y=27.0$ kgf/mm^2 の場合の極限荷重が 1,620 kgf であることから，端部応力 $\bar{\sigma}=10.0$ kgf/mm^2 に対する端部荷重 800 kgf はその約 1/2 であると推定できる。

7　規則的に変動する負荷による亀裂進展の解析

初期亀裂を有する鋼平板の両端に繰返し負荷を受ける場合の亀裂進展の予測については，線形弾性解析に基づく応力拡大係数の変化 ΔK を用いた Paris の法則[1]が知られている。しかし亀裂の先端には塑性域が発生し，この影響を考慮すれば塑性域の存在を無視した ΔK による亀裂進展法則の表現は必ずしも適当であるといえない。そこで亀裂周辺の弾塑性応力解析の結果を用いることが考えられるが，非常に多くの回数の繰返し変動負荷による弾塑性応力の変動を FEM 解析を行って忠実に

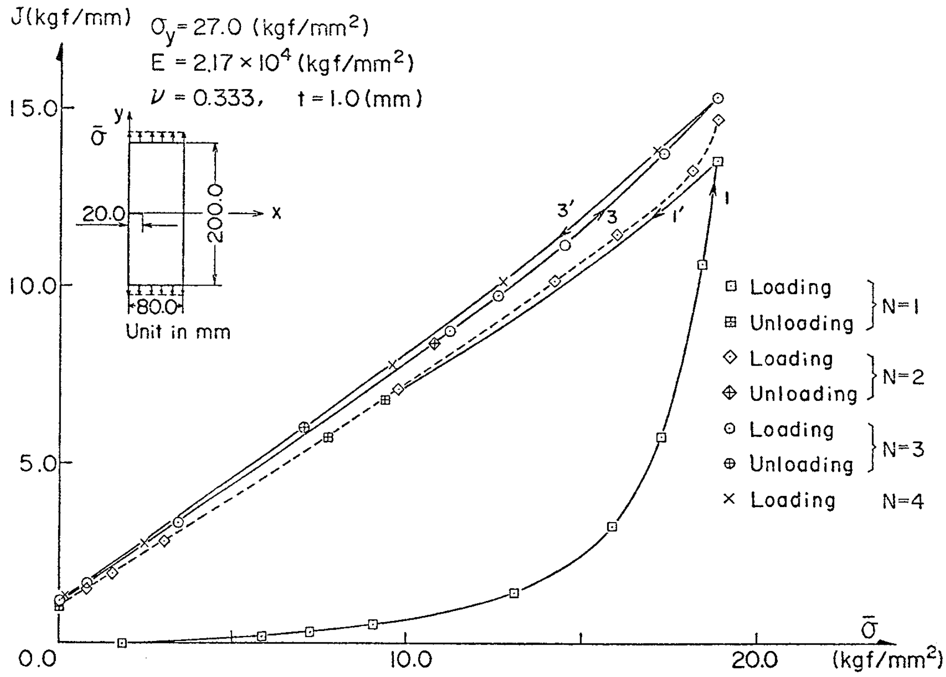

Fig. 15 Variation of J-Integral with equal pulsating end stress

亀裂の生長を追跡することは困難であるから，亀裂進展速度 da/dn を求める際近似的に1サイクルの荷重変動について FEM の1メッシュずつ亀裂が進展するとして各亀裂長さに対する ΔK を求め Paris の法則により da/dn を求めてこれを数値積分して，亀裂長さ a と繰返し負荷回数 N との関係を求めることが行われている。本報告では上記の理由により ΔK の代りに $\Delta J=J_{max}-J_{min}$ を用い Paris にならって亀裂の進展が

$$da/dn=c(\Delta J)^m \tag{7.1}$$

に従うものとして亀裂進展の予測を行った。この表現法に関しては既に Dowling ら[12]がその実験的検証を行っている。ここで本解析法の妥当性を検証するため中沢[4]の行った実験の試験片について以上の解析を行う。ここで (7.1) 式における材料定数 m として Dowling らが Pressure vessel steel について求めた実験値 $m=1.587$ と北川，越賀ら[14]の関係を用いて求めた $c=1.1405\times$

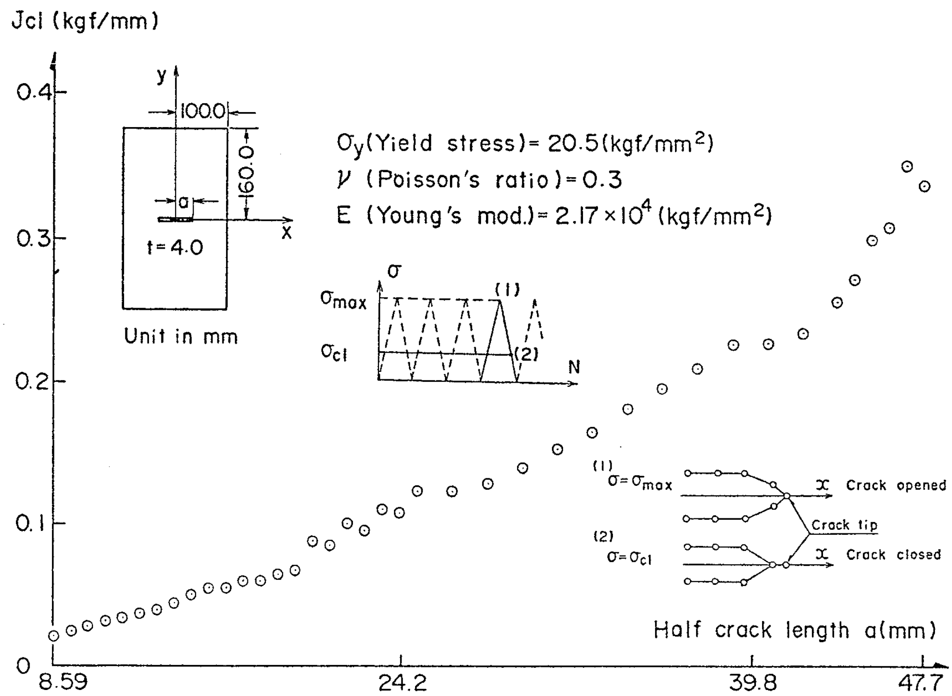

Fig. 16 Variation of J-Integral at crack closure with growing crack length

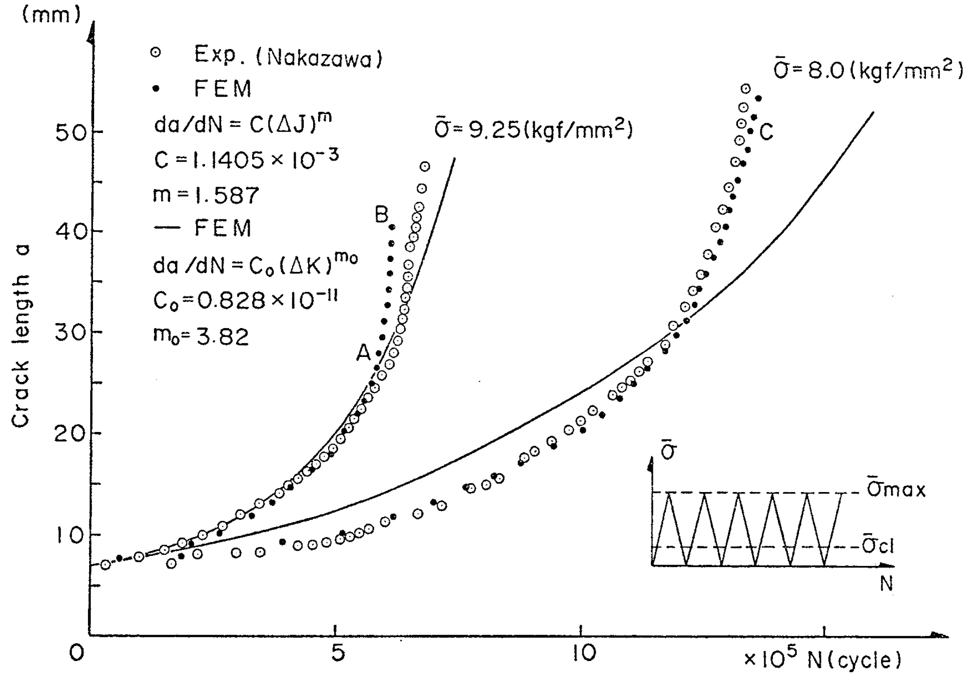

Fig. 17 Fatigue crack growth curves

10^{-3} を用いて Fig. 16 に示す試験片について最大端部応力 10.0 kgf/mm² の繰返し片振り荷重を加えたとき，Elber の crack closure[13] を考慮し，亀裂が閉じ始めたときのJ積分の値 J_{cl} の値と亀裂長さの関係を求めた。ただし J_{cl} は Fig. 16 中に示すように亀裂底における FEM メッシュの節点が初めて閉じたときの変位の状態における J の値を示す。

次に Fig. 17 における実線は FEM 解析結果を用いて従来の ΔK による Paris の法則によって求めた亀裂長さと繰返し回数との関係を示したものであり，上記の Dowling らの data より求めた c と m を用い (7.1) 式において $\Delta J = J_{max} - J_{cl}$ として亀裂長さ a とサイクル数Nとの関係を求めた結果である。これらを中沢ら[4] が行った実験結果と比較すると ΔJ を用いた本方法の方がより良い一致を示している。ただし前節に示したように J_{max} が負荷サイクル数 N と無関係になる範囲を，亀裂部分の鋼板の最小断面から求めた極限荷重の約 1/2 として，1サイクル毎に1メッシュずつ亀裂が進展するものとして，各々の亀裂長さに対して求めた ΔJ の各Nに対する値が妥当である限界であると考えると $\bar{\sigma}=9.25$ kgf/mm² に対して $a<8$ mm，$\bar{\sigma}=8.0$ kgf/mm² に対して $a<10$ mm となるが，実際は Fig. 17 に示す結果によるとそれより遙かに大きい亀裂長さまで，本方法による結果は中沢らの実験結果と良く一致している。

このことにより本方法による結果は，ΔK に基づく Paris の亀裂進展法則より，亀裂長さの大きい範囲にわたってより良い亀裂進展法則を表わしていることが分かる。

8 結　　語

初期亀裂を有する鋼板が単調引張り荷重を受けるときの亀裂の先端における亀裂の発生，または繰返し荷重による疲労亀裂の発生および進展などを予測するための criterion として，従来より応力拡大係数 K_I，亀裂開口変位 COD または J 積分などが用いられているが，亀裂先端付近に生ずる塑性域が拡大すると共に線形弾性解析に基づく応力拡大係数Kの使用は不適当となり，また繰返し負荷を受ける場合は亀裂進展挙動と COD の関係を明確に捉えることは容易でない。そこでJ積分の利用が考えられるが，その定義の性質上鋼材の亀裂付近において非比例負荷または除荷による弾塑性応力の変動を生ずる場合にはその物理的意味は不明確となる。本報告においてはまず著者の開発した任意の単調または繰返し変動荷重を受ける鋼材の応力～歪関係のシミュレーション・プログラムと塑性力学における降伏曲面理論に基づき，有限要素法による亀裂を有する鋼平板の弾塑性解析結果を用いて，単調または繰返し変動する荷重を受ける亀裂を有する鋼板についてJ積分の変化を求め，線形破壊力学による結果と比較した。即ち

(1) 単調増加荷重を受けるコンパクト試験片の例に関する J 積分とクリップゲージ変位との関係を求め Bleackley らがまとめた多くの計算例と実験結果を比較し，J積分の積分径路独立性も含めて，本計算の結果が良い結果を与えることを確かめた。

(2) 片側亀裂を有する鋼平板が単調引張りを受ける場合のJ積分と鋼板端部における全体変位および端部応

力との関係を求め線形破壊力学による結果が成り立つ範囲を明らかにした。

（3） 亀裂を有する鋼板が等振幅の片振り繰返し荷重を受ける場合について，亀裂長さを一定として行ったFEMによる弾塑性解析結果から，J積分値の変動が繰返し負荷回数に関係しない荷重の限界があることを示し，少なくともこの限界以下では $\Delta J=J_{\max}-J_{\min}$ は疲労亀裂性状の判定のパラメータとして使用し得ることを示した。

（4） 従来行われている亀裂進展に関するParisの式における亀裂進展速度 da/dn を線形弾性解析による応力拡大係数の変動 ΔK を用いて表現することは，小規模降伏を越える場合には不適当であることを示し，同様な表示をJ積分の変動 ΔJ を用いて行った。ここでDowlingらが行った実験結果の材料定数と著者らの行ったFEMによる弾塑性解析結果から求めたJ積分の変化 ΔJ を用いて

$$da/dn=c(\Delta J)^m$$

が成り立つものとして求めた亀裂長さと繰返し負荷回数との関係を，ΔK とParisの式を用いて求めた従来の方法による結果と共に，中沢らの実験結果と比較し，亀裂長さの進展の広い範囲にわたって本方法の結果が実験結果とより良く一致することを示した。

以上により，亀裂を有する鋼材などの延性材料の延性亀裂の発生または進展を予測するためには著者らの方法による弾塑性解析とJ積分による評価を用いることが妥当であることを示した。

なお本研究は文部省科学研究費補助金（一般B）の援助を受けて行われたものである。

参考文献

1) P. C. Paris and F. Erdogan: A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, Trans. ASME, 1963, Jour., Basic. Eng., 85, pp. 528～534.
2) J. Suhara et al.: The Stress-Strain Behaviors of Mild Steel under Complex Loading History, Rep. Inst. App. Mech. Kyushu Univ., Vol. XXII, No. 72, July, 1975.
3) 栖原二郎，宮武昌幸，梁井和博，道田亮二：任意の繰返し変動荷重を受ける鋼構造強度の弾塑性力学的解析，日本造船学会論文集，第150号（昭56.12月），pp. 398～412.
4) 中沢　一，小林英男，他：大形鋼板の疲れき裂進展挙動の破壊力学ならびにフラクトグラフィ的検討，日本機械学会論文集，40巻，338号（昭49.10月），p. 2712.
5) M. Shiratori and T. Miyoshi: Proc. Second. Int. Conf. Num. Meth. Frac. Mech., Pineridge Press, Swansea, UK, 1980, pp. 417～431.
6) M. H. Bleackley and A. R. Luxmoore: Comparison of Finite Element Solutions with Analytical and Experimental Date for Elastic-Plastic Cracked Problems, Int. Jour. Frac., Vol. 22, 1983, pp. 15～39.
7) R. J. Bucci, et al.: J Integral Estimation Procedures, ASTM, STP 514, 1972, pp. 40～69.
8) 岡村弘之：線形破壊力学入門，培風館.
9) D. G. H. Latzko: Post-Yield Fracture Mechanics, Applied Science Publishers LTD, 1979, pp. 23～210.
10) K. Tanaka: The Cyclic J-Integrals as a Criterion for Fatigue Crack Growth, Int. Jour. Frac., Vol. 22, 1983, pp. 91～104.
11) 栖原二郎，修行　稔：鋼構造部材の弾塑性応力および変形等に及ぼす荷重履歴の影響，西部造船会会報，第51号（昭51.3月），pp. 53～66.
12) N. E. Dowling and J. A. Begley: Fatigue Crack Growth During Gross Plasticity and the J-integral, ASTM, STP 590, 1976, pp. 82～103.
13) W. Elber: The Significance of Fatigue Crack Closure, Damage Tolerance in Aircraft Structures, ASTM, STP 486, 1970.
14) 川原正言：破壊力学とその設計への応用（その3），日本造船学会会報，第654号（昭58.12月），pp. 676～684.