

(昭和 60 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

自由表面上を航行する三次元物体に働く 流体力について (第 3 報)

正員 山崎 啓 市* 正員 藤野 正 隆**

Hydrodynamic Forces Acting on the Three Dimensional Body Advancing on the
Free Surface (3rd Report)by Keiichi Yamasaki, *Member* Masataka Fujino, *Member*

Summary

The previous papers, the first and the second reports, described a new method to calculate the hydrodynamic sway force and yaw moment acting on a ship with forward-speed oscillating on the free surface, and verified its validity by comparing the hydrodynamic derivatives predicted by the present method with the experimental ones in both cases of a flat plate and a Wigley model.

In this paper, the method is applied furthermore to predict the hydrodynamic derivatives of ships with realistic hull shapes, namely, a tanker ship, a Series 60 model, and a container ship. In case of a container ship, in particular, the hydrodynamic derivatives related to roll as well as sway and yaw were computed, and then compared with those obtained by model experiments. As the result, it is shown that the present method predicts very well the effects of ship's forward-speed, which have never been successfully explained by the so-called Strip Method, on the hydrodynamic derivatives.

In the previous papers, Sommerfeld's radiation condition, that is to say, $\partial\phi/\partial t + C\partial\phi/\partial l = 0$ was imposed at the open boundary which is placed at a distance sufficiently far from the ship in order to limit the fluid region to be treated in the numerical calculation. In this paper, however, the condition is replaced by a more relaxed condition $\partial\phi/\partial t + C\partial\phi/\partial l = E$ in which E denotes the numerical error of the left-hand term of the above-stated Sommerfeld's radiation condition.

By making use of the relaxed condition instead of the exact radiation condition, it becomes possible to make the waves, which are generated on the free surface and propagate toward the outside region, pass smoothly through the open boundary.

1 緒 言

自由表面上を動揺しつつ前進する船体に働く横流体力の推定法は様々なものが考え出されているが、最も広く使用されるのは、いわゆるストリップ法であろう。しかしながら、ストリップ法には多くの問題点があり、その中でも最も大きな比重を占めるのは前進速度の影響であろう。これは取りも直さず自由表面の三次元的な影響であり、ストリップ法ではその仮定、すなわち、物体固定の横断面内で流体現象を捕えるということから、この影響を満足に表現できないことによる。また、操縦性の分野で取扱われるような低周波数領域においては、揚力が

大きく効いているため、造波問題だけを扱う方法では不十分となる。このため、操縦微係数は実験から求めざるを得ないのが現状である。耐航性の分野においても、近年、前進速度影響が大きく取沙汰されたり、斜め追波中のように出会い周波数が小さく操縦性の分野に近い領域での船体運動が論じられるようになってきている。このような状況の中で、前進速度影響および周波数特性を正しく表現することができ、なおかつどの周波数領域においても使用が可能であるような実用的計算法の出現が望まれている。

現在まで多くの理論や計算法が提案されているが、全周波数領域において適用でき、前進速度影響を正確に現わすことのできるものは数多くはない。その中で、平板モデルではあるものの Chapman^{1),2)}の計算法は注目する

* 日本鋼管(株) (研究当時、東京大学工学部在学)

** 東京大学工学部

に値し、横流体力微係数の周波数特性、前進速度影響を極めて巧みに表わしている。

本研究では、Chapman と同様な定式化のもとで、彼とは異なる手法を用いて平板モデルと Wigley model の操縦微係数の計算を実行し、実験値との比較を通して本計算法の有効性を検討してきた³⁾。その結果、斜行時に受ける横流体力については、前進速度の影響を正しく表現できない範囲は存在するものの、周波数特性や、周波数特性に対する前進速度影響についてはほぼ満足のゆく結果が得られた。

本報では、実用船型への応用例として、タンカー船型、Series 60 model、コンテナ船型についての計算を実行し、実験値との比較により、横流体力におよぼす前進速度影響と周波数特性を計算で推定できるか否かを検討する。Series 60 model の実験結果は、van Leeuwen⁴⁾により実施されたものを用い、コンテナ船の実験は、日本造船研究協会の第131研究部会の報告書⁵⁾から借用した。また、コンテナ船については、sway と yaw に加えて roll に関する流体力係数も計算した。

前報までは、Sommerfeld の放射条件を Chan⁶⁾ の方法を用いて開境界に適用していたが、船体の横運動により生じた波が計算領域の外側へ必ずしもきれいな形で伝播していないことがわかった。この欠点を修正する方法として、位相速度を開境界の近傍の平均値で代用する方法⁷⁾があるが、本研究では新たな工夫を加えることにした。

2 船体に働く横流体力の計算

流体は理想流体で、非粘性、非回転、非圧縮とし、船体の横運動は十分小さいものとする。定式化は前報までと同様だが、roll の運動を付加する。

座標系は Fig.1 に示す。座標系 $O'-x'y'z'$ は船体の前進速度 U と同じ速度で直進し、原点は船首(F.P)にあり、 x' 軸は船体の後方に向かって正、 y' 軸は右舷側に

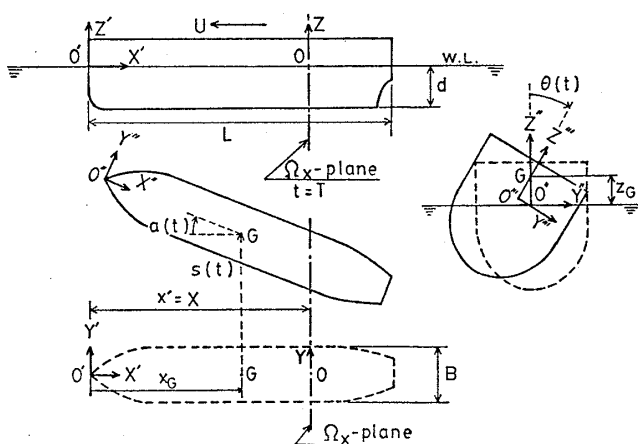


Fig.1 Coordinate systems

正、 z' 軸は鉛直上向きを正とする。この座標系で、ポテンシャル Φ は、

$$\Phi = Ux' + \varphi(x', y', z', t) \quad (1)$$

とおけ、船型は

$$H(x', y', z') = 0 \quad (2)$$

と書くことにする。

また、重心 G の水平横変位を $s(t)$ とし、回頭角 $a(t)$ は重心回り右回頭を正、横揺れ角 $\theta(t)$ は重心の回りで右舷に傾く向きを正と定義する。船首に原点を持つ船体固定座標系を $O'''-x'''y'''z'''$ とすると、座標系 $O'-x'y'z'$ との関係は、 $s(t), a(t), \theta(t)$ が十分小さいことを考慮すれば、

$$\left. \begin{aligned} x''' &= x' - y'a(t) \\ y''' &= y' - s(t) - (x_G - x')a(t) - (z' - z_G)\theta(t) \\ z''' &= z' + y'\theta(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。ただし、 x_G, z_G は重心 G の位置を示す。

このとき、物体表面条件式は、

$$\dot{x}''' \frac{\partial H}{\partial y'''} + \dot{y}''' \frac{\partial H}{\partial z'''} + \dot{z}''' \frac{\partial H}{\partial z'''} = 0 \quad \text{on} \quad H(x''', y''', z''') = 0 \quad (4)$$

と書ける。さらに、(1) 式と (3) 式を (4) 式に代入し、 $O'-x'y'z'$ 座標系で物体表面条件式を満たすことにし、微小項を除けば、

$$\begin{aligned} U \frac{\partial H}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \frac{\partial H}{\partial z'} \\ = \{ \dot{s}(t) - Ua(t) + (x_G - x')\dot{a}(t) \\ + (z' - z_G)\dot{\theta}(t) \} \frac{\partial H}{\partial y'} - y'\dot{\theta}(t) \frac{\partial H}{\partial z'} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ポテンシャル φ を、船体の直進により生じる定常な成分 φ_F と、横運動によって生じる成分 φ_L とに分離し、時刻 $t=T$ のとき、 $x'=X$ に位置し、 x' 軸と垂直な空間固定の平面 Ω_X 内の座標系 $O-yz$ で (5) 式を記述する。船型 H と、定常ポテンシャル φ_F は、この平面内での時刻 t の関数となり、(5) 式は次式のようになる。

$$[H_F] \quad \frac{\partial \varphi_F}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_F}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z} = - \frac{\partial H}{\partial t} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [H_L] \quad \frac{\partial \varphi_L}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_L}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z} \\ = [\dot{s}(t) - Ua(t) + \{x_G - X + U(T-t)\}\dot{a}(t) \\ + (z - z_G)\dot{\theta}(t)] \frac{\partial H}{\partial y} - y\dot{\theta}(t) \frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned} \quad (7)$$

on $H(t, y, z) = 0, T - X/U \leq t \leq T$ in Ω_X

ラプラスの式、自由表面の運動学的条件式、動力学的条件式は前報までと同様に次式で与えられる。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in fluid} \quad (8)$$

$$[K] \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{on } z=0 \quad (9)$$

$$[D] \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (10)$$

ここに、 ζ は自由表面の変位、 g は重力加速度である。

船体横運動が微小という仮定から、 φ_L に関する自由表面条件は、船体が直進するとき $z=0$ に生じる流線に沿って満されとする。直進時、 $z=0$ に生じる流線を求めるためには、厳密に言えば、(6), (8), (9), (10) 式を解かなければならない。だが、前報で示したように極端な高速航行でなければ、自由表面の条件として剛壁の条件を用いて得られる流線に沿って横運動問題の自由表面条件を満足させても船体を受ける横流体力にはほとんど影響がない。したがって、船体の直進問題に関する自由表面の条件式は

$$\frac{\partial \varphi_F}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (11)$$

とする。

直進時の $z=0$ における流線が決定されると、(7), (8), (9), (10) 式から船体が横運動をするときのポテンシャルを求めることができる。

時刻 $t=T$ のとき、 $x'=X$ に位置する空間固定平面 Ω_X 内にある船体断面に働く横力 $f_y(T, X)$ と roll モーメント $m(T, X)$ は、それぞれ流体の横方向の運動量、 G 点回りの角運動量の時間微分で求めることができる。すなわち、

$$f_y(T, X) = -\frac{d}{dt} \left[2\rho \int_K^F \varphi_L n_y ds \right]_{t=T} \quad (12)$$

$$m(T, X) = -\frac{d}{dt} \left[2\rho \int_K^F \varphi_L \{ (z-z_G) n_y - y n_z \} ds \right]_{t=T} \quad (13)$$

となり、点 K は船体のキール、点 F は船体と静水面との右舷側の交点を示し、積分は船体表面に沿う線積分を示す。また、 n_y, n_z は船体内向き単位法線の y 成分と z 成分を示している。ここで、流体の運動量、角運動量の計算において、流体内部の面積分を境界上の線積分に変換している。

このようにして、時刻 $t=T$ のとき、 $x'=0 \sim L$ (船長) に位置する複数の平面内にある船体断面に働く流体力 f_y, m を求め船長方向に積分すれば、横力 $Y(T)$ 、回頭モーメント $N(T)$ 、roll モーメント $M(T)$ が得られる。

$$Y(T) = \int_0^L f_y(T, x') dx' \quad (14)$$

$$N(T) = x_G Y(T) - \int_0^L f_y(T, x') x' dx' \quad (15)$$

$$M(T) = \int_0^L m(T, x') dx' \quad (16)$$

ただし、回頭モーメント $N(T)$ は重心回り右回頭を正とし、roll モーメント $M(T)$ は重心回り右舷傾斜の向きを正として、慣用の向きに合う。

3 開境界条件

実際の計算においては、無限遠まで広がる Ω_X 平面内で流体運動を解かず、船体から十分離れた場所に仮想の境界を置き、この境界によって区切られた有限な領域内での流体運動を境界要素法によって解く。したがって、船体の運動によって生じた波が仮想境界の外側へ伝播してゆくという、いわゆる開境界の条件が前述の条件のほかに必要となる。前報までは Sommerfeld の放射条件

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C \frac{\partial P}{\partial l} = 0 \quad (17)$$

を Chan の方法⁹⁾で満足させていた。ここに P はポテンシャルなどの変数を表わし、 C は波の位相速度、 l は開境界の外向き法線を示している。しかし、実際の数値計算において (17) 式を開境界上で適用すると、船体運動によって起こされた波は開境界を完全に透過せずに乱されることが判明したので、次のように修正した開境界条件を用いることにした。すなわち、(17) 式の左辺の値が常にゼロとなるべきであるという条件を緩めた条件式

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C \frac{\partial P}{\partial l} = E \quad (18)$$

を採用することにした。ここで右辺 E は本来 0 であるべき $\partial P / \partial t + C(\partial P / \partial l)$ の値の 0 からの誤差である。(18) 式の数値解法は次の通りである。まず Fig. 2 に示す $t-l$ 平面を考える。ここで τ は時間ステップを表わし、 $J=1, 2, 3, 4$ は領域内の点で開境界に近い方から数える。短い時間内で、位相速度 C と誤差 E は一定とし、点 II と点 III から C と E を求め、これを点 I に適用し次のステップでの $P(\tau+1, 1)$ の値を決定するのに用いる。すなわち、(18) 式を点 I について差分の形で書くと、

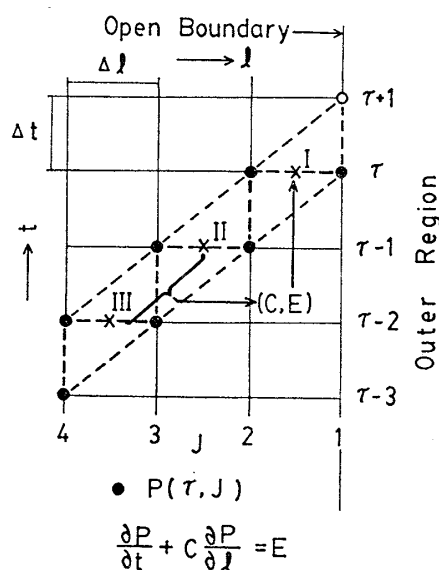


Fig. 2 Finite difference scheme of the open boundary

$$\frac{1}{2}\{P(\tau+1,1)-P(\tau,1)+P(\tau,2)-P(\tau-1,2)\} \\ +\alpha\{P(\tau,1)-P(\tau,2)\}=\varepsilon \\ \alpha=C\Delta t/\Delta l \quad \varepsilon=E\Delta t \quad (19)$$

となる。同様に点Ⅱと点Ⅲについても差分表示するが、その際 α, ε を α^*, ε^* と書くことにする。

$$\frac{1}{2}\{P(\tau,2)-P(\tau-1,2)+P(\tau-1,3)-P(\tau-2,3)\} \\ +\alpha^*\{P(\tau-1,2)-P(\tau-1,3)\}=\varepsilon^* \quad (20)$$

$$\frac{1}{2}\{P(\tau-1,3)-P(\tau-2,3)+P(\tau-2,4)-P(\tau-3,4)\} \\ +\alpha^*\{P(\tau-2,3)-P(\tau-2,4)\}=\varepsilon^* \quad (21)$$

(20), (21) 式中の P の値はすべて既知であるので、これらの2式から α^*, ε^* を決定できる。点Ⅰに関する (19) 式に適用する際、 α, ε と α^*, ε^* の間に次の関係を仮定する。

$$\alpha^* < 0 \quad \text{ならば} \quad \alpha = 0 \quad (22)$$

$$0 \leq \alpha^* \leq 1 \quad \text{ならば} \quad \alpha = \alpha^* \quad (23)$$

$$1 < \alpha^* \quad \text{ならば} \quad \alpha = 1 \quad (24)$$

(23) 式の場合、 $\varepsilon = \varepsilon^*$ として、(19) 式から $P(\tau+1,1)$ を求める。(22) 式 (または (24) 式) の場合 $\alpha^* = 0$ (または、 $\alpha^* = 1$) として (20), (21) 式に再び代入し、両式から求められた ε^* の平均値を ε とし、(19) 式から、 $P(\tau+1,1)$ を決める。ただし、

$$\left| \frac{\{P(\tau-1,2)-P(\tau-1,3)\}}{\{P(\tau-2,3)-P(\tau-2,4)\}} - 1 \right| < 10^{-6} \quad (25)$$

となるとき、(20), (21) 式は特異性を持った連立方程式と見なす。しかしながら、点Ⅱと点Ⅲには同一の波面上の点が続いているとみなせるので $\alpha^* = 1$ とする。また、 $P_{\max}, P_{\min}$ を全境界上における P の最大値、最小値としたとき、

$$\left. \begin{aligned} &|P(\tau-1,2)-P(\tau-1,3)| \\ &|P(\tau-2,3)-P(\tau-2,4)| \end{aligned} \right\} < |P_{\max}-P_{\min}| \times 10^{-6} \quad (26)$$

ならば、

$$\left. \begin{aligned} &P(\tau-1,2)-P(\tau-1,3) \\ &P(\tau-2,3)-P(\tau-2,4) \end{aligned} \right\} = 0 \quad (27)$$

として、(20) 式あるいは (21) 式から ε^* を求め他方から α^* を求める。

以上の方法を、喫水・全長比 ($=d/L$) が 0.1 の平板が $F_n=0.18$ で斜行する場合に適用した例を次に示す。この場合、 y 軸方向には喫水の4倍 ($y_{\max}=4d$ と記す) の領域をとった。Fig. 3 に $y=0 \sim 4d$ に至る自由表面の変位が示されている。本計算例は Chapman [文献 1], Fig. 8] の計算例とよく対応し、波は開境界上で乱れずに透過していることがわかる。Fig. 4 は、 $y=2d \sim 4d$ に

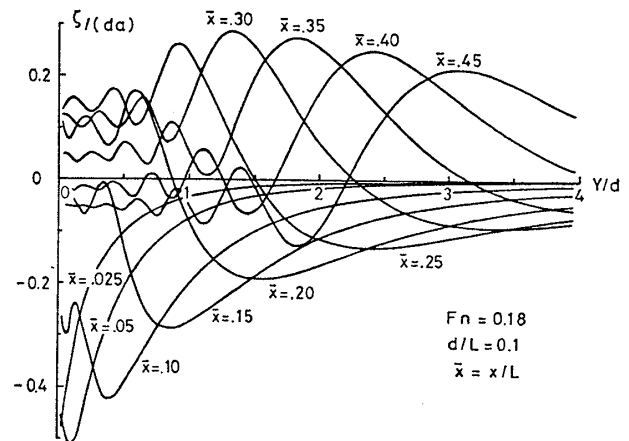


Fig. 3 Free-surface profiles in various transverse planes (flat plate, $d/L=0.1$, $F_n=0.18$)

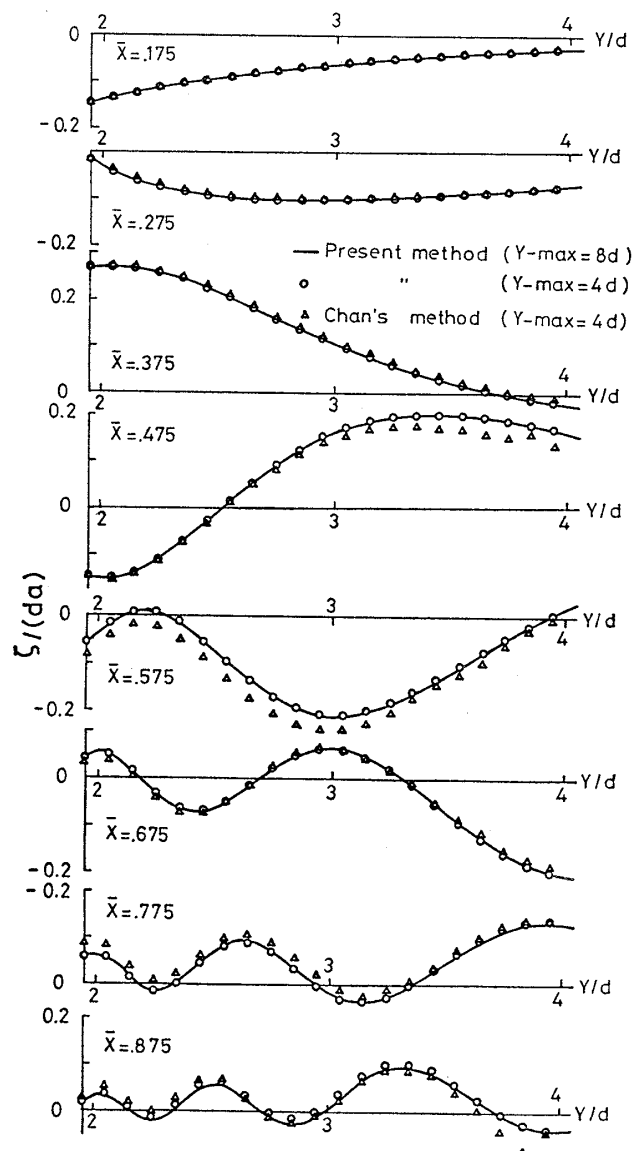
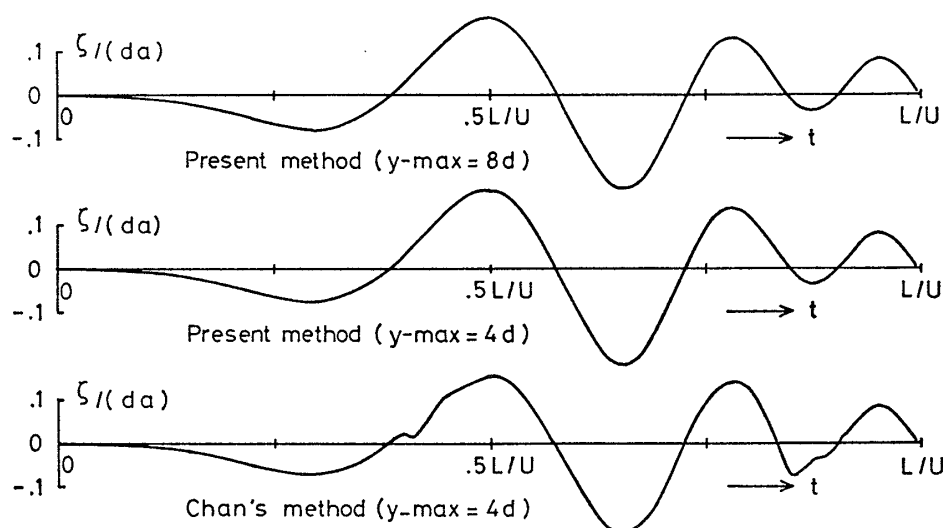


Fig. 4 Comparison of free-surface profiles calculated by the present method and Chan's method (flat plate, $d/L=0.1$, $F_n=0.18$)

Fig. 5 Free-surface elevations on the open boundary (flat plate, $d/L=0.1$, $F_n=0.18$)

おける自由表面の変位を示す。実線は $y_{\max}=8d$ とし、○印は $y_{\max}=4d$ とした計算結果で、△印は $y_{\max}=4d$ の場合に Chan の方法を使って解いた結果である。実線と○印はよく一致しているが、Chan の方法を用いた計算結果は、実線から離れる箇所が目立ち、開境界付近でも乱れが見られる。また Fig. 5 には、 $y=4d$ における自由表面の変位を、時間を横軸にとって示す。平板では長手方向に形状が変わらないので、この時間軸は、平板の先端からの距離に対応する。本方法による計算値は $y_{\max}=4d, 8d$ とともによく一致し、 $y_{\max}=4d$ の波形には乱れない。しかし、同じ $y_{\max}=4d$ の場合の Chan の方法による計算波形は大きく乱れる箇所が存在し波が計算領域の外側へなめらかに伝播していないことを表わしている。

3 実用船型に働く横流体力の計算

実船模型として、タンカー船型、Series 60 model ($C_b=0.7$)、コンテナ船型を選び計算を行い、実験値と比較した。各模型の主要目を Table 1 に示す。計算領域は、横方向に喫水の 8 倍 ($y_{\max}=8d$)、鉛直下方向に喫

水の 6 倍 ($z_{\min}=-6d$) をとり、時間間隔は、 $\Delta t=(L/U)/400$ とした。ただし、計算は F.P から A.P の間で実施し、F.P より前方、A.P より後方の船体は無視している。したがって、船体を長手方向に 400 等分する 401 個の船体断面形状を知る必要があり、オフセットなどに与えられていない断面形状はスプライン補間を用いて推定した。便宜上、計算に用いた船型では、船体後部に Fig. 6 で示した斜線部分の dead wood が付加されている。この dead wood (平板) のキール線上の長さを ΔL とおくと、

タンカー船型	$\Delta L=0\% L_{pp}$
Series 60 model	$\Delta L \pm 1.25\% L_{pp}$

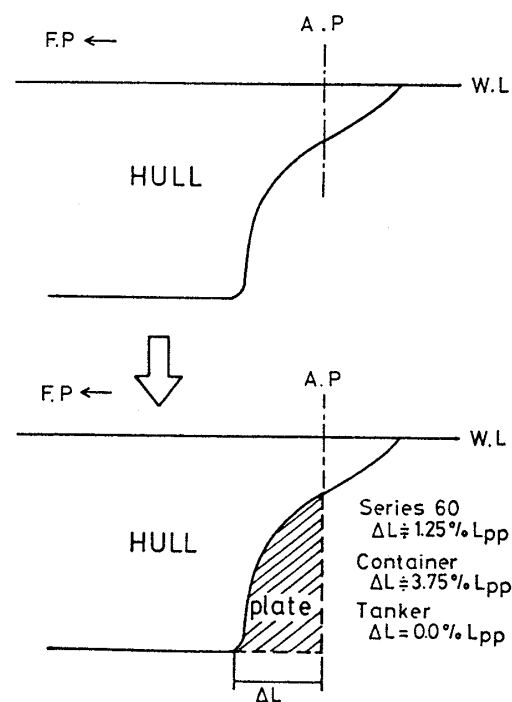


Fig. 6 Hull shape behind the stern used in calculation

Table 1 Principal particulars of ship models

	Tanker	Series 60	Container ship
L_{pp} (m)	2.800	2.258	3.000
B (m)	0.1664	0.323	0.4354
d (m)	0.5091	0.129	0.1628
V (m^3)	0.1945	0.0675	0.1216
C_b	0.82	0.70	0.5717
L_{cb} from Σ (m)	-0.07	-0.011	0.0425
KG (m)	—	—	0.1632
Longitudinal gyradius K_t	0.243 L_{pp}	0.25 L_{pp}	0.239 L_{pp}
Transverse gyradius K_t	—	—	0.3284 B

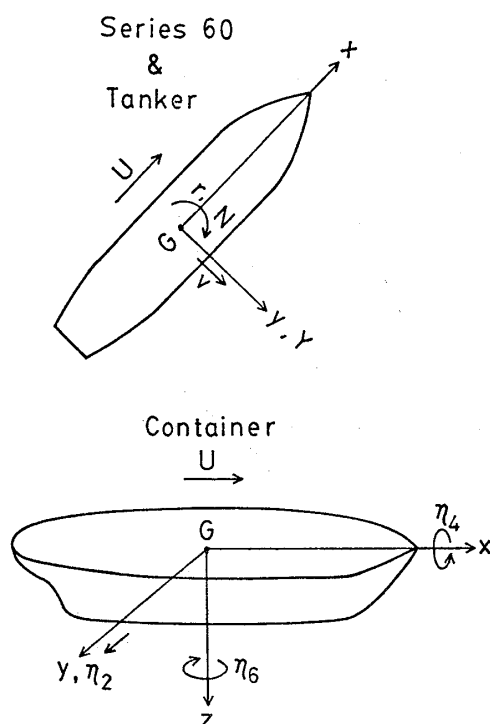


Fig. 7 Coordinate systems for Series 60, a tanker, and a container ship

コンテナ船型 $\Delta L \div 3.75\% L_{pp}$

である。すなわちタンカー船型では、実験に使用した模型にも A. P に達する dead wood が存在する。この程度ならば、平板が横流体力全体に与える影響は小さいと考えられる。また計算を実行する空間固定の平面の個数は 41 とする。

タンカー船型と Series 60 model の運動と流体力は Fig. 7 の上図のように定義し, sway と yaw の運動方程式は以下に示すものを使う。

$$m(\dot{v} + Ur) = Y_v \dot{v} + Y_v v + Y_r \dot{r} + (Y_r r - m_x U)r + Y_E \quad (28)$$

$$I_{zz} \dot{r} = N_r \dot{r} + N_r r + N_v \dot{v} + N_v v + N_E \quad (29)$$

ただし, m, I_{zz} は船体の質量と慣性モーメントであり, Y_E, N_E は強制外力とする。操縦微係数は各々次の無次元化を施す。

$$\left. \begin{aligned} Y'_v &= Y_v / \left(\frac{1}{2} \rho L^2 d \right) & Y'_v &= Y_v / \left(\frac{1}{2} \rho L d U \right) \\ N'_v &= N_v / \left(\frac{1}{2} \rho L^3 d \right) & N'_v &= N_v / \left(\frac{1}{2} \rho L^2 d U \right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} Y'_r &= Y_r / \left(\frac{1}{2} \rho L^3 d \right) & Y'_r &= Y_r / \left(\frac{1}{2} \rho L^2 d U \right) \\ N'_r &= N_r / \left(\frac{1}{2} \rho L^4 d \right) & N'_r &= N_r / \left(\frac{1}{2} \rho L^3 d U \right) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

コンテナ船型の座標系を Fig. 7 の下図に示す。sway, roll, yaw の運動方程式は次の通りとする。

$$A_{22} \ddot{\eta}_2 + B_{22} \dot{\eta}_2 + A_{24} \ddot{\eta}_4 + B_{24} \dot{\eta}_4 + A_{26} \ddot{\eta}_6 + B_{26} \dot{\eta}_6 = F_2$$

(32)

$$A_{44} \ddot{\eta}_4 + B_{44} \dot{\eta}_4 + C_{44} \eta_4 + A_{42} \ddot{\eta}_2 + B_{42} \dot{\eta}_2 + A_{46} \ddot{\eta}_6 + B_{46} \dot{\eta}_6 = F_4 \quad (33)$$

$$A_{66} \ddot{\eta}_6 + B_{66} \dot{\eta}_6 + A_{64} \ddot{\eta}_4 + B_{64} \dot{\eta}_4 + A_{62} \ddot{\eta}_2 + B_{62} \dot{\eta}_2 = F_6 \quad (34)$$

ここで、右辺は外力または外力のモーメントである。

また流体力係数 A_{ij}, B_{ij} ($i, j=2, 4, 6$) の無次元化は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{22} &= \frac{A_{22}}{\rho V}, & \bar{A}_{42} &= \frac{A_{42}}{\rho V B}, & \bar{A}_{62} &= \frac{A_{62}}{\rho V L} \\ \bar{B}_{22} &= \frac{B_{22}}{\rho V} \sqrt{\frac{B}{2g}}, & \bar{B}_{42} &= \frac{B_{42}}{\rho V B} \sqrt{\frac{B}{2g}}, & \bar{B}_{62} &= \frac{B_{62}}{\rho V L} \sqrt{\frac{B}{2g}} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{66} &= \frac{A_{66}}{\rho V L^2}, & \bar{A}_{26} &= \frac{A_{26}}{\rho V L}, & \bar{A}_{46} &= \frac{A_{46}}{\rho V L B} \\ \bar{B}_{66} &= \frac{B_{66}}{\rho V L^2} \sqrt{\frac{B}{2g}}, & \bar{B}_{26} &= \frac{B_{26}}{\rho V L} \sqrt{\frac{B}{2g}}, & \bar{B}_{46} &= \frac{B_{46}}{\rho V L B} \sqrt{\frac{B}{2g}} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{44} &= \frac{A_{44}}{\rho V B^2}, & \bar{A}_{64} &= \frac{A_{64}}{\rho V L B}, & \bar{A}_{24} &= \frac{A_{24}}{\rho V B} \\ \bar{B}_{44} &= \frac{B_{44}}{\rho V B^2} \sqrt{\frac{B}{2g}}, & \bar{B}_{64} &= \frac{B_{64}}{\rho V L B} \sqrt{\frac{B}{2g}}, & \bar{B}_{24} &= \frac{B_{24}}{\rho V B} \sqrt{\frac{B}{2g}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

3.1 タンカー船型

Fig. 8 にタンカー船型および、同じ喫水・船長比 ($d/L = 0.0594$) を持つ平板が斜行時に受ける横力の分布 $C_Y(x)$ を示す。この係数は前報までと同様に

$$C_Y(x) = \int_0^x f_y(T, x') dx' \quad (38)$$

で定義し、船首から $x' = x$ までに働く横力を表わす。船速は $F_n = 0.105$ である。平板の前半部は自由表面の影響で横力が増減しているが、中央付近から一定になっている。タンカー船型では、 $x/L = 0.1$ 付近で横力が増大し、 $x/L = 0.7$ 付近まで小さな増減を繰り返しながらもほぼ一定な値をとり、さらに後方では減少している。タンカー船型では平板に比べて後方まで自由表面の影響に

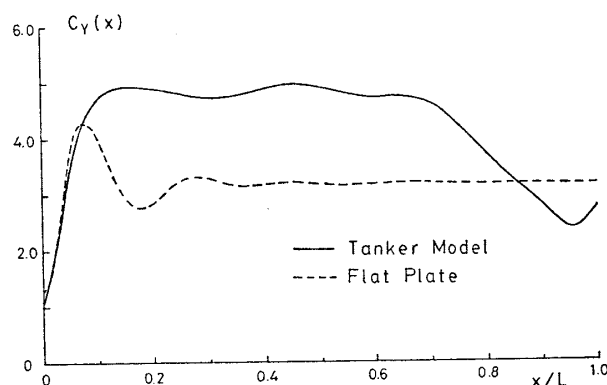


Fig. 8 Side force distributions of a tanker ship and a flat plate in oblique towing ($F_n = 0.105$, $d/L = 0.0594$)

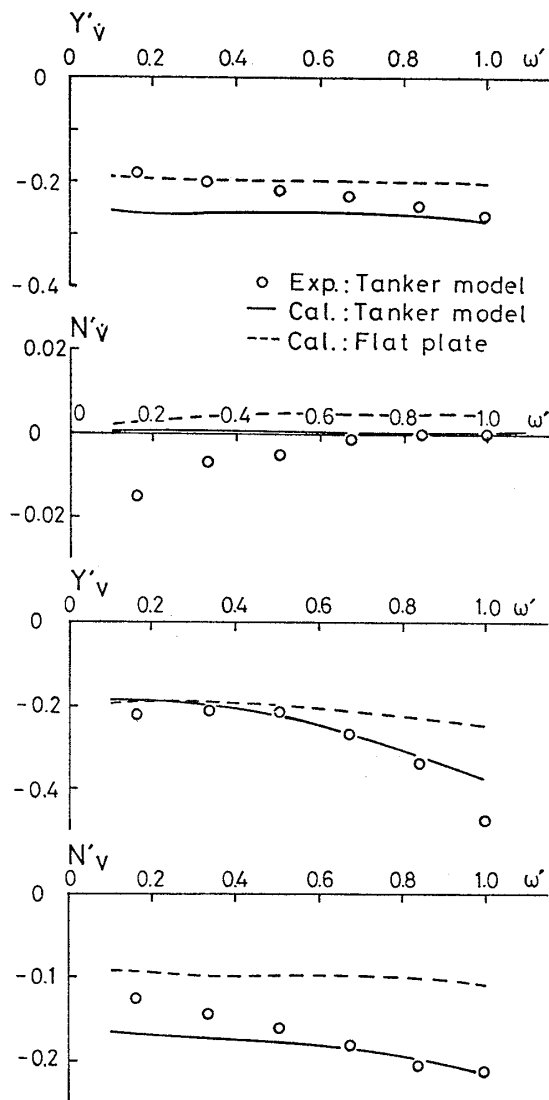


Fig. 9 Stability derivatives of a tanker ship in pure swaying motion ($F_n=0.105$)

よる横力のうねりが残るのは、船幅の影響だと考えられる。これについては、Fig. 11の平板と箱船の計算例を比較すれば容易に理解できる。このように実用船型になると、横力は自由表面影響と船体形状の影響が複雑に作用する。

Fig. 9, Fig. 10にタンカー船型の操縦微係数の計算値を実験値とともに示す。横軸は無次元円周波数 $\omega'=\omega\sqrt{L/g}$ で、船速は $F_n=0.105$ である。同図には平板の計算値も併記してある。pure swayから得られる微係数((30)式)の計算は、(7)式で、 $s(t)=y_0\sin\omega t$, $a(t)=0$, $\theta(t)=0$ とおき、pure yawから得られる微係数((31)式)は、 $a(t)=a_0\sin\omega t$, $\dot{s}(t)=Ua(t)$, $\theta(t)=0$ とおけば求めることができる。ここに、 y_0, a_0 は強制動揺のswayの振幅、yawの角振幅で、 ω は強制円周波数である。加速度(または角加速度)に比例する微係数は、速度(または角速度)がゼロとなる時刻を T とすると得られる。また速度(または角速度)に比例する微係数は、加速度

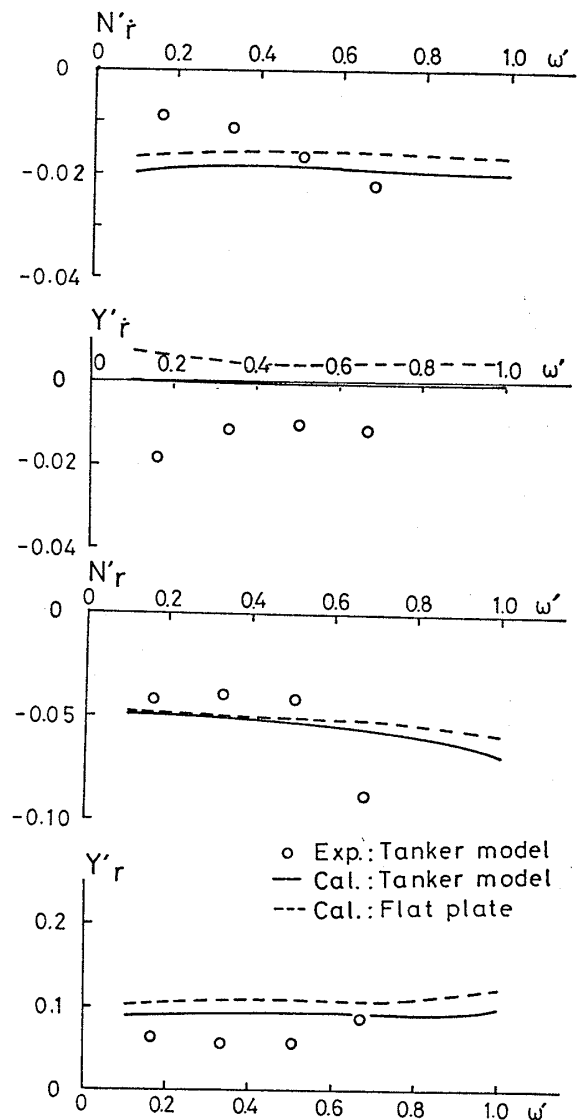


Fig. 10 Stability derivatives of a tanker ship in pure yawing motion ($F_n=0.105$)

(または角加速度)がゼロとなる時刻を T とすればよい。pure swayから得られる微係数の計算値と実験値は比較的合っているが、 $Y'_{\dot{v}}, N'_{\dot{v}}, N'_{\dot{v}}$ は $\omega'<0.4$ で一致度が悪くなっている。pure yawから出る微係数は、 N'_r, Y'_r の $\omega'<0.5$ では割合に良いが、 $N'_{\dot{r}}, Y'_{\dot{r}}$ は合っていない。平板の計算値とタンカー船型の計算値を比較すると、swayに関する微係数(Fig. 9)には差があるが、yawに関する微係数(Fig. 10)については、低周波数域ということもあって大きな差はない。

3.2 Series 60 model

Fig. 11に斜行時の横力分布を示す。船速は $F_n=0.2, 0.3$ であり、平板と箱船の横力分布も併記した。平板の喫水と船長はSeries 60 modelと等しく、箱船はさらに排水量が等しくなるように船幅を定めている。箱船は平板に比べて受ける横力は大きくなり、自由表面の影響による横力のうねりも後方にずれ、うねりの波長は長く振

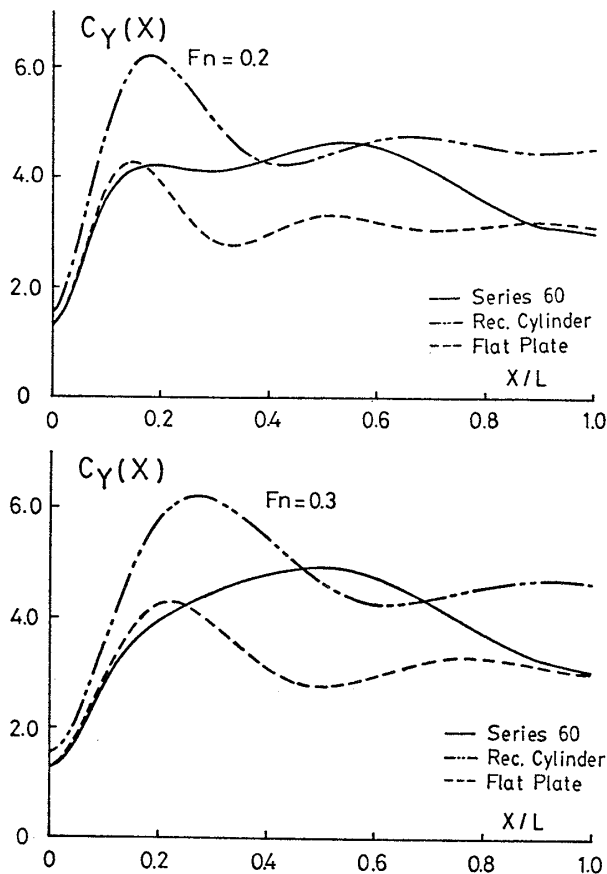


Fig. 11 Side force distributions of Series 60 model, a rectangular cylinder ($B/d=1.75$, $d/L=0.0571$), and a flat plate ($d/L=0.0571$) in oblique towing

幅も大きい。Series 60 model の計算値を見ると、 $F_n=0.2$ では二つのピークがある。前方は自由表面影響によるもので、中央付近のものは船体形状の厚みによるものである。 $F_n=0.3$ になると、自由表面影響によるピークが後方に移るため船体形状によるものと重なっている。

なお、本模型の操縦微係数の計算には、基本解 $C_F(x';\sigma)$ の線形重ね合わせを用いた。(Appendix 参照) $C_F(x';\sigma)$ とは、 $x'=\sigma$ に位置する断面から後方のみ単位横速度を与えたとき、 $x'\geq\sigma$ の範囲の船体が受ける横力の係数である。求めた $C_F(x';\sigma)$ を若干個の σ について Fig. 12 に示すが、実際には 101 個の船体断面について求めている。Fig. 13~Fig. 20 に van Leeuwen の実験結果と比較して本計算法による結果を示した。図にはストリップ法による計算値⁸⁾、本計算法による平板と箱船の計算値も載せた。また、図中の S. 60, R. C., F. P はそれぞれ、Series 60, 箱船, 平板を意味する。

ストリップ法の計算結果を見ると、 Y'_v , Y'_v , Y'_r は比較的よく推定できている。しかし、 Y'_v , Y'_r の低周波域では実験との相異が目立つ。ほかの微係数については ω に伴う微係数の変化の傾向すら把めていない。平板の計

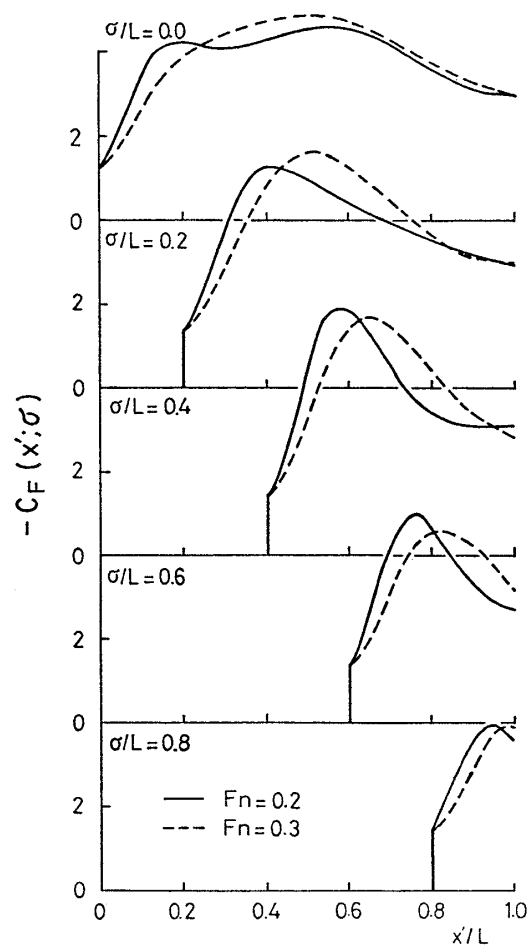


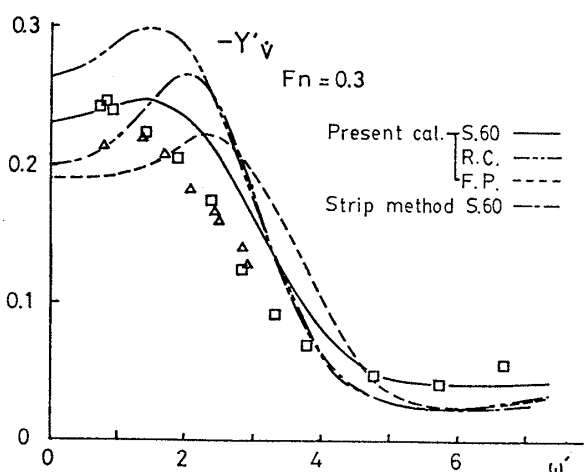
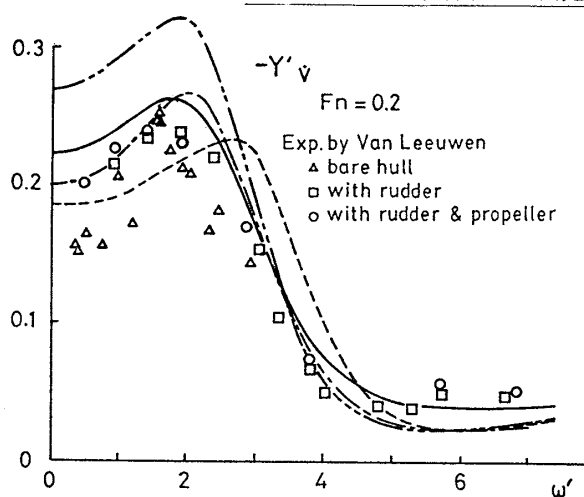
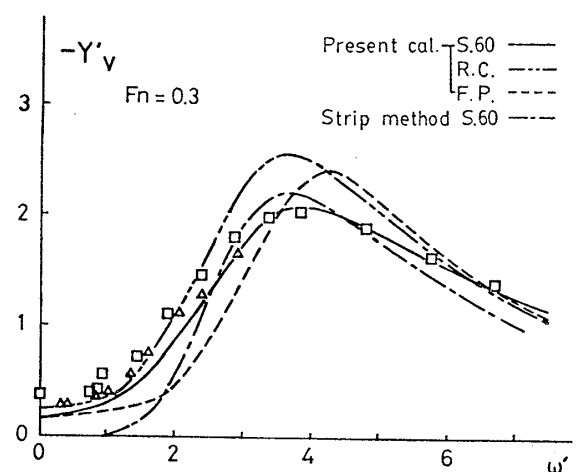
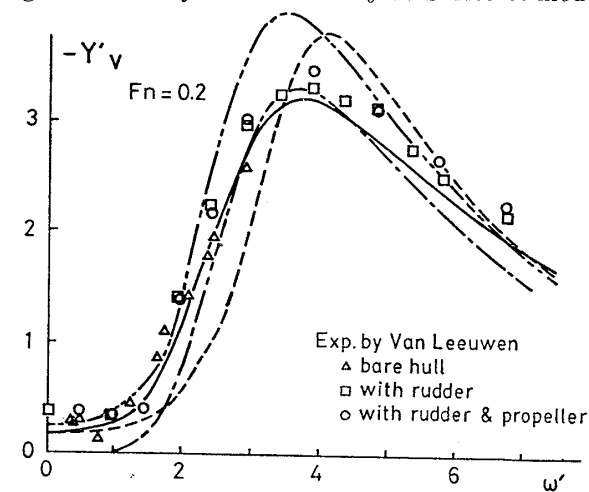
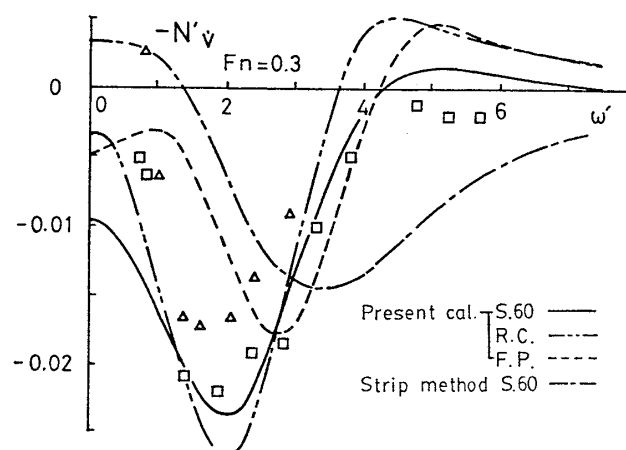
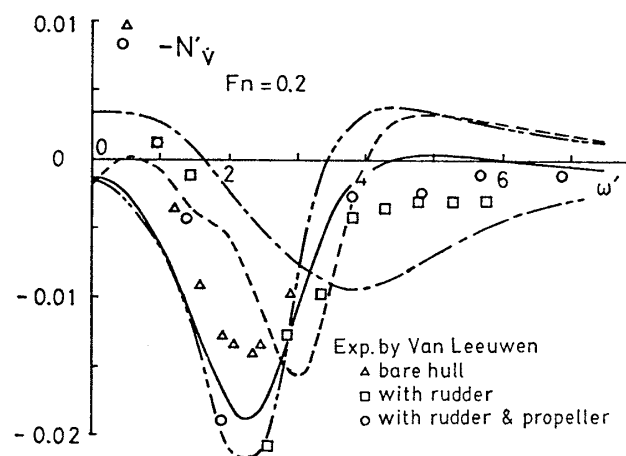
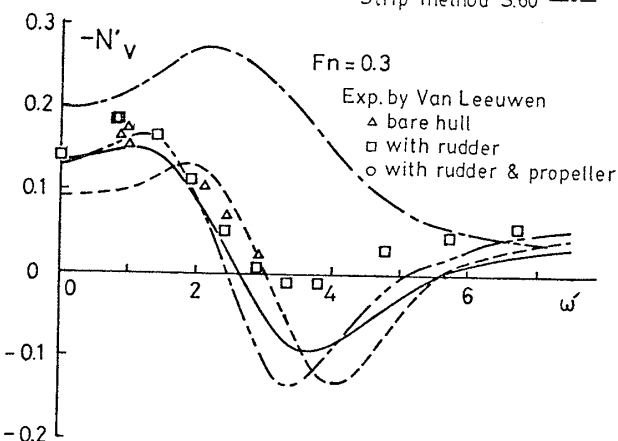
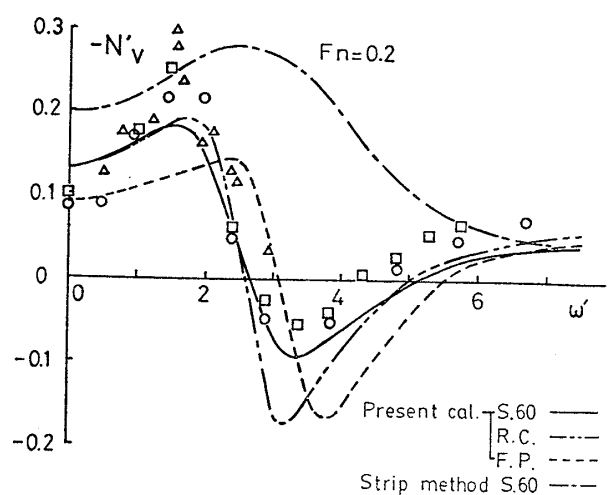
Fig. 12 Side force distributions $C_F(x';\sigma)$ of Series 60 model

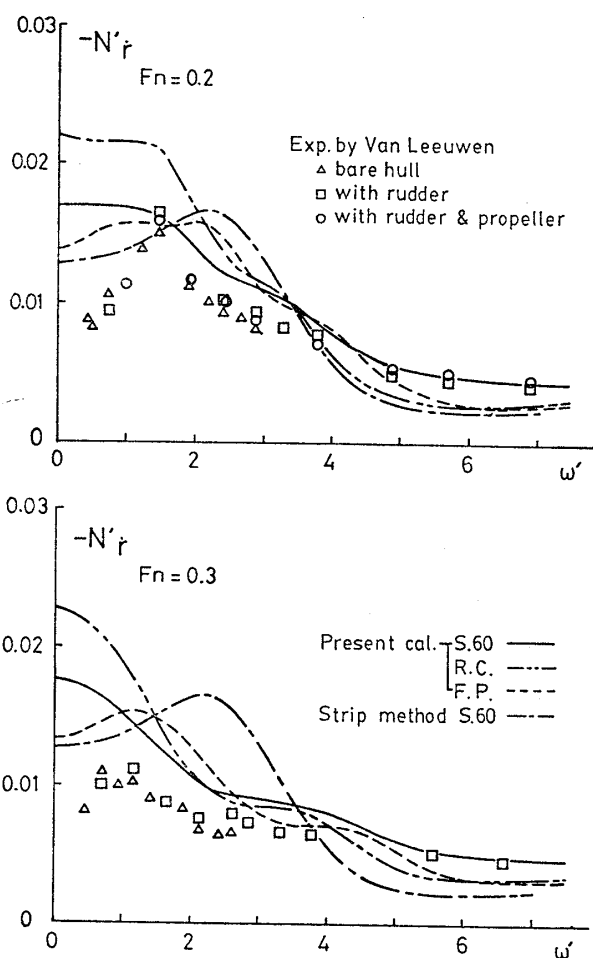
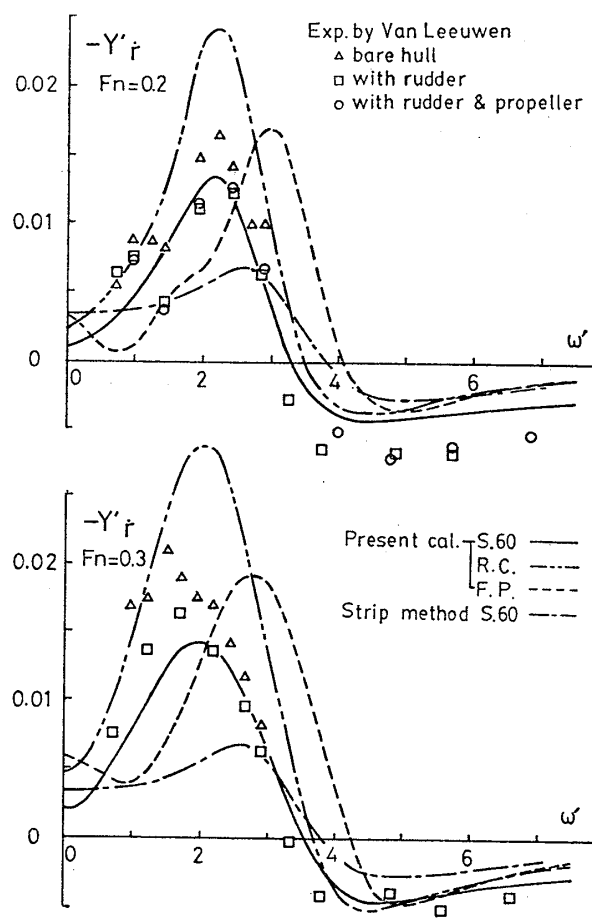
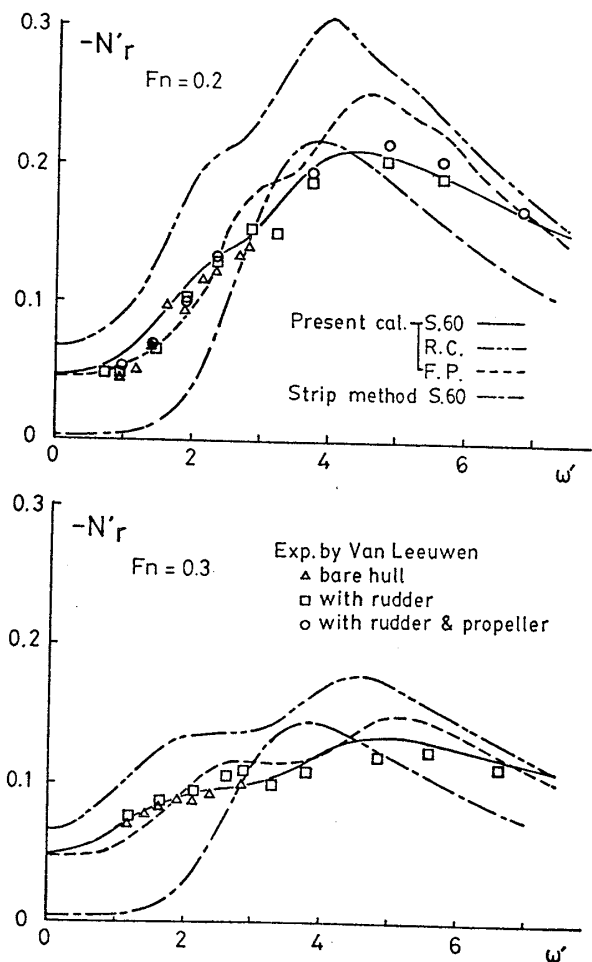
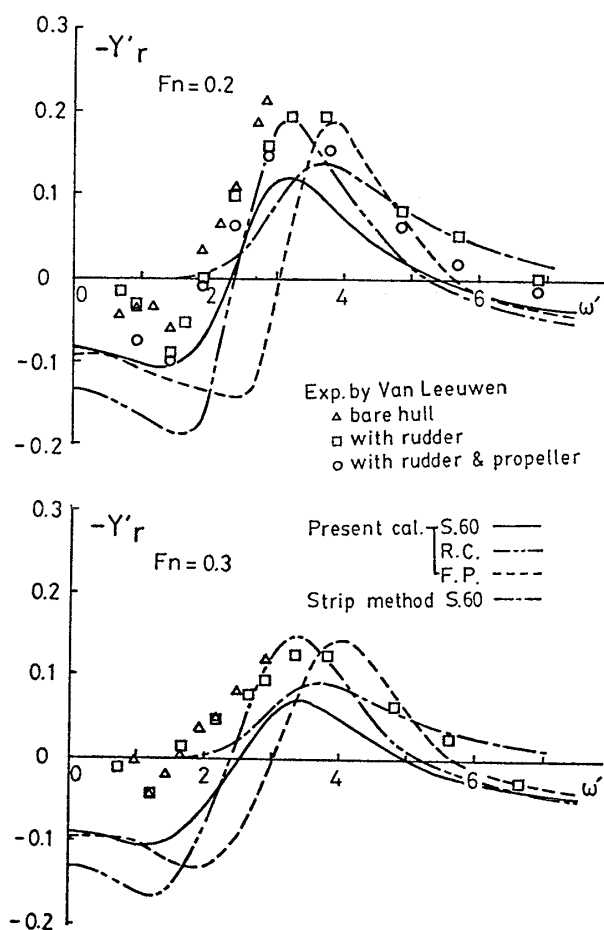
算値は、Series 60 model の実験結果の定性的な傾向をかなり正しく表わしているが、実験値と比べて周波数に伴う変化の様子に差があり、定量的一致度も悪い。箱船の計算値をみると、平板に見られた周波数の変化に伴う微係数の変化の差異はほとんどなくなり定性的傾向は良くなったが、定量的な一致度は改善されず、平板の計算値より悪くなっている。Series 60 model に対する本計算法による微係数の周波数特性は箱船とほとんど変わらず、定量的にも実験値と良く一致している。さらに、各操縦微係数に対する前進速度の影響も正しく表わしている。

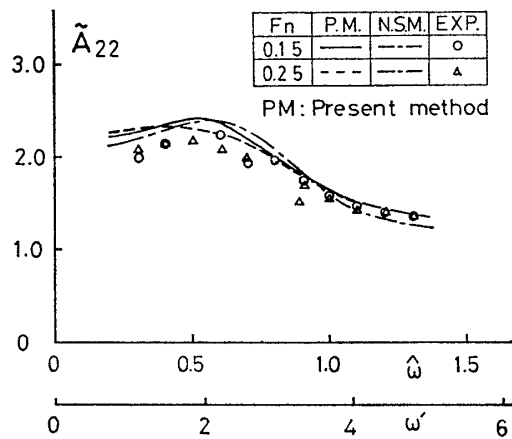
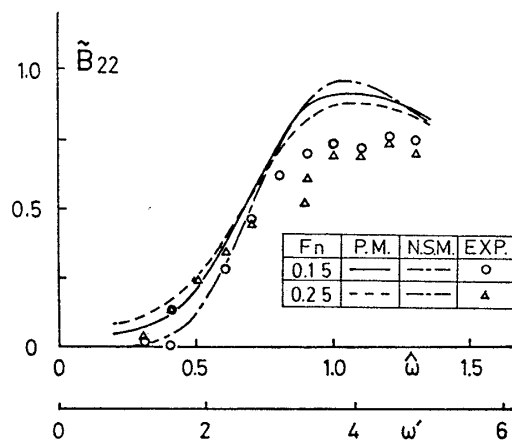
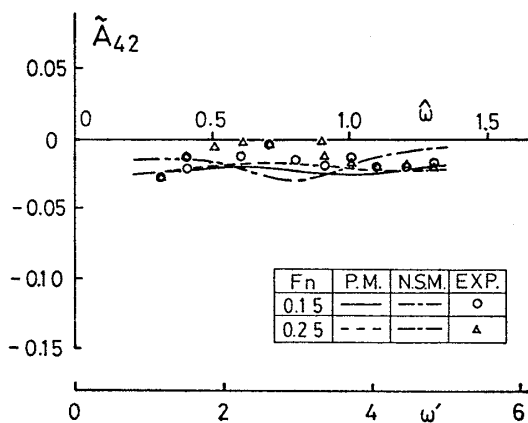
3.3 コンテナ船型

(35) 式の流体力係数を求めるためには、(7) 式において $s(t)=\bar{\eta}_2 \sin \omega t$, $a(t)=0$, $\theta(t)=0$ とし、(36) 式の係数は、 $s(t)=0$, $a(t)=\bar{\eta}_6 \sin \omega t$, $\theta(t)=0$, (37) 式の係数は、 $s(t)=0$, $a(t)=0$, $\theta(t)=\bar{\eta}_4 \sin \omega t$ とすれば求められる。ここで、 $\bar{\eta}_i$ は強制振幅を表わす。

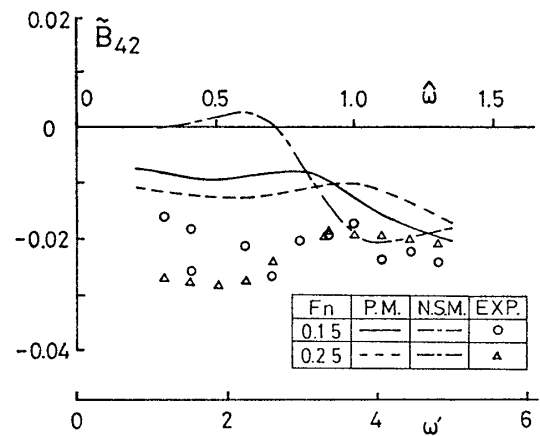
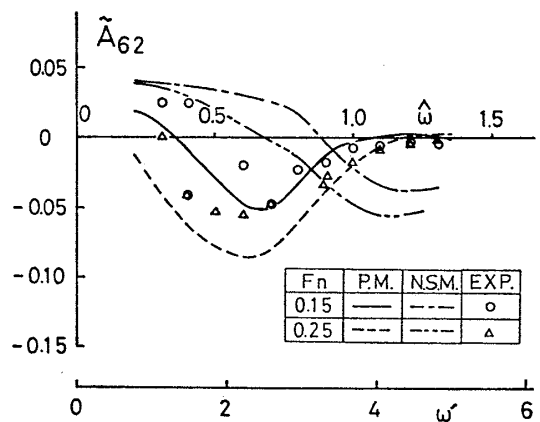
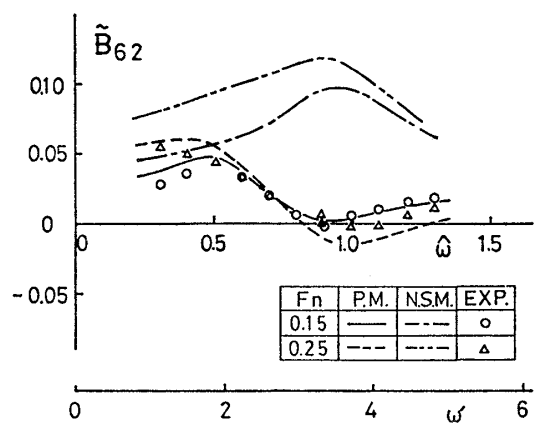
コンテナ船の実験結果と NSM による計算結果は、文献5) から、 $F_n=0.15$, 0.25 のものを引用した。本計算法による計算値とともに Fig. 21~Fig. 38 に示す。


Fig.13 Stability derivative Y'_v of Series 60 model

Fig.14 Stability derivative Y'_v of Series 60 model

Fig.15 Stability derivative N'_v of Series 60 model

Fig.16 Stability derivative N'_v of Series 60 model

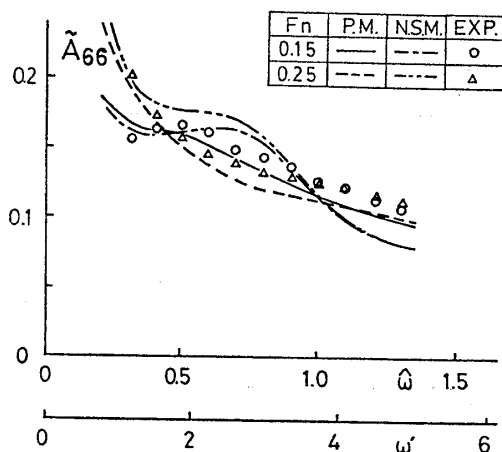
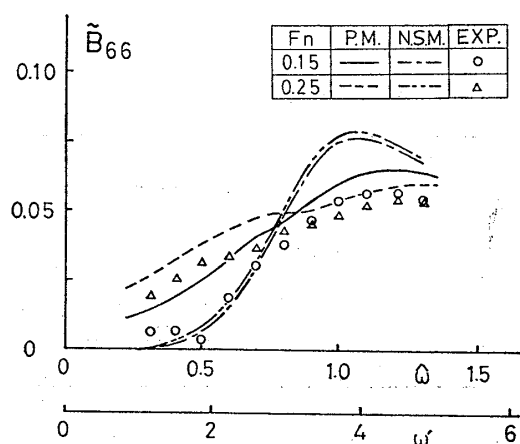
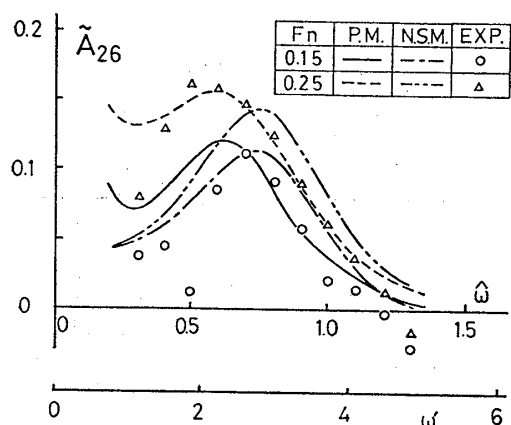
Fig. 17 Stability derivative N'_r of Series 60 modelFig. 19 Stability derivative Y'_r of Series 60 modelFig. 18 Stability derivative N'_r of Series 60 modelFig. 20 Stability derivative Y'_r of Series 60 model

Fig. 21 $\tilde{A}_{22}$, Virtual mass of sway (Container ship)Fig. 22 $\tilde{B}_{22}$, Damping coeff. of sway (Container ship)Fig. 23 $\tilde{A}_{42}$, Coupling moment coeff. of sway into roll (Container ship)

実験値は $\tilde{A}_{46}$, $\tilde{B}_{46}$, $\tilde{A}_{44}$ を除けば、程度の差はあるものの前進速度の影響がでていて、NSM の計算値とは定量的にも異なる。ただし、前進速度がない場合には NSM も良好な結果を与えている⁵⁾。NSM の計算結果と実験値の傾向が著しく異なる係数を列挙すると、 $\tilde{A}_{42}$, $\tilde{B}_{42}$, $\tilde{A}_{62}$, $\tilde{B}_{62}$, $\tilde{A}_{46}$, $\tilde{B}_{46}$, $\tilde{A}_{44}$, $\tilde{A}_{24}$, $\tilde{A}_{64}$ である。そのほか

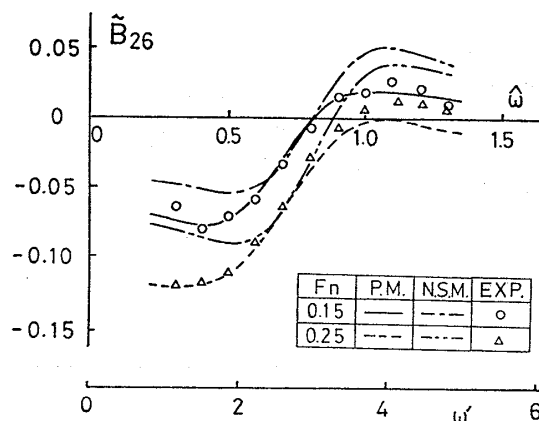
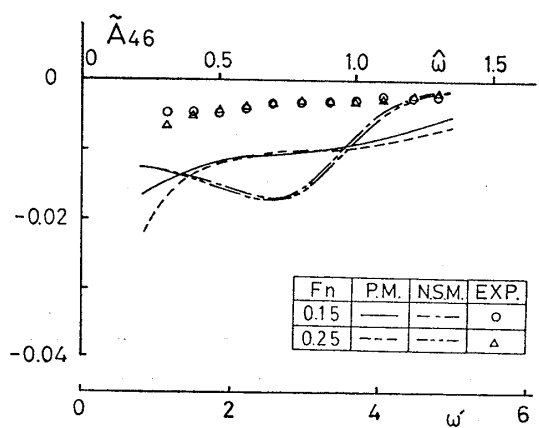
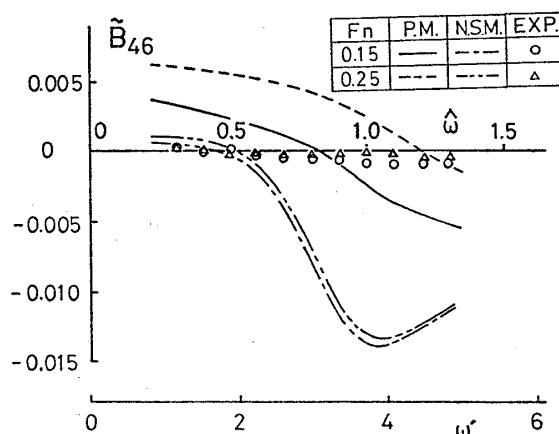
Fig. 24 $\tilde{B}_{42}$, Coupling moment coeff. of sway into roll (Container ship)Fig. 25 $\tilde{A}_{62}$, Coupling moment coeff. of sway into yaw (Container ship)Fig. 26 $\tilde{B}_{62}$, Coupling moment coeff. of sway into yaw (Container ship)

の係数も細かく見ると両者の一致度はあまりよくない。一方、本計算法による結果をみると、上述の係数はもちろん、NSM でもほぼよく推定できていると思われる係数、たとえば $\tilde{A}_{22}$, $\tilde{B}_{22}$, $\tilde{A}_{66}$, $\tilde{B}_{66}$, $\tilde{B}_{26}$ についても、その前進速度影響、周波数特性がさらに良好に推定されていることがわかる。しかしながら、roll に関する係数には、定量的な推定精度が不十分な係数がある。また低周

Fig. 27 $\tilde{A}_{66}$, Virtual mass moment of inertia of yaw (Container ship)Fig. 28 $\tilde{B}_{66}$, Damping moment coeff. of yaw (Container ship)Fig. 29 $\tilde{A}_{26}$, Coupling force coeff. of yaw into sway (Container ship)

波領域での $\tilde{A}_{24}$ と $\tilde{B}_{46}$ の推定値は定性的にも良くない。

Troesch⁹⁾ は、本論文と同一のコンテナ船型の連成項の一部について、前進速度の影響に関する計算を行い STFM¹⁰⁾による計算結果と比較している。彼の計算による $\tilde{A}_{62}$, $\tilde{B}_{62}$, $\tilde{A}_{26}$ は STFM による値よりも実験値に近

Fig. 30 $\tilde{B}_{26}$, Coupling force coeff. of yaw into sway (Container ship)Fig. 31 $\tilde{A}_{46}$, Coupling moment coeff. of yaw into roll (Container ship)Fig. 32 $\tilde{B}_{46}$, Coupling moment coeff. of yaw into roll (Container ship)

くなっているが、 $\tilde{B}_{26}$ は STFM より悪くなり、roll に関する係数の定量的、定性的一致度はほとんど改善されていない。本方法と比較すると、 $\tilde{A}_{62}$ は同程度、 $\tilde{B}_{62}$, $\tilde{B}_{26}$, $\tilde{A}_{46}$, $\tilde{B}_{46}$ は本計算例の方が良い。また、 $\tilde{A}_{26}$ の低周波域では Troesch の計算値の方がいいが、高周波側になると本法の方が良くなっている。 $\tilde{B}_{46}$ はどちらともいえない。

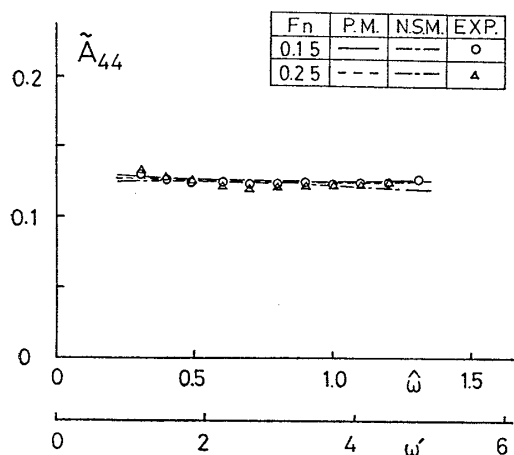


Fig. 33 $\tilde{A}_{44}$, Virtual mass moment of inertia of roll (Container ship)

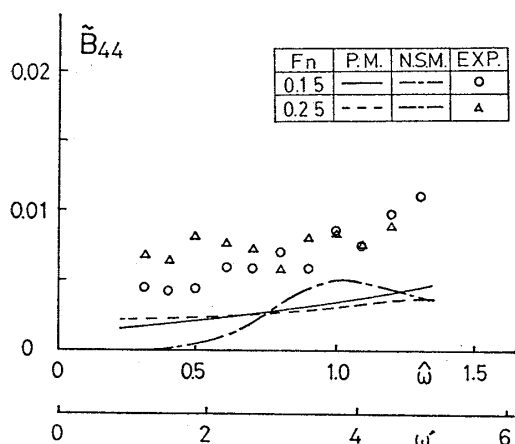


Fig. 34 $\tilde{B}_{44}$, Damping moment coeff. of roll (Container ship)

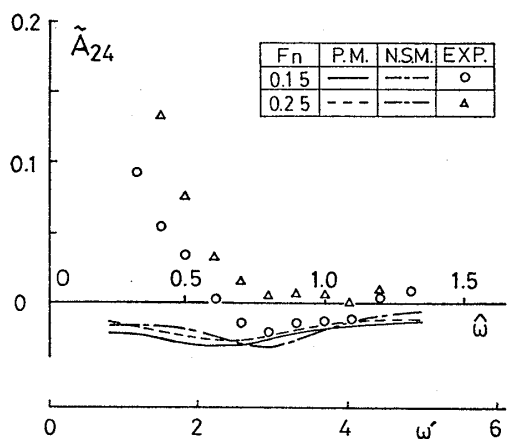


Fig. 35 $\tilde{A}_{24}$, Coupling force coeff. of roll into sway (Container ship)

3.4 計算時間

実用船型の横流体力の計算に必要な時間について簡単に触れておく。計算機は HITAC S-810 を使用した。計算時間は SPU であり、従来の CPU にほぼ相当する。計算の領域、時間間隔、計算を実行する空間固定の平面の数などは本章の初めに述べた通りである。境界上の要

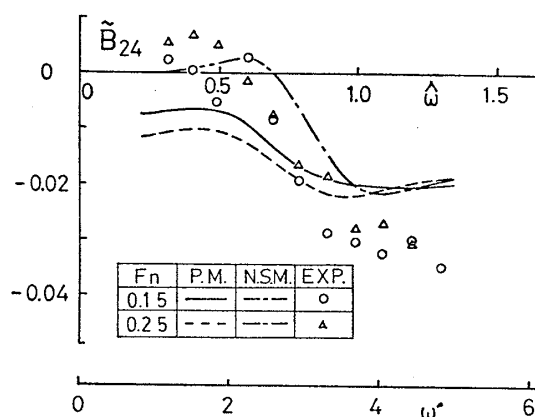


Fig. 36 $\tilde{B}_{24}$, Coupling force coeff. of roll into sway (Container ship)

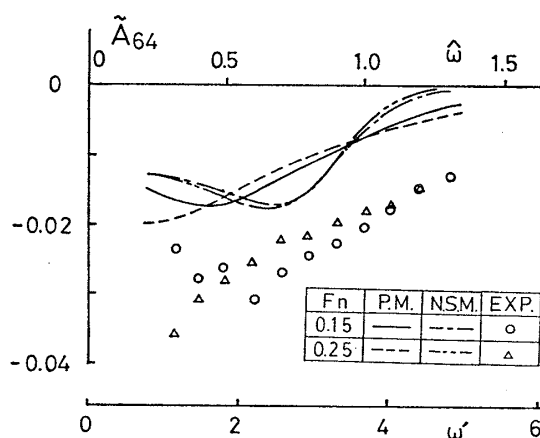


Fig. 37 $\tilde{A}_{64}$, Coupling moment coeff. of roll into yaw (Container ship)

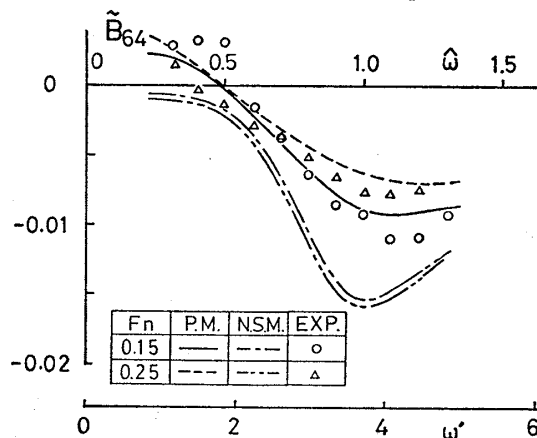


Fig. 38 $\tilde{B}_{64}$, Coupling moment coeff. of roll into yaw (Container ship)

素数は各ステップで異なっているが最高 190 としている。

直進時の $z=0$ における流線の計算には、

SPU $\approx$ 1 分 15 秒

必要で、斜行時の横流体力の計算は

SPU $\approx$ 2 分 12 秒

かかる。動揺問題では、一度に 4 種類の運動について計算し、それぞれ横力、回頭モーメント、roll モーメント

の3個の流体力が得られるが、その際の計算時間は、

$$\text{SPU} \doteq 3 \text{ 分 } 19 \text{ 秒}$$

である。また、線形重ね合わせを用いて微係数を求めるために必要な $C_F(x'; \sigma)$ を101個の船体断面について計算するには、

$$\text{SPU} \doteq 3 \text{ 分 } 01 \text{ 秒}$$

かかる。

5 考 察

低速度、低周波数の領域では、本計算値と実験値との一致度はやや悪い。これは、渦の流出に伴う流体力が本計算法では十分表現しきれていないためであると考えられる。しかし、広い周波数領域における流体力係数の周波数特性や前進速度影響などは本計算法によってよく表現されているといってよい。一方、ストリップ法では前進速度の影響を正しく評価できないことは衆知の通りである。ストリップ法のように船体と共に前進する二次元平面内の中だけで流体現象を取り扱う方法では、前進速度影響のような三次元効果は考慮できないのであろう。したがって、NSM では前進速度の有無にかかわらず成り立つはずの、

$$\tilde{A}_{24} = \tilde{A}_{42}, \quad \tilde{B}_{24} = \tilde{B}_{42}$$

の関係は、実験値では成り立っていない。

本計算では、Series 60 model, コンテナ船型の後部に仮想の平板を取りつけ船体形状の分割に便宜を図った。Series 60 model の場合、 $\Delta L \doteq 1.25\% L_{pp}$ と僅かなため、影響はほとんどないようだが、コンテナ船型の場合、 $\Delta L \doteq 3.75\% L_{pp}$ と Series 60 model に比べ若干長くなっている。このため、低周波数域での計算値に対する仮想平板の影響が心配される。この件については、さらに正確な形状での計算を実行しなければならないと考えている。

6 結 言

以上に述べた研究から次に示す結論が得られた。

- 1) 本計算法は従来の計算法(ストリップ法)に比較し、流体力微係数に対する前進速度影響を良く表現でき、計算値と実験値の定量的な一致度も良好である。
- 2) Sommerfeld の放射条件を、数値計算上の誤差を許すような緩やかな条件にかえることによって物体の運動によって作られた波は計算領域の外側へなめらかに伝播するようになった。
- 3) 本計算法は比較的計算時間が短く実用船型の流体力微係数を計算する実用的な計算法として有効である。

本論文での計算では、便宜上船体後部に平板を付加し

ている。その影響はそれほど大きいとは考えられないが、今後はさらに正確な船体形状について計算を実行し検証してゆかねばならない。

最後に、本研究を進めるにあたり御協力いただいた東京大学工学部船舶工学科運動性能研究室の方々、模型を御提供くださった同抵抗水槽研究室の方々に深く感謝いたします。なお、本研究の計算には東京大学大型計算機センターの HITAC S-810, M-280 H を使用したことを付記します。また本研究は昭和 59 年度科学研究費の一般研究の一環として実施されたものです。

参 考 文 献

- 1) Chapman, R. B.: Free Surface Effects for Yawed Surface-Piercing Plates, Journal of Ship Research, Vol. 20, No. 30 (1976).
- 2) Chapman, R. B.: Numerical Solution for Hydrodynamic Forces on a Surface-Piercing Plate Oscillating in Yaw and Sway, Proceedings of 1st. International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics (1975).
- 3) 山崎啓市他：自由表面上を航行する三次元物体に働く流体力について(第1報, 第2報), 日本造船学会論文集, 第154号, 第156号(1983, 1984).
- 4) van Leeuwen, G.: The Lateral Damping and Added Mass of a Horizontally-Oscillating Shipmodel, International Shipbuilding Progress, Vol. 12, No. 126 (1956).
- 5) 強制動揺法による横運動方程式の流体力係数の計測, 日本造船研究協会, 第131研究部会報告書, No. 213 (1976).
- 6) Chan, R. K. -C.: Finite Difference Simulation of the Planer Motion of a Ship, Proceedings of 2nd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics (1977).
- 7) Doi, Y. and Tsukamoto, K.: Numerical Analysis of Two-Dimensional Stern Wave by Finite-Difference Method (1st. report), 日本造船学会論文集, 第154号(1983).
- 8) 杉田泰雄：船体横運動の流体力について, 東京大学修士論文(1977).
- 9) Troesch, A. W.: Sway, Roll, and Yaw Motion Coefficients Based on a Forward-Speed Slender-Body Theory-Part 2, Journal of Ship Research, Vol. 25, No. 1 (1981).
- 10) Salvesen, N. et al; Ship motions and Sea Loads, SNAME, Vol. 78 (1970).

Appendix 線形重ね合わせによる操縦微係数の計算法

本章では、Chapman²⁾が平板モデルで示したような、斜行時の横力分布の重ね合わせによって操縦微係数を求める方法を、一般船型に適用する方法について述べる。座標系はFig. 1のようにとる。ポテンシャル Φ は、座

標系 $O'-x'y'z'$ を用いて,

$$\Phi = Ux' + \varphi_F(x', y', z') + \varphi_L(x', y', z', t) \quad (\text{A-1})$$

と書け, φ_F は船体が直進するときの定常ポテンシャル, φ_L は横運動によって生じるポテンシャルを示す。船体形状を,

$$H(x', y', z') = 0 \quad (\text{A-2})$$

とすると, 物体表面条件は,

$$U \frac{\partial H}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi_F}{\partial y'} \frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_F}{\partial z'} \frac{\partial H}{\partial z'} = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{\partial \varphi_L}{\partial y'} \frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_L}{\partial z'} \frac{\partial H}{\partial z'} = V_B(x', t) \frac{\partial H}{\partial y'} \quad (\text{A-4})$$

$$\text{on } H(x', y', z') = 0$$

ただし, $V_B(x', t)$ は船体横運動を表わし,

$$V_B(x', t) = \dot{s}(t) - Ua(t) + (x_G - x')\dot{a}(t) \quad (\text{A-5})$$

となる。さらに, V_B は次のようにも書ける。

$$V_B(x', t) = V_B\left(0, t - \frac{x'}{U}\right)S(x'; 0) + \int_0^{x'} V_B\left(\sigma, t - \frac{x' - \sigma}{U}\right)S(x'; \sigma) d\sigma \quad (\text{A-6})$$

ただし, $V_B = dV_B/d\sigma$ であり, $S(x'; \sigma)$ は次に示すようなステップ函数を表わす。

$$S(x'; \sigma) = \begin{cases} 1 & x' \geq \sigma \\ 0 & x' < \sigma \end{cases} \quad (\text{A-7})$$

ステップ函数の引数を従来の形式で書かないのは, 後述べるように σ と x' の位置関係が重要となるためである。(A-6) 式を (A-4) 式に代入すると,

$$\frac{\partial \varphi_L}{\partial y'} \frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_L}{\partial z'} \frac{\partial H}{\partial z'} = V_B\left(0, t - \frac{x'}{U}\right)S(x'; 0) \frac{\partial H}{\partial y'} + \int_0^{x'} V_B\left(\sigma, t - \frac{x' - \sigma}{U}\right)S(x'; \sigma) d\sigma \frac{\partial H}{\partial y'} \quad (\text{A-8})$$

となり, ポテンシャル $\varphi_L(x', y', z', t)$ は,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial H}{\partial z'} = S(x'; \sigma) \frac{\partial H}{\partial y'} \quad (\text{A-9})$$

$$0 \leq \sigma \leq x', \text{ on } H(x', y', z') = 0$$

を満たすポテンシャル $f(x', y', z'; \sigma)$ を重ね合わせることで表わせられる。ポテンシャル f が, ラプラスの式, 自由表面条件式を満足する必要があるのはいうまでもない。(A-9) 式は, 船首から $x' = \sigma$ から後方に単位の横速度を与えたとき, $x' = x'(\geq \sigma)$ で満たさねばならない物体表面条件であり, このとき, $x' = x'$ より前方の船体に働く横力の係数を,

$$C_F(x'; \sigma) = -2\rho U \int_K^F f(x', y', z'; \sigma) n_y ds \left/ \left(\frac{1}{2} \rho U D^2 \right) \right. \quad (\text{A-10})$$

とおく。

ポテンシャル $f(x', y', z'; \sigma)$ は, 本論文の計算法で容易に求められ, それらを重ね合わせることで φ_L が表わされる。すなわち,

$$\varphi_L(x', y', z', t) = V_B\left(0, t - \frac{x'}{U}\right)f(x', y', z'; 0) + \int_0^{x'} V_B\left(\sigma, t - \frac{x' - \sigma}{U}\right)f(x', y', z'; \sigma) d\sigma$$

$$(\text{A-11})$$

であり, したがって, $x' = x'$ より前方の船体に加わる横力 $Y(x', t)$ はベルヌーイの式から得られ,

$$V_B(x', t) = b(x')e^{i\omega t} \quad (\text{A-12})$$

を考慮すると,

$$Y(x', t) = -2\rho U \int_K^F \varphi_L(x', y', z', t) n_y ds - 2i\omega\rho \int_0^{x'} dx' \int_K^F \varphi_L(x', y', z', t) n_y ds \quad (\text{A-13})$$

となり, 重心回りの回頭モーメント $N(x', t)$ は,

$$N(x', t) = x_G Y(x', t) - \int_0^{x'} \frac{dY(x', t)}{dx'} x' dx' \quad (\text{A-14})$$

で与えられる。

pure sway のとき, $b(x') = i\omega y_0$ であり, (A-10) 式, (A-11) 式, (A-12) 式を (A-13) 式に代入すると, 無次元化された横力 $\bar{Y}_S(x', \omega)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{Y}_S(x', \omega) &= Y_S(x', t) \left/ \left(\frac{1}{2} \rho U D^2 \omega y_0 e^{i\omega t} \right) \right. \\ &= iC_F(x'; 0)e^{-i\omega x'/U} \\ &\quad - \frac{\omega}{U} \int_0^{x'} C_F(x'; \sigma)e^{-i\omega(x-\sigma)/U} d\sigma \\ &\quad - \frac{\omega}{U} \int_0^{x'} C_F(\sigma; 0)e^{-i\omega\sigma/U} d\sigma \\ &\quad - i\frac{\omega^2}{U^2} \int_0^{x'} d\sigma \int_0^\sigma C_F(\sigma; \beta)e^{-i\omega(\sigma-\beta)/U} d\beta \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

回頭モーメントは (A-14) 式からわかる。

pure yaw のとき, $b(x') = i\omega(x_G - x')a_0$ であり, 上と同様に横力 $\bar{Y}_Y(x', \omega)$ は,

$$\begin{aligned} \bar{Y}_Y(x', \omega) &= Y_Y(x', t) \left/ \left(\frac{1}{2} \rho U D^2 L \omega a_0 e^{i\omega t} \right) \right. \\ &= \frac{x_G}{L} \bar{Y}_S(x', \omega) + \frac{1}{L} \left[\frac{\omega}{U} \int_0^{x'} \sigma C_F(x'; \sigma)e^{-i\omega(x-\sigma)/U} d\sigma \right. \\ &\quad - i \int_0^{x'} C_F(x'; \sigma)e^{-i\omega(x-\sigma)/U} d\sigma \\ &\quad + i\frac{\omega^2}{U^2} \int_0^{x'} d\sigma \int_0^\sigma C_F(\sigma; \beta)e^{-i\omega(\sigma-\beta)/U} \beta d\beta \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{U} \int_0^{x'} d\sigma \int_0^\sigma C_F(\sigma; \beta)e^{-i\omega(\sigma-\beta)/U} d\beta \right] \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

で与えられ, (A-14) 式から回頭モーメントがわかる。

このようにして得られる横力と回頭モーメントから操縦微係数, $Y'_v, Y'_v, N'_v, N'_v, N'_r, N'_r, Y'_r, Y'_r$ が直ちに求められる。

平板や一様断面を持つ柱体など, 長手軸方向に形状が変化しない場合は,

$$f(x', y', z'; \sigma) = f(x' - \sigma, y', z', 0) \quad (\text{A-17})$$

が成り立つので, Chapman が示しているように横力の計算式は非常に簡単な形で表わされる。