（昭和60年5月　日本造船学会春季講演会において講演）

楔形物体の水面衝撃時に発生する圧力の最大値について

正員　大坪英臣*　正員　河野好秀**

On the maximum pressure in the water impact of the wedge model

by Hideomi Otsubo, *Member*　Yoshihide Kohno, *Member*

Summary

The present paper investigates theoretically the maximum pressure occurred in the water impact of the rigid wedge model. It is well known that Wagner's theory predicts the maximum pressure much higher than the experimental results by Chuang in case of small dead rise angle 4°, where air cushioning effects can be ignored. One of the reasons mentioned of such a discrepancy is error in measurement by a pressure gage of a finite diameter. It is not proved, however, that all the discrepancy can be attributed to the measurement error.

The authors determine the wetted width by considering the splash width derived from the condition of energy balance and of the free surface under the assumption of self-similarity. The smaller value of the wetted width than Wagner's prediction is obtained and it shows a good agreement with the experiment by Bisplinghoff. &. Doherty.

The present theory gives the lower maximum pressure than that predicted by Wagner, since the maximum pressure is approximately in proportion to the square of the wetted width ratio c/c' for small deadrise angle.

It is concluded, therefore, that the maximum pressure is essentially lower than Wagner's prediction under the assumption of self-similarity in free surface.

1 はじめに

水面衝撃現象は船舶のスラミング，宇宙船，飛行艇の着水などに見られ，工学において重要な問題の一つである。この現象の最も基礎的な問題は剛体楔形物体の水平水面衝撃であり，von Kármán[1]，Wagner[2] を始めとして多くの人々により研究されている。しかし物体と水面の間にとりこまれた空気の圧縮性の影響のない領域 4°≦衝撃角 β において衝撃時に発生する圧力の最大値については，実験が行われた10°以下において，実験値に比べ Wagner の理論値がかなり高目を与えることはよく知られている[3),4),5)]。この原因については湯原[16)]や竹本[5)]により圧力計の応答精度という実験技術上の問題点は指摘されているが，理論的研究は未だ不十分である。

β が小さいとき，衝撃時の最大圧力は接水幅 c と静水面を接水幅 c' とした時の比 c/c' の2乗にほぼ比例する。Bisplinghoff & Doherty[6)]は c/c' が Wagner の理論値よりも小さいことを高速度撮影による実験で示しているが，このことは発生する最大圧力は Wagner の理論値よりも低いことを意味している。本研究では，上述の最大圧力と c/c' の関係に注目し，splash を考慮した非線形解析を行い，Wagner の理論値より低い最大圧力が発生することを示した。なおここでは自由表面の重力影響を無視し，自己相似性を仮定している。

*　東京大学工学部船舶工学科
**　(株)ブリヂストン

2 Bisplinghoff & Doherty[6)] の実験

以後問題を単純化するため水中での落下速度 V が衝撃瞬間の速度 V_0 に等しい場合，つまり定速落下の場合のみに限定する。なお実際の実験では落下物体には水から受ける流体力および重力が作用し定速落下とはならないが，これについては著者ら[4)]を参照されたい。

水面衝撃時の最大圧力は Wagner[2)] の理論では

$$P_{\max}\Big/\frac{1}{2}\rho V_0^2=1+(dc/dt)^2/V_0^2 \qquad (1)$$

で与えられる。ここで dc/dt は接水幅 c の時間変化，ρ は水の密度である（Fig. 1 参照）。また楔形先端と静水

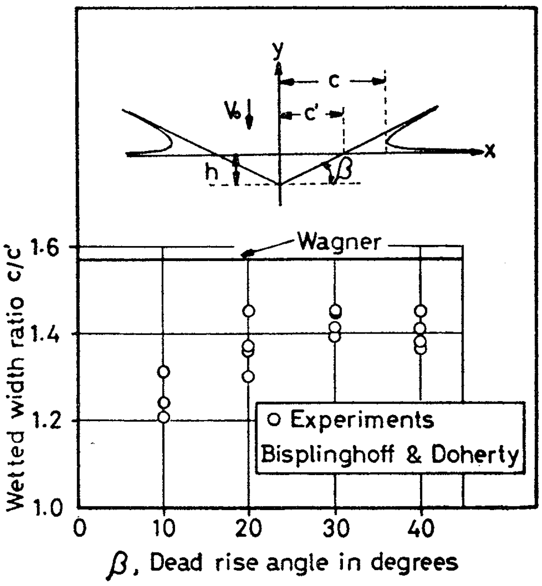

Fig. 1 x-y physical plane and high speed photograph experiments by Bisplinghoff & Doherty.

面までの距離を h とすると

$$dc/dt=(dc/dh)(dh/dt)=V_0(dc/dh)$$

となる。（1）式より

$$P_{\max}\Big/\frac{1}{2}\rho V_0^2=1+(dc/dh)^2 \qquad (2)$$

したがって，c と h の比 dc/dh が求まれば（2）式より最大圧力が決定する。Wagner[2] の理論では静水面を水面とした時の接水幅を c' とすると $c/c'=\pi/2$ となり $dc/dh=(\pi/2)/\tan\beta$ となる。ところが Bisplinghoff & Doherty[6] の高速度撮影による実験結果（Fig. 1）では $\pi/2$ より小さな値を示しており衝撃角 β が小さくなるほど c/c' 値は小さな値を示している。（2）式より最大圧力は dc/dh の2乗に比例しているので c/c' 値が $\pi/2$ より小さければ最大圧力値は Wagner の理論値より小さくなることになる。

3 splash を考慮した解析

楔形物体の水面衝撃で splash を考慮した非線形解析は Borg[7], Dobrovol'skaya[8], Cumberbatch[9], Hughes[10], 谷澤[11] らにより行われているが，いずれも splash の先端で splash の厚さがない場合を仮定している。Bisplinghoff & Doherty[6] の実験のスケッチを見ると，β が小さい場合，splash は jet のように飛び出しており，先端で厚さなし，と考えるよりむしろ splash の厚さは楔形の幅内で一定と見ることも出来る。ここでは Fig. 2 のように splash 厚さが一定と仮定し，Fig. 2 に示すように splash をモデル化し，splash の厚さ δ を Logvinovich[12] の示した方法で決定する。

β が小さい場合，流体は splash 以外の大部分を占める領域（I）と splash 領域（II）に分けて考えることができる。衝撃により領域（I）に加わる運動エネルギーは付加質量 $(\pi/2)\rho c^2$ を考えると

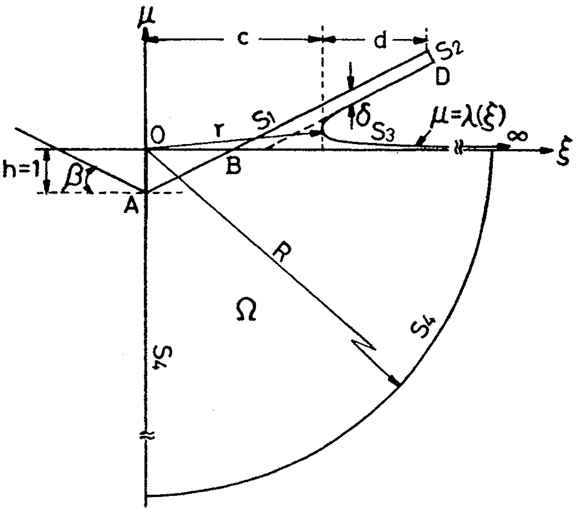

Fig. 2 ξ-μ similarity plane.

$$T_1=\frac{\pi}{2}\rho c^2\frac{V_0^2}{2}$$

となる。後述の3.2の仮定（b）より $\beta\to 0$ で splash の長さ $\to c$ と近似でき，また splash の速度 v_n は

$$v_n=2c/t \qquad (3)$$

と近似できるので領域（II）での運動エネルギーは $T_2=\rho\delta c(2c/t)^2$ となる。$\beta\to 0$ では T_1 と T_2 が等しくなることが知られているので[12]

$$\frac{\delta}{c}=\frac{\pi}{16}\left(\frac{h}{c}\right)^2 \qquad (4)$$

となる。（3），（4）式および後述の3.2の自由表面条件の仮定より dc/dh が求まり（2）式を用いて最大圧力を決定することができる。また支配方程式および境界条件が決まれば直接，数値計算することにより圧力分布を求めることができるので，合せて境界要素法による解析を行う。

3.1 基礎方程式

Fig. 2 に示すような2次元剛体楔形物体の水面衝撃を考える。左右対称なので右半分だけ考える。流体は非粘性，非圧縮とし，流体内部は非回転流れとする。また自由表面上では重力を無視し，圧力 $p=0$ とする。速度ポテンシャル $\Phi=\Phi(x,y,t)$ を導入すると任意の時間 $t>0$ について

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \qquad (5)$$

が成り立つ。ここで自由表面形状を時間 t について相似すなわち自己相似，と仮定し，無次元パラメータ

$$\xi=x/(tV_0)=x/h,\quad \mu=y/(tV_0)=y/h$$

を用いると $\Phi(x,y,t)=tV_0^2\varphi(\xi,\mu)=hV_0\varphi(\xi,\mu)$

$$\eta(x,t)=tV_0\lambda(\xi)=h\lambda(\xi)$$

が成り立つ。ここで $y=\eta(x,t)$ は自由表面を表わして

いる。以下の記述において c, c', δ はすべて h で無次元化されているとする。この無次元数を用いて支配方程式および境界条件を表わすと

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}=0\ ;\ \text{領域内}\ \Omega \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\cos\beta\ ;\ \text{楔形表面}\ S_1 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=2c\ ;\ \text{splash 先端}\ S_2 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0\ ;\ \text{半径}\ R\ \text{上}\ S_4 \qquad (9)$$

となる。(8) 式は (3) 式より相似性の仮定および $h=1$ とおくことにより得られる。(9) 式は十分大きな半径 R 上では流体の速度=0 との仮定より得られる。次に自由表面 S_3 上の速度ポテンシャル φ は Borg[7], Shiffman & Spencer[13] によると

$$\varphi=(r^2-s^2)/2 \qquad (10)$$

で与えられる。ここで r は自由表面上の任意の点と原点Oとの距離, s は splash 先端 D からの距離である。

3.2 非線形自由表面形状の決定

splash の厚さ δ が(4)式より求まるので, 連続の仮定から次の 2 つの条件を用いて自由表面形状を決定する。

(a) 流体の量は各時間について保存される。つまり

Volume OAB=Volume BD∞

(b) 自由表面の長さは各時間について等しい。つまり

Length OB∞=Length D∞

となる。(a), (b) で用いている記号については Fig. 2 参照。また (a), (b) についての詳しい数学的議論については Borg[7] を参照されたい。

条件 (a), (b) を使用して自由表面形状を決定するために Fig. 3 に示すような直線で近似した自由表面形状を考えると, 条件 (a) より

$$1/(2\tan\beta)\fallingdotseq(c-1/\tan\beta)(c\tan\beta-1)/2+d\delta \qquad (11)$$

条件 (b) より

$$c\fallingdotseq d/\cos\beta+c\tan\beta-(1+\delta) \qquad (12)$$

(12) 式より d を c で表わし, (11) 式に代入すると

$$\tan\beta\cdot c^2-2c+2\delta\{c(\cos\beta-\sin\beta)+(1+\delta)\cos\beta\}=0$$

となり δ^2 の項を無視し, (4) 式を代入すると, c についての 3 次式

$$\tan\beta\cdot c^3-2c^2+\frac{\pi}{8}(\cos\beta-\sin\beta)c+\frac{\pi}{8}\cos\beta=0 \qquad (13)$$

が得られる。(13) 式を解くと

$$c=\frac{1}{\tan\beta}\frac{2}{3}[\{G(\beta)+\sqrt{F(\beta)}\}^{1/3}+\{G(\beta)-\sqrt{F(\beta)}\}^{1/3}] \qquad (14)$$

となる。ここで

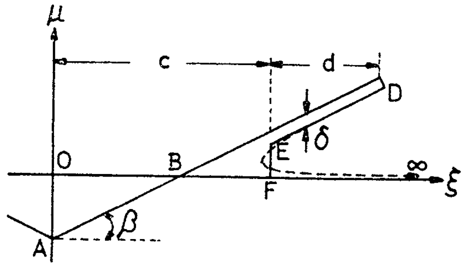

Fig. 3 The model of splash region and free surface.

$$F(\beta)=\Big\{1-\frac{9\pi}{64}(\cos\beta-\sin\beta)\tan\beta-\frac{27\pi}{128}\cos\beta\tan^2\beta\Big\}^2-\Big\{1-\frac{3\pi}{32}(\cos\beta-\sin\beta)\tan\beta\Big\}^3$$

$$G(\beta)=1-\frac{9\pi}{64}(\cos\beta-\sin\beta)\tan\beta-\frac{27\pi}{128}\cos\beta\tan^2\beta$$

である。δ は β が小さい時にのみ定義されるので (14) 式において β の 2 乗項以上を無視すると

$$c\simeq\frac{4}{3}\Big(1-\frac{9\pi}{64}\sin\beta\Big)^{1/3}\Big/\tan\beta \qquad (15)$$

となる。実は splash の先端の厚さがないとし, 厚さが線形に変化するとしたときも, $h=1\gg\delta$ とすると (13) 式が得られる。このときは splash の根元の厚さは (4) 式で与えられる δ の 2 倍となる。したがって (15) 式は splash の形状の仮定によらず成り立つとして良い。

(15) 式を (2) 式に用いると近似的に最大圧力の式が得られる。境界要素法による解析に用いる自由表面形状は直線で近似した形状 DEF∞ をベースに楕円と双曲線を連続させて条件 (a), (b) を満すように決定する。

3.3 圧力分布の決定

以上で支配方程式および境界条件が確定したので, 境界要素法により楔形表面での速度ポテンシャルを求めることができる。楔形表面の圧力 p は楔形表面上の速度ポテンシャルより

$$\frac{p}{\rho}=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}V_0-\frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)^2\Big\}$$

で与えられる。無次元化した楔形表面上の速度ポテンシャル φ と座標 ξ を用いると

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\fallingdotseq V_0^2\{\varphi-\xi\varphi'\}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=V_0\frac{\partial\phi}{\partial\xi}$$

となる。楔型表面で

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-V_0+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\tan\beta$$

よって圧力の無次元化値は

$$p\Big/\frac{1}{2}\rho V_0^2=1-2\left\{\varphi-\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right\}-\left(\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi}\right)^2(1+\tan^2\beta) \qquad (16)$$

で表わすことができる。

4 考　　察

Fig. 4 に $\beta=10°$ の場合の圧力分布を示す。境界要素法 (Boundary Element Method) による解析結果は以後図中では BEM と表記している。境界要素法による結果は Wagner の理論と同様に $\xi/c=1$ 近傍で鋭いピークを持つ圧力分布となる。ただし $\beta=10°$ では本解析で用いた splash の仮定の成立する範囲を超えている可能性はある。

Fig. 5 に最大圧力 $P_{max}/1/2\rho V_0^2$ と衝撃角 β の関係を示す。境界要素法による解析結果は Wagner の理論値と Chuang[3] の実験結果とのほぼ中間の値を示している。また (15) 式と (2) 式より

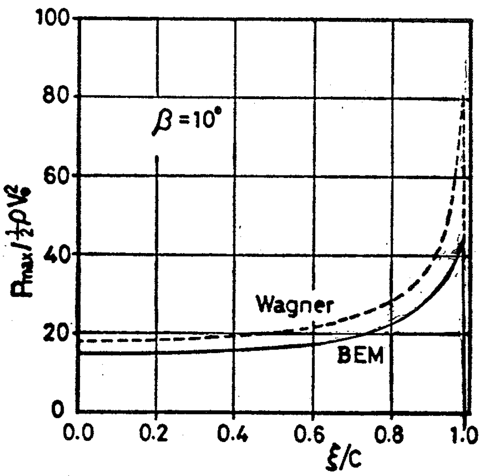

Fig. 4 Comparison of the pressure distribution between Wagner's theory and present analysis.

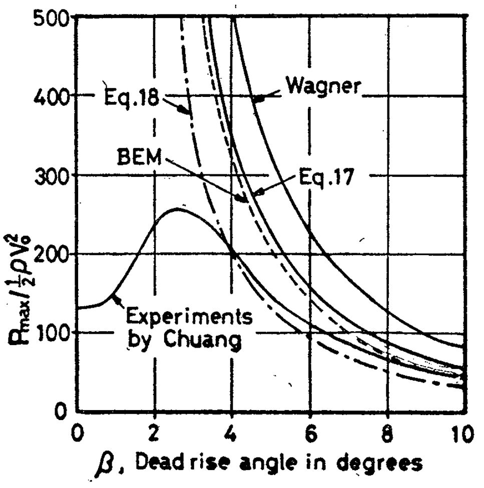

Fig. 5 Comparison of the maximum pressure versus dead rise angle by various methods.

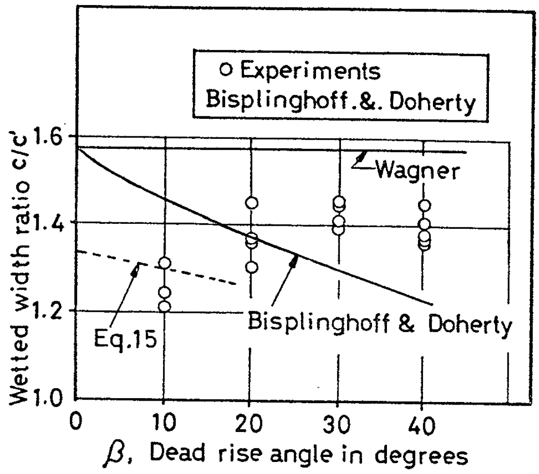

Fig. 6 Comparison of ratio of actual wetted width c to wetted width associated with free-water surface c'.

$$P_{max}\Big/\frac{1}{2}\rho V_0^2=1+\frac{16}{9}\left(1-\frac{9\pi}{32}\sin\beta\right)^{2/3}\Big/\tan^2\beta \quad (17)$$

となり，境界要素法による解析結果は (17) 式の値と比べて約1割ほど低い値となる。dc/dh が最小となるのは水面の盛り上がりのない場合，つまり，$c=c'$ であり、これより Wagner 流の考え方をした場合の $P_{max}/1/2\rho V_0^2$ の最小値は

$$P_{max}\Big/\frac{1}{2}\rho V_0^2=1+1/\tan^2\beta \qquad (18)$$

となる。Chuang の実験結果は $\beta=4°\sim10°$ の範囲において (18) 式の値より高い値を示している。

Fig. 6 に c/c' と衝撃角 β の関係を示す。(15) 式の値は $\beta=10°$ の時 Bisplinghoff & Doherty[6] の実験結果とよく一致しているが $\beta\geq20°$ ではかなり低目となっている。これは (3) 式の splash の厚さ δ は β が小さい時にのみ成り立つからであり当然といえる。(15) 式において $\beta=0$ の時の値 $c/c'=4/3$ は Wagner の plate fitting の代わりに物理的根拠に欠ける circle fitting を用いた手法 (Fabula[14], Chu & Abramson[15]) による結果と等しい。また著者らは文献 4) で splash を考慮しない time-step ごとの計算を行ったが，$t>1$m sec のほぼ定常となった状態で $c/c'=1.2\sim1.3$ の結果を得ており (15) 式の値とよく類似している。

$3°<\beta<10°$ においては高速度撮影による c/c' の実験値が得られていないので (17) 式の妥当性は明確ではないが，Chuang[3] の実験結果より 1〜3 割程度大きな最大圧力値を示しているので，圧力計の応答精度を考えると妥当ではないかと思われる。また，Bisplinghoff & Doherty[6] の実験では $10°\leq\beta\leq40°$ で c/c' の実験値は Wagner の理論値 $\pi/2$ より小さな値となっており，このことより圧力計の精度を考慮しても，最大圧力値は Wagner の理論値より低目と考える方が妥当と考えられ

る。

Fig. 7 に von Kármán の付加質量 $m_k=\rho\pi c'^2/2$ と他の方法で求められた付加質量の比 m/m_k を示した。

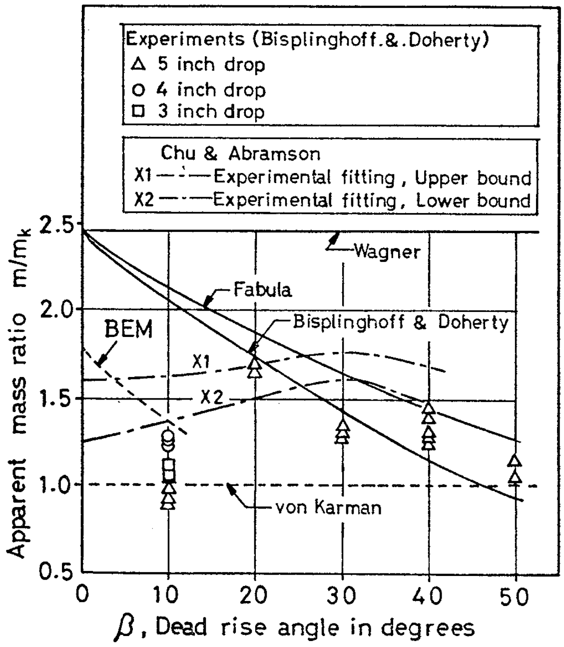

Fig. 7 Ratio of apparent mass to von Kármán apparent mass versus dead rise angle.

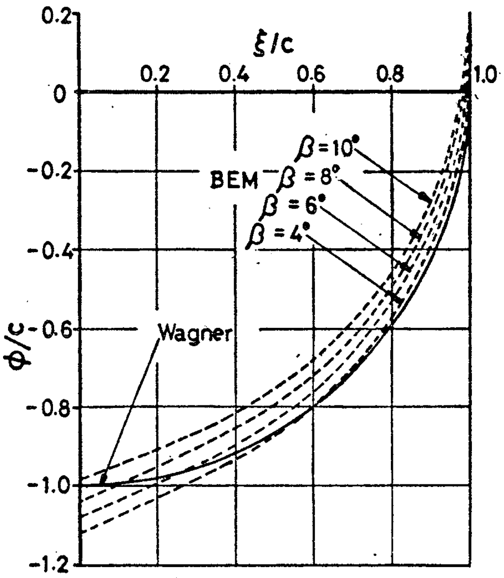

Fig. 8 Potential distribution on the wedge surface.

付加質量を

$$m=-2\rho\int_0^{c/\cos\beta}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds=-2\rho\int_0^c\varphi d\xi$$

とすると，付加質量の比 m/m_k は

$$m/m_k=\frac{4}{\pi}\tan^2\beta\int_0^c\varphi d\xi \tag{19}$$

となる。本計算結果は $\beta=10°$ での Bisplinghoff & Doherty[6] の実験値に対してよく一致しており，c/c' の場合と同じ傾向を示している。

Fig. 8 に $\varphi_0=\varphi(\xi)/c$ と ξ/c の関係を示す。Wagner の理論値では $\varphi_0=-\sqrt{1-(\xi/c)^2}$ であり，本計算結果は Wagner の理論値とよく似た傾向を示している。

5 結論

本研究では β が小さい範囲の最大圧力値と接水幅比 c/c' の関係に注目し自由表面の自己相似性を仮定した解析を行い，以下の結論を得た。

（1） $\beta\to0$ のとき c/c' について近似式 (15) 式を与えた。これは Wagner 理論によると $c/c'=\pi/2$ となるのに対して $c/c'\doteqdot4/3$ を与え，約15% 小さな値を与える。

（2） 最大圧力値に対して近似式 (17) 式を与え，Wagner の理論値より低い値を与えた。圧力計の測定精度によって最大圧力値は低下するが，それを考慮しても Chuang[3] の実験結果をよく説明できる結果を得た。

なお (19) 式で定義される付加質量比は $\beta=10°$ の Bisplinghoff & Doherty[6] の実験値に近い値を与えている。

以上の結論より従来よく知られている β が小さいときの Wagner の理論値と実験での最大圧力値との差についてある程度説明を与えることができたと考えられる。なお，ここでは自由表面形状は自己相似という仮定が成立するとして議論しているが，自己相似が成立しない場合についてはさらに理論的研究が必要である。また船体構造では弾性体としての応答を考慮する必要があり，構造設計には最大圧力はそれほど重要でないことを付記する。

参考文献

1) Th. von Kármán : The Impact on Seaplane Floats during Landing, NACA TN 321 (1929), 1-8.

2) H. Wagner : Über Stoss-und Gleitvorgänge on der Oberfläche von Flüssigkeiten, ZAMM, Bd 12 (1932), 193-215.

3) S. L. Chuang : Investigation of Impact of Rigid and Elastic Bodies with Water, Naval Ship Research and Development Center, Report 3248, (1970).

4) 山本善之，大坪英臣，河野好秀：楔形物体の水面衝撃，日本造船学会論文集，第 155 号（昭和 59 年 6 月).

5) 竹本博安：水面衝撃水圧に関する一考察，日本造船学会論文集，第 156 号（昭和 59 年 12 月).

6) R. L. Bisplinghoff & C. S. Doherty : Some studies of the Impact of Vee Wedges on a Water Surface, J. Franklin. Inst., vol. 253 (1952), 547-561.

7) S. F. Borg : The Maximum Pressure and Total Force on Straightsided Wedges with Small

Dead Rise, J. A. S. N. E., vol. 71 (1959), 559-561.

8) Z. N. Dobrovol'skaya : On Some Problems of Similarity Flow of Fluid with a Flree Surface, J. Fluid Mech, vol. 36 (1969), 805-829.

9) E. Cumberbatch : The Impact of a Water Wedge on a Wall, J. Fluid Mech, vol. 7 (1959), 353-374.

10) O. F. Hughes : Solution of the Wedge Entry Problem by Numerical Conformal Mapping, J. Fluid Mech, vol. 56 (1972), 173-192.

11) 谷澤克治：境界要素法による楔の着水問題の相似解，関西造船協会誌，第196号（昭和60年3月）.

12) G. V. Logvinovich : Hydrodynamics of Free-Boudary Flows. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1972.

13) M. Shiffman & D. C. Spencer : The Force of Impact on a Cone Striking a Water Surface, Pure Appl. Math, vol. 4 (1951), 379-417.

14) A. G. Fabula : Ellipse-Fitting Approximation of Two-Dimensional Normal Symmetric Impact of Rigid Bodies, Proc. 5 th Mid-western Conf. on Fluid Mech (1957), 299-315.

15) W. H. Chu & H. N. Abramson : Hydrodynamic Theories of Ship Slamming-Review and Extension, J. Ship Research, vol. 4 (1961), 9-21.

16) 湯原哲夫「水面衝撃に関する研究とその船体構造設計への応用」博士論文，東京大学学位請求（昭和57年）.