

(昭和 60 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

# 矩形板の弾性座屈相関関係式

正員 上 田 幸 雄\* 正員 Sherif M. H. Rashed\*\*  
 正員 白 点 基\*\*\*

Elastic Buckling Interaction Equation of Simply Supported  
 Rectangular Plates Subjected to Five Load Components

by Yukio Ueda, *Member* Sherif M. H. Rashed, *Member*  
 Jeom Kee Paik, *Member*

## Summary

In this paper, a new elastic buckling interaction equation for simply supported rectangular plates is proposed, when the plate is subjected to five load components, such as compressions and bendings in two directions and shear.

In order to construct this interaction, buckling strengths are calculated in addition to the existing data, and buckling interaction relationships for simply supported rectangular plates subjected to two load components are developed. The accuracy of these relationships is discussed.

The accuracy of the newly proposed interaction equation is checked against the above mentioned interaction relationships for two load components. Further assessment of accuracy is carried out when a rectangular plate is subjected to more than two load components. It is found that the proposed equation yields results with accuracy sufficient for practical purposes.

A comparison is also made with interaction equations proposed by Lloyd's Register and Det Norske Veritas. The result indicates that the new interaction equation proposed in this paper yields better accuracy in safety side.

## 1 緒 言

船舶を始めとする板構造物では、板要素の高い面内剛性および強度を利用しておる、面内荷重だけを分担する板要素も極めて多い。この場合には、座屈は重要な強度基準である。

座屈は支配方程式の固有値として得られるが、種々の組み合わせ荷重および支持条件のもとで、解を得ることは一般に難しく、たとえ精度のよい近似解を得るのにも、非常に多くの解析あるいは数値計算を必要とする場合が多い。

このようにして、得られた解をできるだけ広く利用するため、座屈相関関係式および図表などにして便覧<sup>1)</sup>などに収められている。

近年は、経済性および安全性の見地から設計上での強

度評価も高い精度を要求されるようになり、設計では簡明にして精度のよい座屈相関関係式が必要とされ、また種々提案されている。

本論文では、周辺単純支持矩形平板が面内に一様な 2 方向圧縮、2 方向曲げおよび一様な剪断の 5 荷重成分を受ける場合の精度の高い弾性座屈相関関係式を導出する。このためには、2 荷重成分の座屈相関関係式をもとにすると、これまでに計算されていない座屈強度に対しては、増分エネルギー法<sup>2)</sup>および有限要素法を適用して求める。そして、ロイド船級協会が示した近似相関関係式<sup>3)</sup>およびノルウェー船級協会の座屈強度解析手順の式<sup>4)</sup>とも比較する。

## 2 座屈強度の解析法

矩形板の座屈強度を求めるには、多くの解析法があるが、ここでは本論文で提案する新しい座屈相関関係式を作成するために使用した既存の計算結果および新しく解析した結果のもとになっている解析法について述べる。

\* 大阪大学溶接工学研究所

\*\* センチュリ・リサーチ・センタ(株)

\*\*\* 大阪大学大学院博士課程

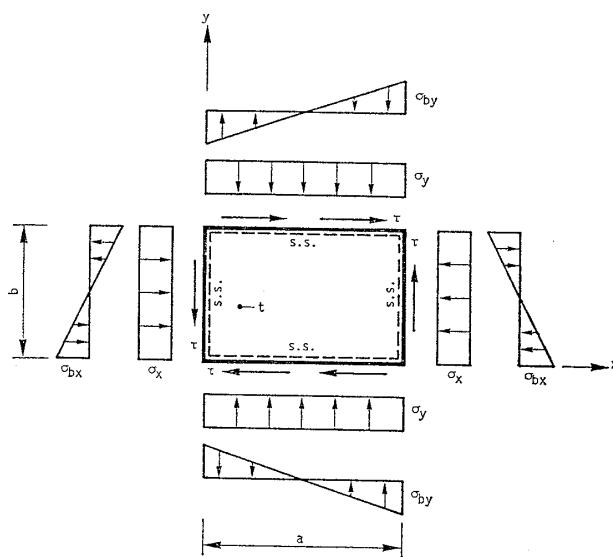


Fig. 1 Simply supported rectangular plate and applied loads

2.1 エネルギー法による解析<sup>5)</sup>

この方法では最小ポテンシャルエネルギー原理を用いる。Fig. 1 に示す矩形平板が面内荷重のもとで座屈し、横たわみ  $w$  を生じる時の全ポテンシャルエネルギー :  $\Pi$  は次のように与えられる。

$$\Pi = U - V \quad (1)$$

ここに、 $U$  = 座屈変形によって平板に貯えられるひずみエネルギー

$$= \iint \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy$$

$V$  = 座屈変形による外力のポテンシャルの損失

$$= \iint \frac{t}{2} \left[ \sigma_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\tau \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \sigma_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

さらに、 $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 、 $\nu$  = ポアソン比、 $t$  = 板厚、  
 $E$  = 弾性係数

また、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau (= \tau_{xy})$  = 平板の周辺に作用する応力成分で、上式の積分は、平板全体について行う。

座屈条件は、最小ポテンシャルエネルギー原理によれば次式で与えられる。

$$\delta \Pi = 0 \quad (2)$$

本研究で取扱っている矩形板は、周辺単純支持であるので、たわみ形として次式を仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (3)$$

ここで、 $a, b$  = それぞれ矩形板の長さ、幅

$A_{mn}$  = 定数

式(3)を式(2)に代入し、積分を完了すると、次

式の停留値として座屈値が与えられる。すなわち、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (m, n = 1 \sim \infty) \quad (2^*)$$

特別の荷重条件のもとで、 $m, n$  を適当に選んだ場合にのみ、式(2\*)の解は解析解となるが、一般に、多元高次連立方程式となるので数値解析によって解を求める必要がある。

2.2 増分エネルギー法<sup>2)</sup>

一般に前節の方法で座屈値としての固有値を求める場合に、座屈波形が複雑になるような剪断座屈に対して精度の高い解を得るためにには、仮定するたわみ形の項数を十分多く取る必要がある。

これに対して、数値的に座屈値を求める場合も非常に計算時間を要する。初期たわみを有する板あるいは、後座屈の挙動を解析する場合も同様の問題が生じる。これらの点に焦点を合わせて著者の一人が開発した方法に増分エネルギー法がある。本研究では、新たに座屈値を計算する場合にはこの方法を用いる。

板の弾性大たわみ挙動を支配する基礎方程式は、次式のように平衡方程式(4)と歪の適合条件式(5)となる。

$$\nabla^4 w = \frac{t}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right] \quad (4)$$

$$\nabla^4 F = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

ここで、 $F$  は応力関数で、次の関係を満足する。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

また、 $w$  = たわみ、 $w_0$  = 初期たわみ、

式(4)と式(5)は共に  $F, w$  に関して非線形偏微分方程式となっており、このままでは解析は非常に困難である。したがって増分法をもとに基礎方程式の線形化を行う。すなわち、

第  $n$  段階目の荷重段階において

$$w = w^{n-1} + \Delta w \quad (6)$$

$$F = F^{n-1} + \Delta F$$

ここで、 $w, F$  = 無負荷状態から第  $n$  回目の荷重段階までに生じるたわみおよび応力関数

$w^{n-1}, F^{n-1}$  = 無負荷状態から第  $n-1$  回目の荷重段階までに生じるたわみおよび応力関数

$\Delta w, \Delta F$  = 第  $n$  回目の荷重増分により生じるたわみおよび応力関数の増分

式(6)を式(4)と式(5)に代入し、 $\Delta w, \Delta F$  に関する 2 次以上の高次の項を微小量として無視して整理すると、次のように微少な荷重増分間では線形となる基

基礎方程式を誘導することができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \nabla^4(\Delta w) = & \frac{t}{D} \left[ \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_T}{\partial y^2} \right. \\ & + \frac{\partial^2 F^{n-1}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F^{n-1}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \\ & \left. - 2 \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_T}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 F^{n-1}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4(\Delta F) = & E \left[ 2 \frac{\partial^2 w_T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 w_T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 $w_T = w^{n-1} + w_0$

たわみ形として  $\Delta w = \sum \sum A_{mn} \phi_m(x) \cdot \psi_n(y)$  を仮定し、これと式(8)から  $\Delta F$  を  $\Delta w$  の関数として、かつ周辺条件を満足するように求める。そのようにして得られた  $\Delta F$ ,  $\Delta w$  を式(7)に代入し、これを Galerkin 法で解けば、比較的容易に  $\Delta F$ ,  $\Delta w$  が得られて、 $w, F$  は次のように求められる。

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^n \Delta w_i \\ F &= \sum_{i=1}^n \Delta F_i \end{aligned}$$

上述の解析法に従って、初期たわみを有し、周辺で単純支持された矩形板の場合の解析では、たわみ形および初期たわみ形を次のように仮定し、

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (9 \cdot a)$$

$$w_0 = \sum_m \sum_n A_{0mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (9 \cdot b)$$

周辺条件として

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } x=0, a \\ w &= 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x=0, b \end{aligned} \right\} \quad (10 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^b \sigma_x t dy &= P_x \\ \int_0^a \sigma_y t dx &= P_y \\ \int_0^b \sigma_x t y dy &= M_x \\ \int_0^a \sigma_y t x dx &= M_y \\ \tau_{xy} &= \tau \end{aligned} \right\} \quad (10 \cdot b)$$

を満足するように式(7)および式(8)を解くことになる。

この解析法では、座屈値を固有値として求めずに、微少な初期たわみを有する平板が面内荷重を増分的に受け、座屈値の近傍でたわみが急増する点の荷重として座屈荷重を求める。この解析法では電子計算機を用いる場合の計算時間が極めて短いのでたわみ形としては多くの

項数を採用することができる。他方、初期たわみを微少にとると推定する座屈荷重の精度も高い。

たわみの項数を多くとると上界値（正解を含む）から正解へ、仮定する初期たわみを小さくとると下界値から正解へ収束する。したがって、両者を適当に選べば、解の精度は相当高いことが期待できる。

### 2.3 有限要素法<sup>6)</sup>

前述した最小エネルギー原理より、有限要素法における座屈の基礎式を導出することができる。まず、矩形板を有限要素に分割し、座屈によるたわみを各要素のたわみ  $w$  で表わす。すなわち、

$$w = [A_b] \{w_n\} \quad (11)$$

ここに、 $[A_b]$  = 有限要素の変位関数

$\{w_n\}$  = 有限要素の節点変位

式(11)を式(1)に代入し、節点変位  $\{w_n\}$  で II を偏微分すれば、式(2)の停留条件が導出できる。その結果は次のようになる。

$$0 = (\sum [K_{bb}] + \sum [K_I]) \{w_n\} \quad (12)$$

ここに、 $[K_{bb}]$  = 有限要素の曲げ剛性行列

$[K_I]$  = 有限要素の安定係数行列で、荷重に比例する応力項を含む

$\sum$  = 全有限要素についての和

式(12)が  $\{w_n\} = 0$  でない有意な解を持つためには次式を満足せねばならない。

$$|\sum [K_{bb}] + \sum [K_I]| = 0 \quad (13)$$

上式の  $[K_I]$  に含まれる応力がある値になると上式を満足する固有値として座屈応力が求められる。

この方法によって求められる座屈値の精度は、採用する変位関数と要素数、および座屈波形の複雑さに依存し、精度の高い解を得難い場合がある。本論文のいくつかの座屈値はこの方法によって求められている。

## 3 新しい弾性座屈相関関係式

本論文では、Fig. 1 に示す長さ、 $a$ 、幅  $b$  の周辺単純支持矩形平板を対象とし、 $x$  および  $y$  方向の一様な圧縮 ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) および曲げ ( $\sigma_{bx}, \sigma_{by}$ 、端部に生じる応力) と一様な剪断 ( $\tau$ ) が作用する場合の座屈相関関係式を導出する。

### 3.1 2 荷重成分に対する座屈相関関係式

第1段階として、2つの外力による座屈相関関係を取扱う。たとえば、 $\sigma_x$  と  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{bx}$  と  $\sigma_{by}$  である。Fig. 2 から Fig. 11 にアスペクト比  $a/b \geq 1$  に対する座屈相関関係を示す。 $x$  軸は必ず、長い辺に沿ってとるので  $a/b < 1$  は考える必要がない。図に示した座屈値は、主に文献 1), 5), 7), 8) の値を採用したが、Fig. 5 および Fig. 7 は増分エネルギー法で、そして Fig. 11 の一部は有限要素法によって新しく計算したものである。これらの座屈値

Table 1 Sources of elastic buckling interaction relationships between different load components

$\sigma_x$					
$\sigma_y$	Calculated by Energy Method				
$\sigma_{bx}$	Ref. 7	Ref. 7			
$\sigma_{by}$	Calculated by Inc. Energy Method & Ref. 7	Refs. 5 and 7	Calculated by Inc. Energy Method		
$\tau$	Ref. 7	Ref. 8	Ref. 7	Calculated by F.E.M. and Ref. 7	
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_{bx}$	$\sigma_{by}$	$\tau$

の出典を Table 1 にまとめて示す。本論文では、Fig. 2 から Fig. 11 の座屈値が非常に精度が高いと考えられるので、精度を比較する場合の基準値とする。これらの図の座屈相関関係に対する近似相関関係式を求め、それらを以下に示すと共に、Fig. 2 から Fig. 11 にも、適当な記号で示す。式中の添字 *cr* は、その荷重だけが単独に作用している状態での座屈荷重である（付録）。

#### (1) $\sigma_x \cdot \sigma_y$ 相関関係

Fig. 2 には 2 方向圧縮 ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) に対する座屈相関関係を種々のアスペクト比について示す。これらの関係は、エネルギー法を用いて求められたもので、座屈波形については式 (3) の  $x, y$  方向にそれぞれ 1 項ずつだけによく、しかも正解を与える。Fig. 2 の相関関係はアスペクト比が  $1 \leq a/b \leq \sqrt{2}$  に対して直線となり、 $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  の相関は強く、 $a/b$  が大きくなるにつれて相関曲線は外に凸で互いの影響が少なくなる。 $1 \leq a/b \leq \sqrt{2}$  の

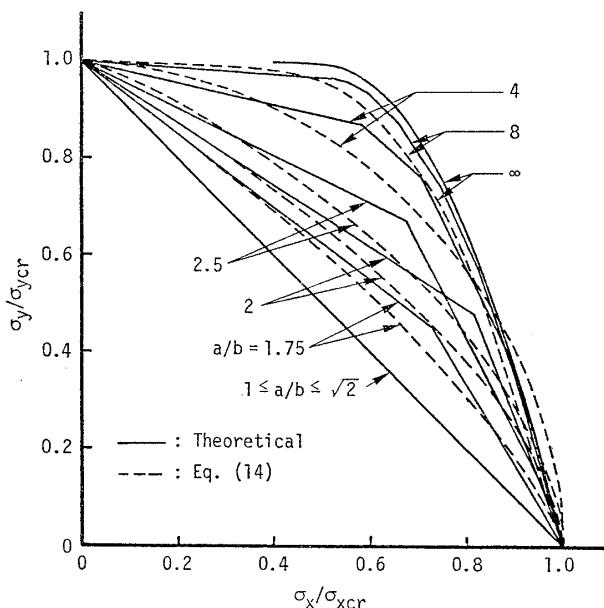


Fig. 2 Buckling interaction between  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$

座屈は 1 半波である。 $a/b > \sqrt{2}$  に対しては  $\sigma_x/\sigma_y$  が大きくなれば、座屈の半波数が増す傾向にあるが、 $\sigma_x/\sigma_y$  が小さくなれば、逆に減少し、1 半波に収束する。いずれの場合の相関曲線も直線で構成されており、それぞれの直線では同じ座屈波形で直線の交点で座屈半波数が変わること。

$\sigma_x$  と  $\sigma_y$  だけが作用している場合の相関関係式は正解で表わすことができるが、 $\sigma_x/\sigma_y$  およびアスペクト比  $a/b$  によって式が異なる。後述するように他の荷重成分と組み合わせて相関関係式を得るために、連続関数で表わす方が都合がよい。正解を連続関数で表わすことは難しいので、ここでは、 $1 \leq a/b$  に対して、連続関数でやや安全側の値を与える次の精度のよい近似式を提案する。

$$\left( \frac{\sigma_x}{\sigma_{xcr}} \right)^{\alpha_1} + \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_{ycr}} \right)^{\alpha_2} - 1 = 0 \quad (14)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 1.0 & 1 \leq \beta \leq \sqrt{2} \\ \alpha_1 &= 1.0 \\ \alpha_2 &= 1.110\beta - 0.569 & \sqrt{2} < \beta \leq 2 \\ \alpha_1 &= 0.450\beta + 0.10 & 2 < \beta \leq 4 \\ \alpha_2 &= 0.125\beta + 1.40 & \\ \alpha_1 &= 0.20\beta^2 - 1.60\beta + 5.10 & 4 < \beta \leq 8 \\ \alpha_2 &= -0.30\beta + 3.10 & \\ \alpha_1 &= 5.10 & 8 < \beta \\ \alpha_2 &= 0.70 & \\ \beta &= a/b \end{aligned}$$

#### (2) $\sigma_x \cdot \sigma_{bx}$ 相関関係

$\sigma_x$  と  $\sigma_{bx}$  の座屈相関関係を Fig. 3 に異なったアスペクト比  $a/b$  に対して示す。これらの相関関係は、エネル

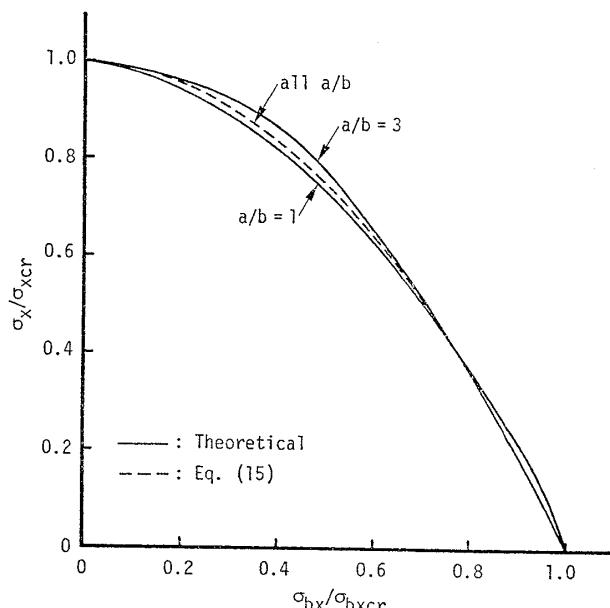
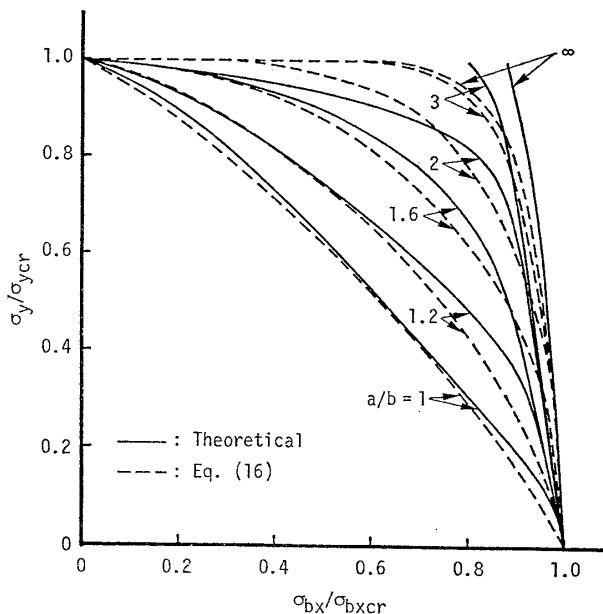


Fig. 3 Buckling interaction between  $\sigma_x$  and  $\sigma_{bx}$

Fig. 4 Buckling interaction between  $\sigma_y$  and  $\sigma_{bx}$ 

エネルギー法を用いて求めたものであるが、仮定するたわみ形として式(3)を用いた解の収束は非常によいので、高めの座屈強度を与えるが、少数の項数で精度は非常に高い。図から知られるように、この相関関係は  $a/b$  にほとんど影響を受けない。そして、次式で精度よい相関関係を表わすことができる。

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{xcr}} + \left( \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{bxcr}} \right)^2 - 1 = 0 \quad (15)$$

### (3) $\sigma_y \cdot \sigma_{bx}$ 相関関係

エネルギー法を用い、 $\sigma_y$  と  $\sigma_{bx}$  の相関関係を求め、Fig. 4 に示す。(2) の場合と同様に、少数の項数を用いたたわみ形で精度のよい座屈値が得られている。

下式はこの相関関係に対する精度よい近似式である。

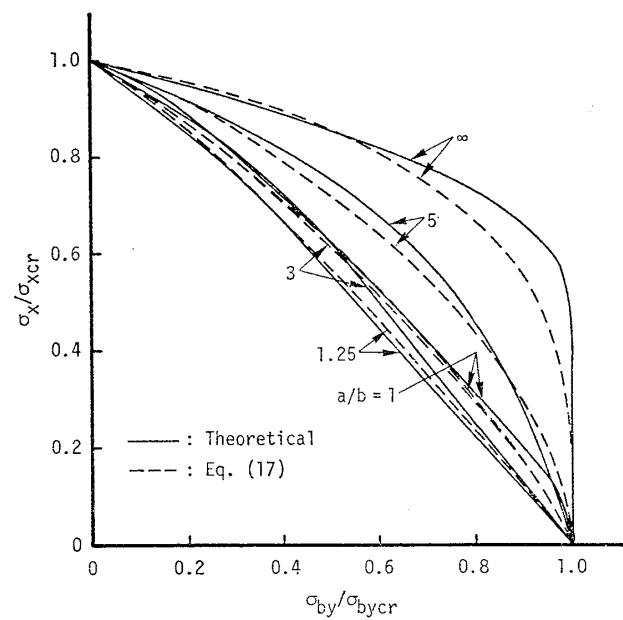
$$\left( \frac{\sigma_y}{\sigma_{ycre}} \right)^{\alpha_3} + \left( \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{bxcre}} \right)^{\alpha_4} - 1 = 0 \quad (16)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \alpha_4 = 1.50\beta - 0.30 & 1 \leq \beta \leq 1.6 \\ \alpha_3 &= -0.625\beta + 3.10 & 1.6 < \beta \leq 3.2 \\ \alpha_4 &= 6.25\beta - 7.90 & \\ \alpha_3 &= 1.1 & 3.2 < \beta \\ \alpha_4 &= 12.1 & \end{aligned}$$

### (4) $\sigma_x \cdot \sigma_{by}$ 相関関係

アスペクト比が小さい ( $a/b \approx 1.0$ ) 場合には、座屈たわみ形は式(3)の3項で精度よく座屈値が計算できるが、 $a/b$  が大きくなると、よい精度を得るために、たわみ形に多くの項数をとらねばならない。この場合に、エネルギー法で答を求めることが難しくなる。 $\sigma_x$  と  $\sigma_{by}$  の相関関係を Fig. 5 に示す。 $a/b = 1.0$  および 1.25 はエネルギー法で求め、 $a/b = 3.0$  および 5.0 は増分エネルギー法で求めたものである。後者の場合には式(3)の

Fig. 5 Buckling interaction between  $\sigma_x$  and  $\sigma_{by}$ 

たわみ式の項数を 7 から 11 としており、解の収束性を確認しているので座屈値の精度は高い。

$a/b = \infty$  の場合、短辺  $b$  よりもはるかに長い部分が圧縮の  $\sigma_{by}$  を受けるので、この部分の座屈は 2 方向圧縮の値に収束すると推定できる。ここでは、収束値として式(14)を採用する。これらを総合して、相関関係を下式で精度よく近似できる。

$$\left( \frac{\sigma_x}{\sigma_{xcr}} \right)^{\alpha_5} + \left( \frac{\sigma_{by}}{\sigma_{bycre}} \right)^{\alpha_6} - 1 = 0 \quad (17)$$

ここに、

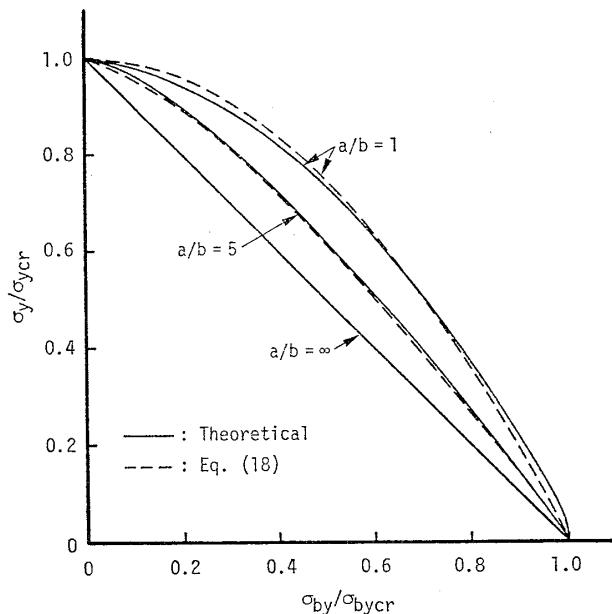
$$\begin{aligned} \alpha_5 &= 0.930\beta^2 - 2.890\beta + 3.160 & 1 \leq \beta \leq 2 \\ \alpha_6 &= 1.20 & \\ \alpha_5 &= 0.066\beta^2 - 0.246\beta + 1.328 & 2 < \beta \leq 5 \\ \alpha_6 &= 1.20 & \\ \alpha_5 &= 1.117\beta - 3.837 & 5 < \beta \leq 8 \\ \alpha_6 &= -0.167\beta + 2.035 & \\ \alpha_5 &= 5.10 & 8 < \beta \\ \alpha_6 &= 0.70 & \end{aligned}$$

### (5) $\sigma_y \cdot \sigma_{by}$ 相関関係

この場合の座屈たわみ形は式(3)の数項で十分精度よく表わされる。エネルギー法を用いて、 $a/b = 1.0$  および 5.0 に対して求められた座屈値を Fig. 6 に示す。 $a/b = \infty$  になると、(4) で述べたように  $y$  方向圧縮に収束すると推定され、その関係は Fig. 6 のように直線になるとを考えられる。 $\sigma_y$  と  $\sigma_{by}$  の相関関係を次式で精度よく近似できる。

$$\left( \frac{\sigma_y}{\sigma_{ycre}} \right)^{\alpha_7} + \left( \frac{\sigma_{by}}{\sigma_{bycre}} \right)^{\alpha_8} - 1 = 0 \quad (18)$$

ここに、

Fig. 6 Buckling interaction between  $\sigma_y$  and  $\sigma_{by}$ 

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_7 = 1.0 \\ \alpha_8 = (14.0 - \beta) / 6.5 \end{array} \right\} 1 \leq \beta \leq 7.5$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_7 = 1.0 \\ \alpha_8 = 1.0 \end{array} \right\} 7.5 < \beta$$

(6)  $\sigma_{bx}, \sigma_{by}$  相関関係

2方向から曲げを受ける場合の座屈波形は複雑であるので、それを式(3)で精度よく表わすには多くの項数を必要とする。したがって、増分エネルギー法で9項から22項をとり解の収束性を確認して相関関係を作成した(Fig. 7)。

次式は精度のよい近似相関関係式である。

$$\left( \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{bx,cr}} \right)^{\alpha_9} + \left( \frac{\sigma_{by}}{\sigma_{by,cr}} \right)^{\alpha_{10}} - 1 = 0 \quad (19)$$

ここに、

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_9 = 0.050\beta + 1.080 \\ \alpha_{10} = 0.268\beta - 1.248/\beta + 2.112 \end{array} \right\} 1 \leq \beta \leq 3$$

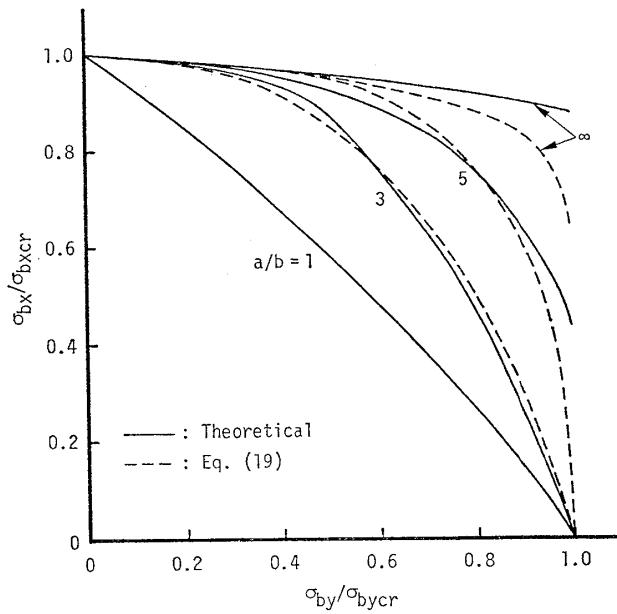
$$\left. \begin{array}{l} \alpha_9 = 0.146\beta^2 - 0.533\beta + 1.515 \\ \alpha_{10} = 0.268\beta - 1.248/\beta + 2.112 \end{array} \right\} 3 < \beta \leq 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_9 = 3.20\beta - 13.50 \\ \alpha_{10} = -0.70\beta + 6.70 \end{array} \right\} 5 < \beta \leq 8$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_9 = 12.10 \\ \alpha_{10} = 1.10 \end{array} \right\} 8 < \beta$$

(7)  $\sigma_x, \tau$  相関関係

一般に剪断応力が作用している場合の座屈たわみ形は複雑で、特に  $a/b$  が大きくなると、式(3)のたわみの式で多くの項数をとる必要がある。本項および(8), (9), (10)で示す座屈相関関係はエネルギー法で求められたもので、その精度は直応力が作用する場合よりも低いと考えられる。しかし、剪断が支配的な場合の座屈後の最終強度は十分高いので、この座屈応力の精度は実

Fig. 7 Buckling interaction between  $\sigma_{bx}$  and  $\sigma_{by}$ 

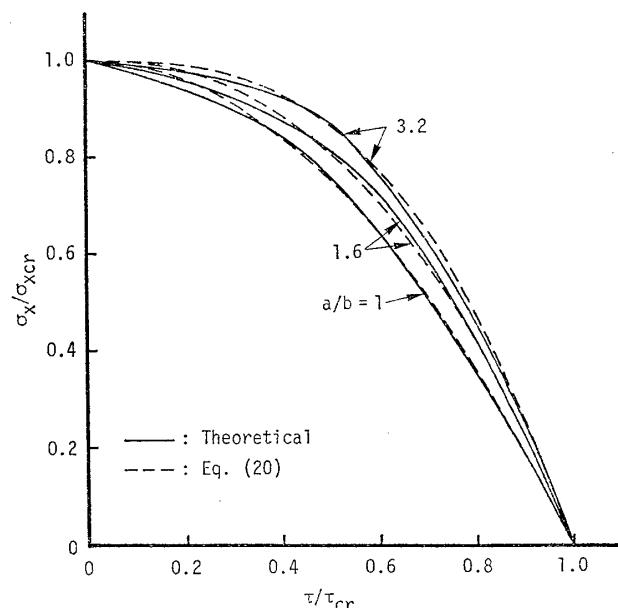
用的に十分である。既存の座屈値が求められている  $a/b$  の範囲は狭いが、実用的な使用範囲を含んでいる。以下では、 $\tau$  と他の応力成分との組み合わせに対する座屈相関関係に対するやや安全側の近似式を示す。まず  $\sigma_x$  と  $\tau$  の相関関係を次式で表わし、座屈強度を Fig. 8 に示す。

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,cr}} + \left( \frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^{\alpha_{11}} - 1 = 0 \quad (20)$$

ここに、

$$\alpha_{11} = -0.160\beta^2 + 1.080\beta + 1.082 \quad 1 \leq \beta \leq 3.2$$

$$\alpha_{11} = 2.90 \quad 3.2 < \beta$$

Fig. 8 Buckling interaction between  $\sigma_x$  and  $\tau$

(8)  $\sigma_y \cdot \tau$  相関関係

$\sigma_y$  と  $\tau$  の組み合わせに対する座屈相関関係は次式のように近似できる (Fig. 9)。

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,cr}} + \left( \frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^{\alpha_{12}} - 1 = 0 \quad (21)$$

ここに、

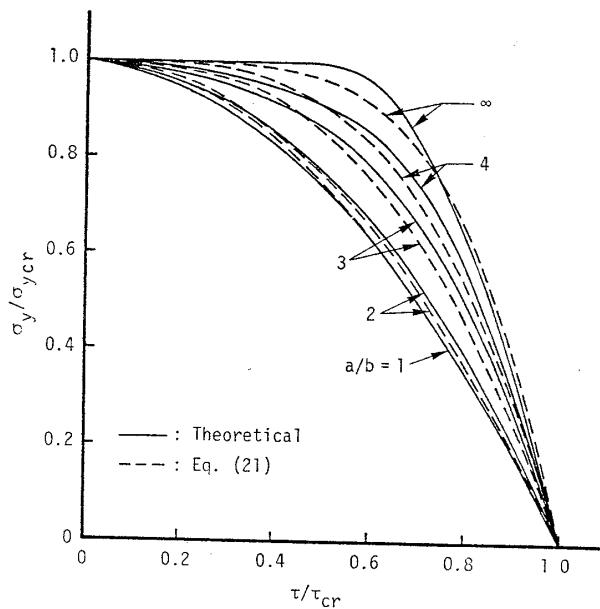
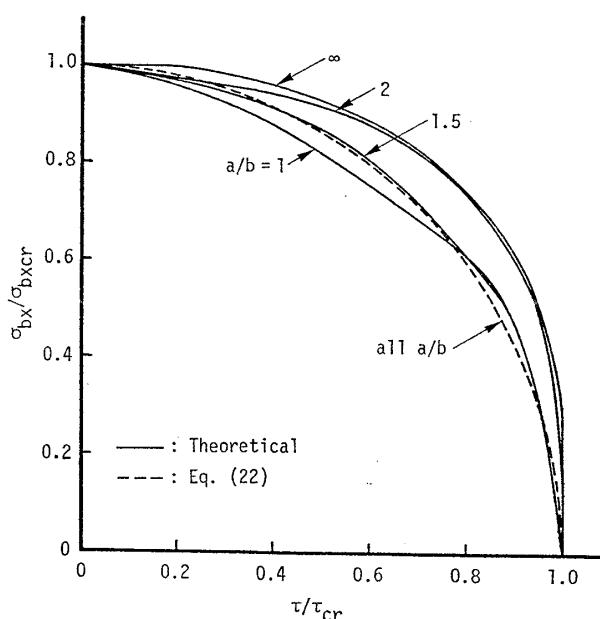
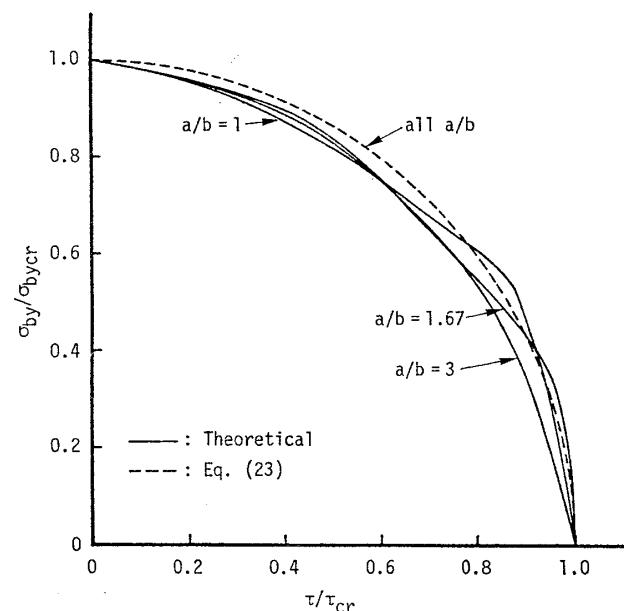
$$\alpha_{12} = 0.10\beta + 1.90 \quad 1 \leq \beta \leq 2$$

$$\alpha_{12} = 0.70\beta + 0.70 \quad 2 < \beta \leq 6$$

$$\alpha_{12} = 4.90 \quad 6 < \beta$$

(9)  $\sigma_{bx} \cdot \tau$  相関関係

$\sigma_{bx}$  と  $\tau$  の組み合わせに対する座屈相関関係はアスペクト比  $a/b$  に無関係に次式のように近似する (Fig. 10)。

Fig. 9 Buckling interaction between  $\sigma_y$  and  $\tau$ Fig. 10 Buckling interaction between  $\sigma_{bx}$  and  $\tau$ Fig. 11 Buckling interaction between  $\sigma_{by}$  and  $\tau$ 

$$\left( \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{bx,cr}} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 - 1 = 0 \quad (22)$$

(10)  $\sigma_{by} \cdot \tau$  相関関係

$\sigma_{by}$  と  $\tau$  の組み合わせ応力は、ガーダーのウエブの強度の推定に重要であるので、既存の計算結果を補うため、 $a/b=3$  に対して、 $\sigma_{by}$  と  $\tau$  の種々の大きさの組み合わせに対して、有限要素法で解析して座屈値を求めた。

$\sigma_{by}$  と  $\tau$  の相関関係を次式で近似できる (Fig. 11)。

$$\left( \frac{\sigma_{by}}{\sigma_{by,cr}} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 - 1 = 0 \quad (23)$$

## 3.2 5荷重成分に対する座屈相関関係式

5荷重成分に対する一般的な座屈相関関係式をできるだけ精度よく求めるために、本研究では、3.1で示した2荷重成分に対する座屈相関関係式をそのまま用いる。すなわち、2荷重成分の座屈相関関係式を1荷重成分について解き、他の相関関係式に代入して3荷重成分の相関関係式を導出する。この手順を進め、最後に5荷重成分の相関関係式を求める。以下に、その導出過程を具体的に示す。

(1)  $\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{bx}$  相関関係

式(14), (15), (16)式はそれぞれ  $\sigma_x$  と  $\sigma_y, \sigma_x$  と  $\sigma_{bx}, \sigma_y$  と  $\sigma_{bx}$  の相関関係式である。これらを組み合わせて、3荷重成分の相関関係式を導出する。この関係式の概念図を Fig. 12 に示す。3荷重成分の作用下で、矩形板が丁度、座屈条件を満足したと考える。この状態での応力成分を  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{bx}^*$  で表わす。ここで、 $\sigma_y=0$  の場合を考えると、3荷重成分の座屈相関関係は、式(15)の2荷重成分の式で表わせる。この時の  $\sigma_x$  を  $\sigma_x^*$  と

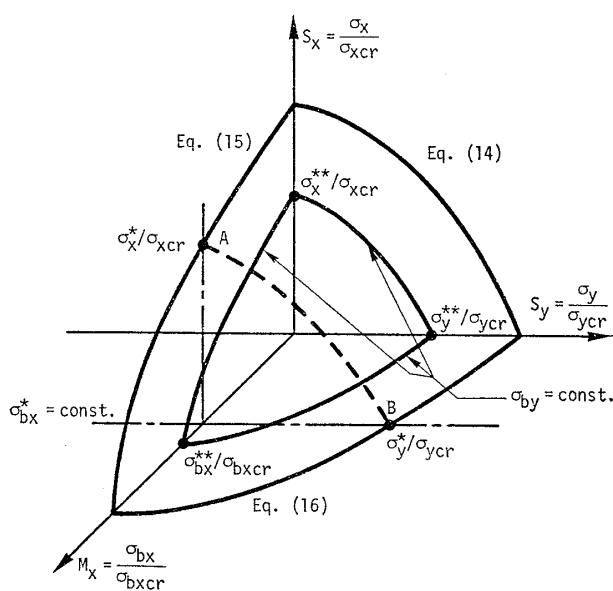


Fig. 12 Combining buckling interaction equations

し、式(15)より  $\sigma_{bx}^* < \sigma_{bx_cr}$  の条件のもとで

$$\sigma_x^* = \sigma_{x_cr} [1 - (\sigma_{bx}^* / \sigma_{bx_cr})^2] \quad (24)$$

同様に、 $\sigma_x = 0$  の時には、式(16)より

$$\sigma_y^* = \sigma_{y_cr} [1 - (\sigma_{bx}^* / \sigma_{bx_cr})^4]^{1/\alpha_3} \quad (25)$$

この  $\sigma_x^*, \sigma_y^*$  は Fig. 12 の A 点、B 点に相当する。

ここで、 $\sigma_{bx}^*$  が一定の場合の  $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  の相関関係式が  $\sigma_{bx} = 0$  と相似であると仮定する。すなわち、Fig. 12 では、 $\sigma_{bx} = \text{const.}$  の断面の  $\sigma_x^*$  と  $\sigma_y^*$  の相関関係が  $\sigma_{bx} = 0$ 、すなわち、式(14)で表わされる  $S_x \cdot S_y$  平面の相関関係と相似であると仮定する。そして、式(24)、(25)の  $\sigma_x^*, \sigma_y^*$  を式(14)の  $\sigma_{x_cr}, \sigma_{y_cr}$  に代入すると、 $\sigma_{bx} = \text{const.}$  の相関関係式が得られ、さらに  $\sigma_{bx}^*$  を  $\sigma_{bx}$  と置くと、3 荷重成分の相関関係式が次のように得られる。

$$(\sigma_x / C_1 \sigma_{x_cr})^{\alpha_1} + (\sigma_y / C_2 \sigma_{y_cr})^{\alpha_2} - 1 = 0 \quad (26)$$

ここに、

$$C_1 = 1 - (\sigma_{bx} / \sigma_{bx_cr})^2$$

$$C_2 = [1 - (\sigma_{bx} / \sigma_{bx_cr})^4]^{1/\alpha_3}$$

## (2) $\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{bx} \cdot \sigma_{by}$ 相関関係式

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{bx}, \sigma_{by}$  の 4 荷重成分の作用下で、丁度、座屈条件を満足したと考える。この状態での応力成分を  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{bx}, \sigma_{by}^*$  とする。まず、 $\sigma_y = 0, \sigma_{bx} = 0$  の時の  $\sigma_x$  を  $\sigma_{bx}^*$  として、式(17)を  $\sigma_{by}^* < \sigma_{by_cr}$  の条件のもとで  $\sigma_{bx}^*$  について解くと

$$\sigma_{bx}^* = \sigma_{x_cr} [1 - (\sigma_{by}^* / \sigma_{by_cr})^{\alpha_6}]^{1/\alpha_5} \quad (27)$$

同様に、 $\sigma_x = 0, \sigma_{bx} = 0$  の時の式(18)より  $\sigma_{by}^*$ 、また  $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0$  の時は式(19)より  $\sigma_{bx}^*$  について解くと、

$$\sigma_{bx}^* = \sigma_{y_cr} [1 - (\sigma_{by}^* / \sigma_{by_cr})^{\alpha_8}]^{1/\alpha_7} \quad (28)$$

$$\sigma_{by}^* = \sigma_{bx_cr} [1 - (\sigma_{by}^* / \sigma_{by_cr})^{\alpha_{10}}]^{1/\alpha_9} \quad (29)$$

ここで、用いた  $\sigma_{x_cr}^*, \sigma_{y_cr}^*, \sigma_{bx}^*$  を Fig. 12 に示す。

次に、 $\sigma_{by}^* = \text{const.}$  に対する  $\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{bx}$  の相関関係は  $\sigma_{by} = 0$  の相関関係、すなわち、式(26)と相似であると仮定する。そこで、式(26)の  $\sigma_{x_cr}, \sigma_{y_cr}, \sigma_{bx_cr}$  に式(27)、(28)、(29)の  $\sigma_{x_cr}^*, \sigma_{y_cr}^*, \sigma_{bx}^*$  を代入すると、 $\sigma_{by}^* = \text{const.}$  の相関関係式が得られ、さらに  $\sigma_{by}^*$  を  $\sigma_{by}$  とおくと、 $\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{bx} \cdot \sigma_{by}$  の座屈相関関係式が得られる。すなわち、

$$(\sigma_x / C_3 C_4 \sigma_{x_cr})^{\alpha_1} + (\sigma_y / C_5 C_6 \sigma_{y_cr})^{\alpha_2} - 1 = 0 \quad (30)$$

ここに、

$$C_3 = [1 - (\sigma_{by} / \sigma_{by_cr})^{\alpha_6}]^{1/\alpha_5}$$

$$C_4 = 1 - (\sigma_{bx} / C_7 \sigma_{bx_cr})^2$$

$$C_5 = [1 - (\sigma_{by} / \sigma_{by_cr})^{\alpha_8}]^{1/\alpha_7}$$

$$C_6 = [1 - (\sigma_{bx} / C_7 \sigma_{bx_cr})^{\alpha_4}]^{1/\alpha_3}$$

$$C_7 = [1 - (\sigma_{by} / \sigma_{by_cr})^{\alpha_{10}}]^{1/\alpha_9}$$

## (3) $\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{bx} \cdot \sigma_{by} \cdot \tau$ 相関関係式

5 荷重成分の作用下で、座屈条件を満足した時の各応力成分を  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{bx}, \sigma_{by}, \tau^{***}$  とする。 $\tau^{***} < \tau_{cr}$  という条件のもとで、これらの応力成分は、それぞれ式(20)、(21)、(22)、(23)から次のように求めることができる。すなわち、

$$\sigma_{x^{***}} = \sigma_{x_cr} [1 - (\tau^{***} / \tau_{cr})^{\alpha_{11}}] \quad (31)$$

$$\sigma_{y^{***}} = \sigma_{y_cr} [1 - (\tau^{***} / \tau_{cr})^{\alpha_{12}}] \quad (32)$$

$$\sigma_{bx^{***}} = \sigma_{bx_cr} [1 - (\tau^{***} / \tau_{cr})^2]^{0.5} \quad (33)$$

$$\sigma_{by^{***}} = \sigma_{by_cr} [1 - (\tau^{***} / \tau_{cr})^2]^{0.5} \quad (34)$$

ここで、 $\tau^{***} = \text{const.}$  に対する  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{bx}, \sigma_{by}$  の相関関係が  $\tau = 0$  の相関関係、すなわち、式(30)と相似であると仮定する。この応力成分  $\sigma_{x^{***}}, \sigma_{y^{***}}, \sigma_{bx^{***}}, \sigma_{by^{***}}$  を式(30)の  $\sigma_{x_cr}, \sigma_{y_cr}, \sigma_{bx_cr}, \sigma_{by_cr}$  に代入する。そして、 $\tau^{***}$  を  $\tau$  とおくと、5 荷重成分の相関関係式が次のように導出できる。まず、

$$\Gamma_B = (C_8 C_9 C_{10})^{\alpha_1} (C_{11} C_{12} C_{13})^{\alpha_2} [(\sigma_x / C_8 C_9 C_{10} \sigma_{x_cr})^{\alpha_1} + (\sigma_y / C_{11} C_{12} C_{13} \sigma_{y_cr})^{\alpha_2} - 1]$$

ここに、

$$C_8 = 1 - (\tau / \tau_{cr})^{\alpha_{11}}$$

$$C_9 = [1 - (\sigma_{by} / C_{14} \sigma_{by_cr})^{\alpha_6}]^{1/\alpha_5}$$

$$C_{10} = 1 - (\sigma_{bx} / C_{14} C_{15} \sigma_{bx_cr})^2$$

$$C_{11} = 1 - (\tau / \tau_{cr})^{\alpha_{12}}$$

$$C_{12} = [1 - (\sigma_{by} / C_{14} \sigma_{by_cr})^{\alpha_8}]^{1/\alpha_7}$$

$$C_{13} = [1 - (\sigma_{bx} / C_{14} C_{15} \sigma_{bx_cr})^{\alpha_4}]^{1/\alpha_3}$$

$$C_{14} = [1 - (\tau / \tau_{cr})^2]^{0.5}$$

$$C_{15} = [1 - (\sigma_{by} / C_{14} \sigma_{by_cr})^{\alpha_{10}}]^{1/\alpha_9}$$

となり、座屈相関関係式は、次式として得られる。

$$\Gamma_B = 0 \quad (35)$$

$\alpha_1$  から  $\alpha_{12}$  はすでに示した。式(35)の  $\Gamma_B$  に作用応力を代入し、 $\Gamma_B < 0$  であれば、座屈は生じず、さら

に作用応力を増加させ、 $\Gamma_B=0$  で座屈する。

### 3.3 新しい座屈相関関係式による座屈強度の計算法

新しい座屈相関関係式 (35) は、複雑な関係式になっているので、座屈応力を解析的に求めることができないが、数値的には容易に求められる。実際の解析対象には多くの種類がある。たとえば、指定された寸法の矩形板に、比例荷重が作用する場合の座屈応力を求める。また、荷重成分の中で 1 成分だけが増加する場合の座屈応力を求める。あるいは、指定された荷重のもとで座屈する板厚を求める。したがって、解析対象毎に最も効率的な計算方法は考えられるが、ここでは、一般的な解析対象を設定し、その計算方法を示す。

#### [解 析 対 象]

Fig. 1 に示した周辺単純支持矩形板 ( $a \times b \times t$ ) が、初期応力として  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_{bx}^0, \sigma_{by}^0, \tau^0$  を受けており、その状態に増加荷重、 $\eta\sigma_x, \eta\sigma_y, \eta\sigma_{bx}, \eta\sigma_{by}, \eta\tau$  が作用して座屈する時の荷重倍数  $\eta$  を求める。初期応力と増加荷重の組み合わせを適当に選択すると、種々の解析対象が設定される。

#### [解 析 法]

矩形板に生じている応力 ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{bx}, \sigma_{by}, \tau$ ) は、初期応力と増加荷重の和である。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \eta\sigma_x \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 + \eta\sigma_y \\ \sigma_{bx} &= \sigma_{bx}^0 + \eta\sigma_{bx} \\ \sigma_{by} &= \sigma_{by}^0 + \eta\sigma_{by} \\ \tau &= \tau^0 + \eta\tau \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

計算手順は次のようになる。

- (1) 単独荷重のもとでの座屈応力  $\sigma_{xcr}, \sigma_{ycr}, \sigma_{bxcr}, \sigma_{bycr}, \tau_{cr}$  を求める。
- (2) 係数  $\alpha_1$  から  $\alpha_{12}$  までを計算する。
- (3) 荷重倍数  $\eta = \eta_1$  なる適当な値を仮定し、座屈条件  $\Gamma_B(\eta_1)$  を計算する。

$\Gamma_B(\eta_1) < 0$  であれば座屈は生じない。さらに、 $\eta$  に適当な少し大きい値を仮定する。すなわち、 $\eta_i = \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 。これより  $\Gamma_B(\eta_i)$  を計算する。

- (4) Fig. 13 のように、 $\eta, \Gamma_B$  座標に、 $\eta_i$  と  $\Gamma_B(\eta_i)$  の点を描き、それらを曲線で結ぶ。この曲線が  $\eta$  軸と交わる点で  $\Gamma_B=0$  を満足して座屈が生じる。この交点の座標が  $\eta = \eta_{cr}$  である。この  $\eta_{cr}$  を式 (36) に代入すると座屈応力が求められる。

## 4 座屈相関関係式の精度の検討

### 4.1 2 荷重成分の座屈相関関係式

前章で周辺単純支持矩形板が 5 荷重成分を受けて座屈する場合の相関関係式を導出した。この式 (35) から逆

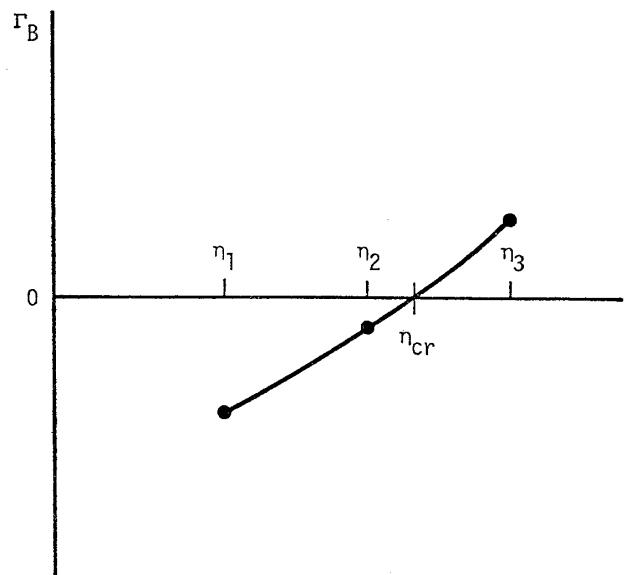


Fig. 13 Evaluation of  $\eta_{cr}$  by plotting  $\Gamma_B$  against  $\eta_i$

に、2 荷重成分に対する相関関係式 (14) から (23) までは簡単に導くことができる。このような荷重条件に対する相関関係式の精度は、すでに Fig. 2 から Fig. 11 に示したように、十分高く、実際の設計に使用できると考えられる。

ここで、非常に長い板に対する相関関係を少し詳細に検討すると、 $a/b$  が大きくなるに従って、相関曲線は急激な変化を示すようになるので、本論文で用いている相関関係式で精度よく近似することは、難しくなる。したがって、新しく提案した式 (35) は  $a/b$  が大きい、長い板に対しては精度が低いことは予想されるが、実用のアスペクト比に対しては、精度よく、しかも安全側の座屈値を与える。

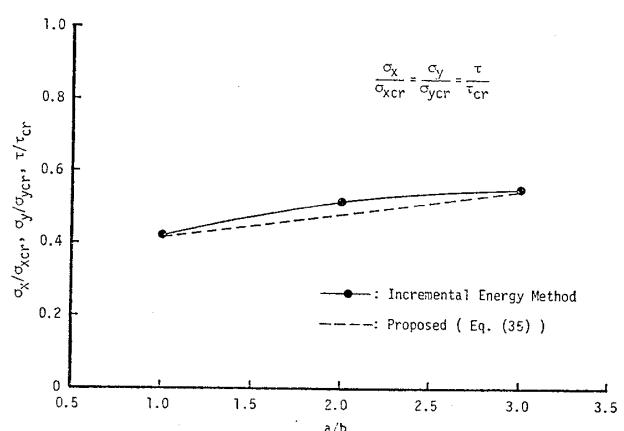


Fig. 14 Comparision between proposed equation, Eq. (35) and theoretical buckling load of rectangular plates subjected to  $\sigma_x, \sigma_y$  and  $\tau$

## 4.2 3荷重成分の座屈相関関係式

3荷重成分(4および5荷重成分に対しても同様)に対する座屈相関関係式を導出する場合に、2重成分に対する相関関係を、もう1つの荷重成分の変化に関係なく、相似であると仮定した(Fig. 12)。この仮定は、実用のアスペクト比ではよい近似であるが、上述したような長い板になると相似性が崩れ、座屈強度の推定値の精度が低下することがあるが、後述するように、あまり大きくない。新しい相関関係式は実用的に十分な精度をもち、かつ安全側であるので、本研究では、この仮定を改良していないが、相似と仮定した相関関係の改良によって、精度の向上を計ることはできる。

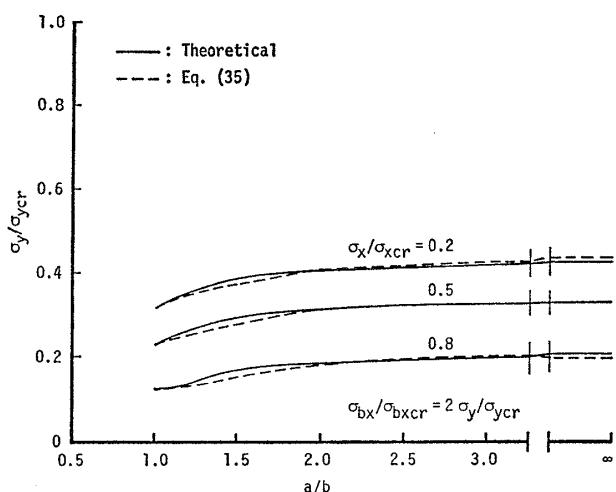


Fig. 15. a Comparison between proposed equation, Eq. (35) and theoretical buckling load of rectangular plates subjected to  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  and  $\sigma_{bx}$

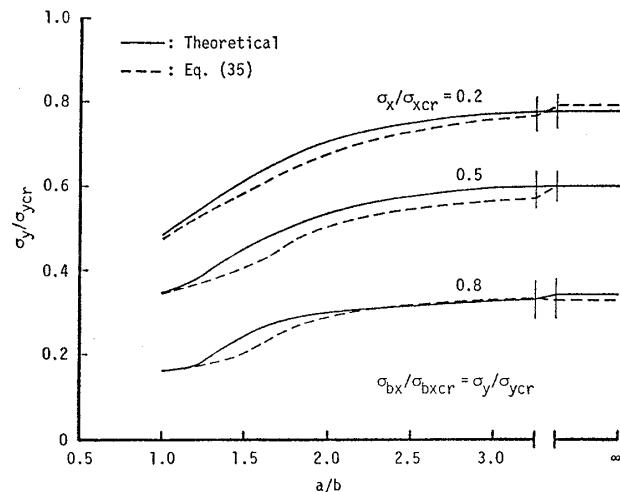


Fig. 15. b Comparison between proposed equation, Eq. (35) and theoretical buckling load of rectangular plates subjected to  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  and  $\sigma_{bx}$

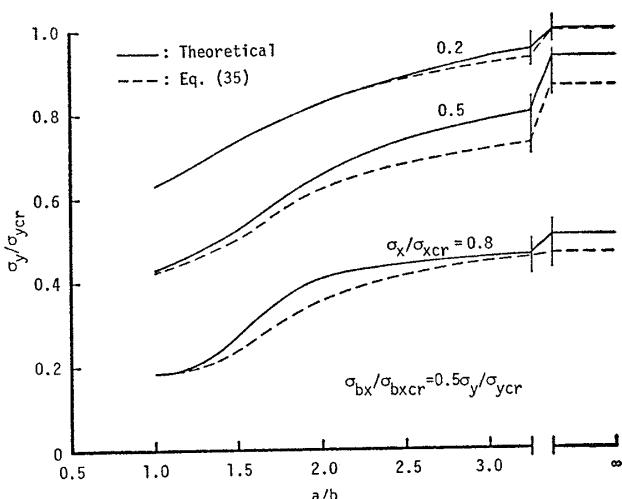


Fig. 15. c Comparison between proposed equation, Eq. (35) and theoretical buckling load of rectangular plates subjected to  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  and  $\sigma_{bx}$

式(35)から3荷重成分の座屈相関関係式を求めて、その精度をエネルギー法および増分エネルギー法の解析結果を用い、次の3荷重状態に対して検討する。

(a)  $\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \tau$  相関関係式

種々のアスペクト比に対して増分エネルギー法<sup>2)</sup>で計算した座屈強度と式(35)による結果をFig. 14に示す。式(35)の精度は高い。

(b)  $\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{bx}$  相関関係式

$\sigma_y/\sigma_{ycr}$ と $\sigma_{bx}/\sigma_{bxcr}$ の荷重比 $\eta$ を0.5, 1.0, 2.0ととり、種々のアスペクト比に対して計算した座屈強度<sup>7)</sup>と式(35)による結果をFig. 15に示す。式(35)の精度は極めてよい。

(c)  $\sigma_y \cdot \sigma_{bx} \cdot \tau$  相関関係式

$a/b = \infty$ に対して計算した座屈強度<sup>7)</sup>と式(35)による結果をFig. 16に示す。Fig. 16. aには、 $\sigma_y/\sigma_{ycr} = 0.5, 0.8$ に固定し、 $\tau/\tau_{cr} \cdot \sigma_{bx}/\sigma_{bxcr}$ 曲線を示した。これらは、いずれも相似であると仮定しているが、式(35)の精度は高い。他方、 $\sigma_{bx}/\sigma_{bxcr} = 0.0, 0.5, 0.8, 0.9$ として $\tau/\tau_{cr} \cdot \sigma_y/\sigma_{ycr}$ 曲線をFig. 16. bに示した。この場合も、曲線は相似である。前述したように $a/b = \infty$ であるので、精度はやや低下するが、基本的に安全側にあり、十分に実用に供し得る。

## 5 弹塑性座屈

これまで、弾性座屈を対象に5荷重成分に対する相関関係を導出した。もし、矩形板が、初期不整をもたない平板であると、一様な面内圧縮および剪断荷重のものでは、平板は全領域において弾性か塑性で座屈する。他方、曲げを受ける場合には、曲げモーメントが大きくなると、塑性領域が両辺から拡がり弾塑性座屈するよう

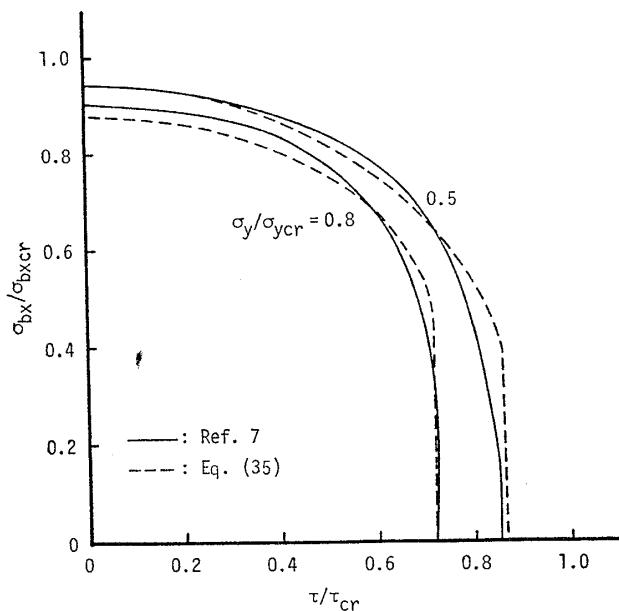


Fig. 16. a Comparison between proposed equation, Eq. (35) and theoretical buckling interaction relationship of infinite plate subjected to  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{bx}$  and  $\tau$

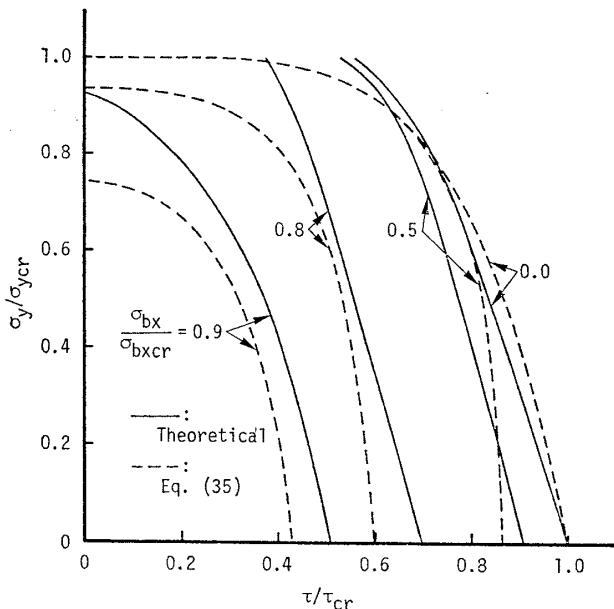


Fig. 16. b Comparison between proposed equation, Eq. (35) and theoretical buckling interaction relationship of infinite plate subjected to  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{bx}$  and  $\tau$

なる。

ところで、周辺単純支持矩形板が1方向圧縮を受けた場合の座屈および最終強度と細長比  $\lambda = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}$  の解析結果<sup>9)</sup>をFig. 17に示す ( $\sigma_y$ =降伏応力)。図の曲線は種々の初期たわみおよび残留応力の初期不整に対するもの

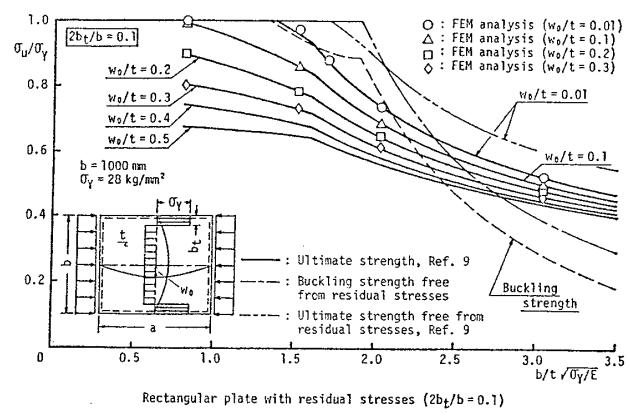


Fig. 17 Ultimate strength of a rectangular plate with initial imperfections due to welding

である。

初期不整がない場合には、矩形板は、弾性座屈して、その後に最終強度に達するか、塑性座屈して最終強度を示す。

この解析で仮定した残留応力分布は、座屈強度を低下させ、細長比  $\lambda$  によっては、弾塑性座屈が生じる。矩形板に初期たわみが存在すると、明確な座屈現象を示さずして最終強度に達する。細長比  $\lambda$  が 2.4 より大きい場合の薄板では、この最終強度は座屈強度よりも高く、初期不整の影響は大きくない。したがって、座屈強度は両者のうちの低い方の破損の条件になっている。これに対して、細長比  $\lambda$  が 2.4 より小さいような厚板では、最終強度は小さい初期たわみでも大きく低下し、座屈強度よりも低くなる。したがって、実際に生じていると考えられる程度の初期たわみがある場合の最終強度が座屈強度よりも低い破損の条件を与える。前者の弾性座屈では、大たわみを生じ、弾性安定状態を経て、塑性化が生じて崩壊する。これに対して、後者の塑性崩壊では大きい横たわみが生じる以前に塑性領域が大きく拡がって塑性崩壊するので、両者の崩壊機構は基本的に異なる<sup>10)</sup>。このような事実を考慮すると、設計においては、細長比の全域に対して低い方の破損の条件を採用することは1つの考え方として妥当であり、現在すでに、塑性崩壊に対して、弾性座屈強度相關関係を基準にして塑性修正係数を導入している設計基準もある。しかし、破損の機構の異なるものに対してどのような修正値を用いるべきかは不明なところが多く今後の研究成果を待たねばならない。

## 6 ロイド船級協会およびノルウェー船級協会の座屈相關関係式と精度

### 6.1 ロイド船級協会の座屈相關関係式

ロイド船級協会は下記の5荷重成分の作用する周辺単純支持矩形平板の座屈相關関係式<sup>3)</sup>を提案している。

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{xcr}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{ycr}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{bxcr}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{by}}{\sigma_{bycr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = 1 \quad (37)$$

ここに,  $\alpha = 0.6 + 0.4/\beta \quad 0.3 \leq \beta \leq 1.0$

$\alpha = 0.6 + 0.4\beta \quad 1.0 \leq \beta \leq 3.5$

$\beta = a/b$

上式の適用範囲は, アスペクト比が  $1/3.5 \leq a/b \leq 3.5$  を想定している。

ロイド船級協会の提案式の精度を検討するために, 理論解および新しい提案式の計算結果を Fig. 18 に示す。

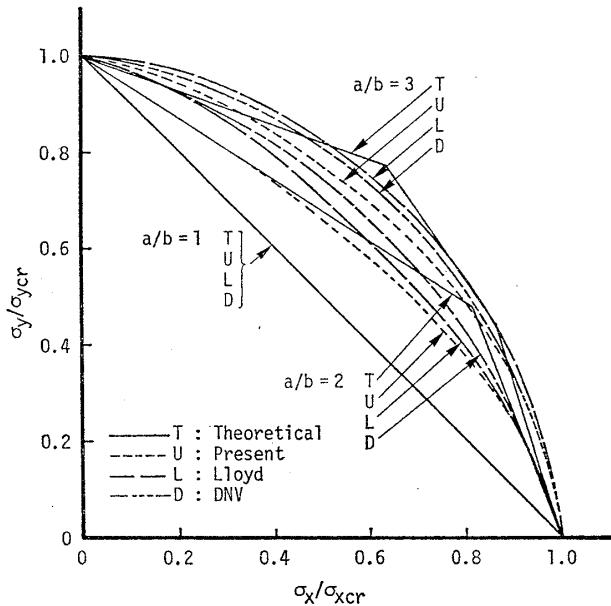


Fig. 18. a Accuracy of buckling interaction equations for  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$

このロイドの相関関係式を 2 荷重成分の場合に適用すると, 非常に精度がよい場合と悪い場合がある。特に, Fig. 18. b, d, e, f に示した例のように精度が悪くしかも, 非安全側になることがあるので式 (37) の適用に対しては注意を要する。面内曲げと剪断の組み合せに対しては, Fig. 10 および 11 のように式 (35) と式 (37) は一致するが, 他のすべての組み合わせ荷重に対する相関関係式は, 本論文の提案式 (35) の方が精度がよく, ほとんど安全側である。

ロイド船級協会の提案式では, 2 荷重成分以上の組み合わせに対しては, 無次元化した荷重項を付加している

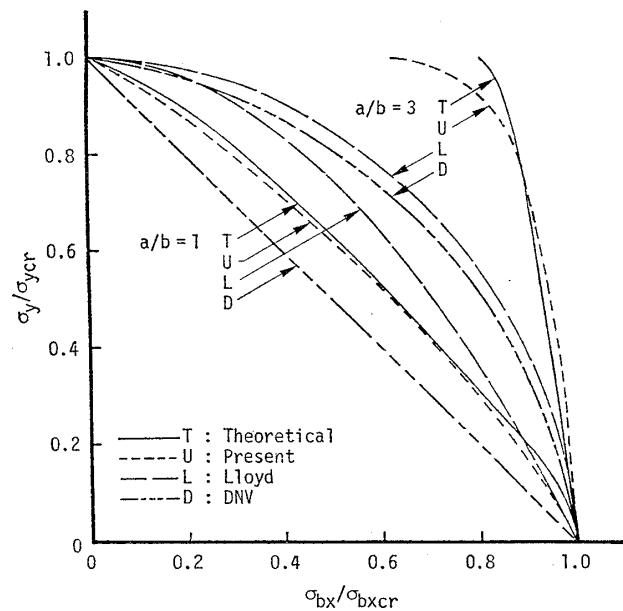


Fig. 18. c Accuracy of buckling interaction equations for  $\sigma_y$  and  $\sigma_{bx}$

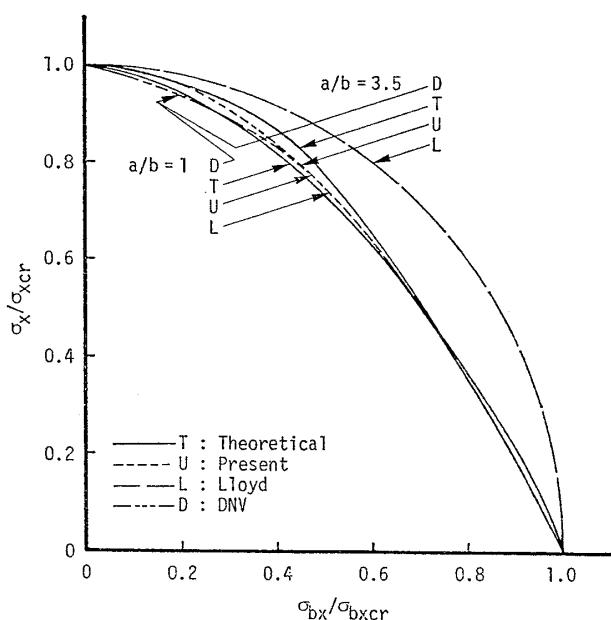


Fig. 18. b Accuracy of buckling interaction equations for  $\sigma_x$  and  $\sigma_{bx}$

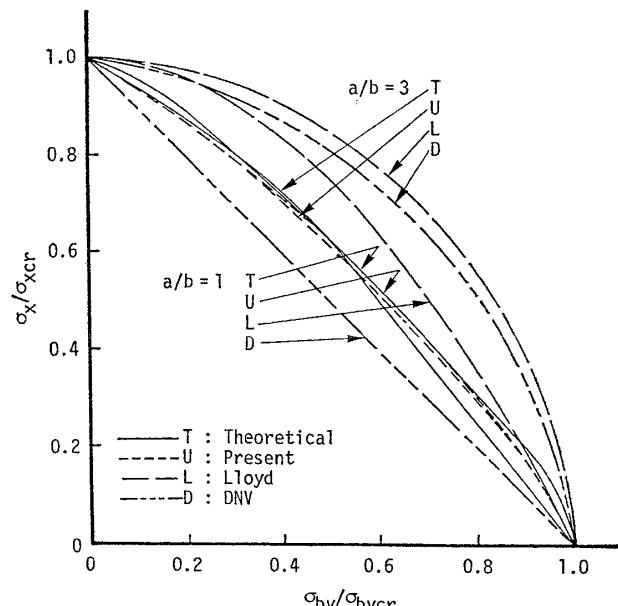


Fig. 18. d Accuracy of buckling interaction equations for  $\sigma_x$  and  $\sigma_{by}$

が、理論的根拠に乏しく、その妥当性は今後、検討されるべきである。

## 6.2 ノルウェー船級協会の座屈相関関係式

ノルウェー船級協会は矩形平板の座屈相関関係<sup>4)</sup>として下記を提案している。

$$\eta = \sqrt{\eta_{cs}^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 \eta_c^2} + \eta_c^2 \quad (38)$$

ここに、 $\eta$  = usage factor、安全率が 1.0 より大きいと見なされる場合には、 $\eta = 1.0$  をとる。

$\eta_{cs}$  = 剪断と 1 方向圧縮が作用する場合の usage factor

特に、 $\lambda > 1.4$  の薄板に対しては ( $\lambda$  は modified reduced slenderness ratio: 文献 4) の 3.3 に定義されている),

$$\eta_{cs} = \frac{1+\psi}{4} \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} + \sqrt{\left(\frac{3-\psi}{4} \frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2} \quad (39)$$

$\eta_c$  = 他の方向の圧縮に対する usage factor, すなわち、他の方向の  $\sigma/\sigma_{cr}$   
 $\sigma$  = いづれかの 1 方向の圧縮に対する基準応力  
 $\sigma_{cr}$  = 上記の基準応力の座屈値  
 $\psi$  = 平板の辺上における応力の比 (Fig. 19)。

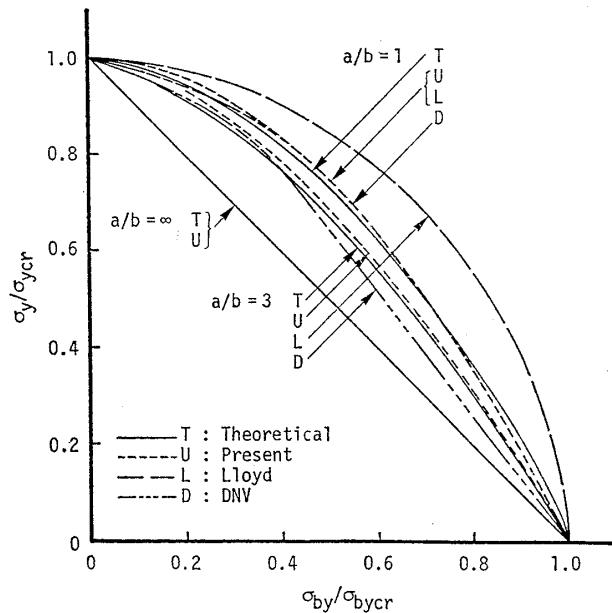


Fig. 18. e Accuracy of buckling interaction equations for  $\sigma_y$  and  $\sigma_{by}$

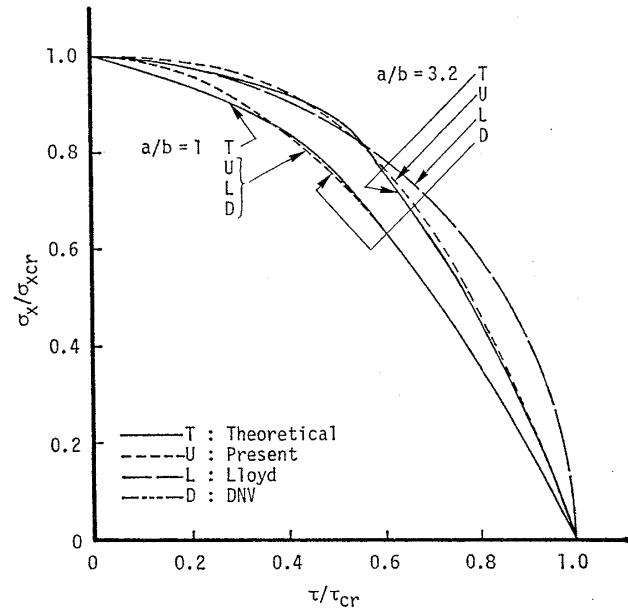


Fig. 18. g Accuracy of buckling interaction equations for  $\sigma_x$  and  $\tau$

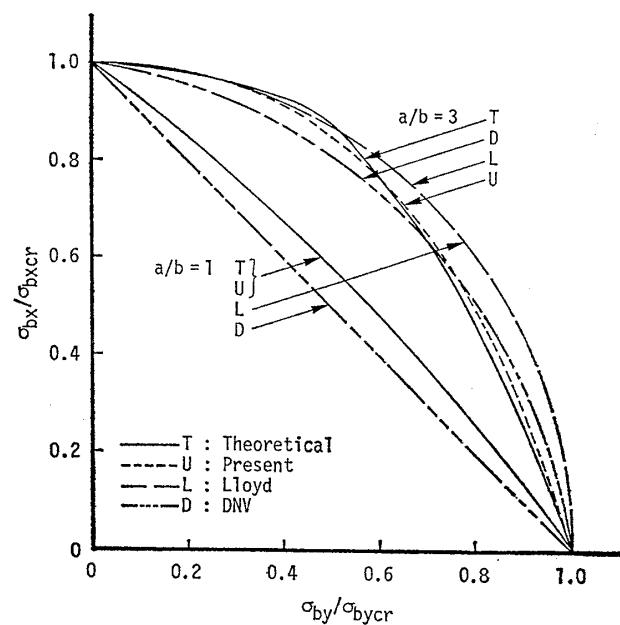


Fig. 18. f Accuracy of buckling interaction equations for  $\sigma_{bx}$  and  $\sigma_{by}$

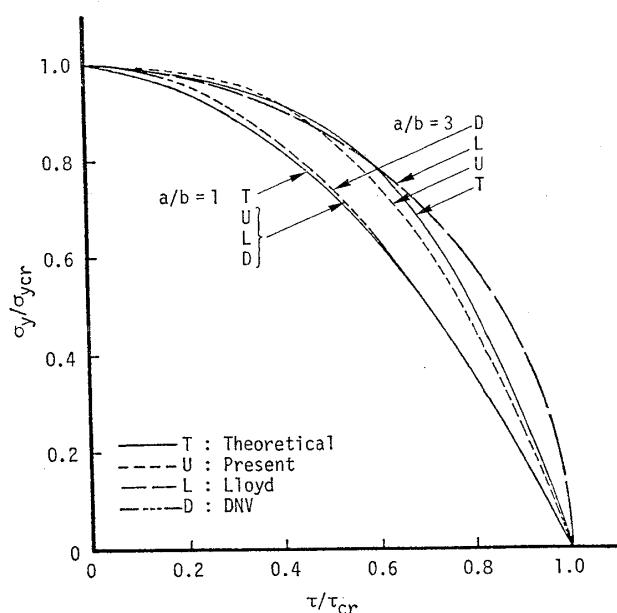
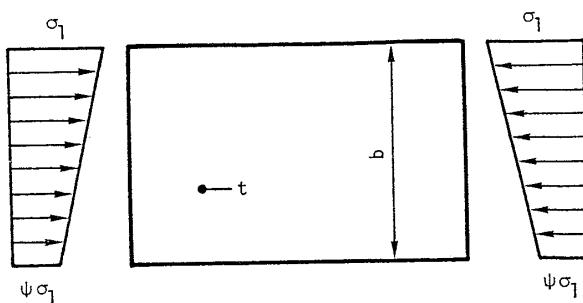


Fig. 18. h Accuracy of buckling interaction equations for  $\sigma_y$  and  $\tau$

Fig. 19 Stress multiplier  $\psi$  in Eq. (39)

これは、同じ方向の圧縮と曲げによる応力を組み合わせるのに使うもの。

また、同提案式では、 $\sigma_{cr}$ として下式を指定している。

$$\sigma_{cr} = C \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 = C \sigma_E \quad (40)$$

ここに、 $x$ 方向において

$$C = \frac{8.4}{\psi + 1.1} \quad 0 < \psi \leq 1$$

$$C = 7.6 - 6.4\psi + 10\psi^2 \quad -1 \leq \psi < 0$$

また、 $y$ 方向において

$$C = \left[ 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^2 \frac{2.1}{\psi + 1.1} \quad 0 < \psi \leq 1$$

$$C = (1 + \psi) C_a - \psi C_b + 10\psi(1 + \psi) \left( \frac{b}{a} \right)^2 \quad -1 < \psi < 0$$

$$C_a = 1.91 \left[ 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^2 \quad \frac{a}{b} \leq 1.5$$

$$C_b = 24 \left( \frac{b}{a} \right)^2 \quad \frac{a}{b} \leq 1.5$$

$$C_b = 2 + 16 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 8 \left( \frac{b}{a} \right)^4 \quad \frac{a}{b} > 1.5$$

この提案式(38)の精度を他の式と比較するために Fig. 18 に示している。DNV の提案式は、座屈強度を非常に精度よく推定する場合があるが、他方、複雑な相関関係を示すような場合には安全側過ぎる座屈強度を示す。

## 7 結 言

本論文では、5荷重成分を受ける周辺単純支持平板の座屈相関関係式を導出した。このために、まず、2荷重成分に対する座屈相関関係でこれまでに計算されていないものに対して解析を行い、それらに対する近似相関関係式を示した。この相関関係式の精度を保持したまま、5荷重成分に対する座屈相関関係式を理論的に導出した。この式を用いた座屈強度の計算法も示した。

導出された座屈相関関係式の精度を検討すると共に、ロイド船級協会およびノルウェー船級協会の提案式と比較し、それらよりも精度がよく実用的には十分な精度を

有しており、かつ基本的に安全側であることを確認した。

## 参 考 文 献

- 1) CORONA : Handbook of Structural Stability, CORONA, Tokyo, 1971.
- 2) 上田, 山川, 森: 平板の非線形挙動の解析, 日本造船学会論文集, 第126号, 1969.
- 3) LR PASS : Lloyd's Register's Plan Appraisal Systems For Ships.
- 4) DNV : Buckling Strength Analysis of Mobile Offshore Units, Det Norske Veritas, Classification Note No. 30.1, 1984.
- 5) K. Klöppel und J. Sheer : Beulwerte Ausgesetzter Rechteckplatten, Verlag Von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1960.
- 6) K. K. Kapur and B. J. Hartz : Stability of Plates Using the Finite Element Method, A. S. C. E., EM-2, 1966.
- 7) 日本溶接協会: 平板および補強板の座屈強度計算図表, 塑性設計委員会, 座屈小委員会, 塑性設計資料集(その4), 1971.
- 8) F. Bleich : Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, New York, 1952.
- 9) 上田, 矢尾: 溶接初期不整を有する矩形板の座屈強度に関する研究(第2報), 日本造船学会論文集, 第149号, 1981.
- 10) 上田, 矢尾, 中長他: 初期不整を有する矩形板の座屈強度に関する研究(第3報), 日本造船学会論文集, 第154号, 1983.

## 付 錄

単独荷重による周辺単純支持矩形板の座屈強度、 $\sigma_{xcr}$ ,  $\sigma_{ycr}$ ,  $\sigma_{bxcr}$ ,  $\sigma_{bycr}$ ,  $\tau_{cr}$ は次のように計算できる。すなわち、

$$\begin{aligned} \sigma_{xcr} &= k_x \sigma_E, \quad \sigma_{ycr} = k_y \sigma_E \\ \sigma_{bxcr} &= k_{bx} \sigma_E, \quad \sigma_{bycr} = k_{by} \sigma_E \\ \tau_{cr} &= k_\tau \sigma_E \end{aligned}$$

ここに、

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2$$

$E$  = 弹性係数,  $\nu$  = ポアソン比

また、上式の  $k_x, k_y, k_{bx}, k_{by}, k_\tau$  は  $a/b \geq 1$  に対して通常、次のように求めることができる。すなわち、

$$k_x = (m/\beta + \beta/m)^2 \quad (正解)$$

$$k_y = (1.0 + 1.0/\beta^2)^2 \quad (正解)$$

$$k_{bx} = 23.9$$

$$k_{by} = 23.9 \quad 1 \leq \beta \leq 1.5 \\ = 15.87 + 1.87\beta^2 + 8.6/\beta^2 \quad \beta > 1.5 \quad (近似式)$$

$$k_\tau = 5.34 + 4.0/\beta^2 \quad (近似式)$$

ここに、 $\beta = a/b$ 。また、 $m$  は  $x$  方向の座屈半波数であり、 $\beta \leq \sqrt{m(m+1)}$  を満足する最小整数として決まる。