

径間荷重を受ける骨組構造物の最終強度解析

——塑性選点法の応用——

正員 上 田 幸 雄* 正員 藤 久 保 昌 彦**
正員 為 広 正 起**

Ultimate Strength Analyses of Framed Structures under Mid-span Loads
——Application of Plastic Collocation Method——

by Yukio Ueda, *Member*

Masahiko Fujikubo, *Member*

Masayuki Tamehiro, *Member*

Summary

The plastic node method previously developed by the authors is very effective one for elastic-plastic analyses of the framed structures. In this method, the new mechanism of plastic hinge based on the plastic flow theory is introduced to the fully yielded nodal point of one dimensional finite element. Therefore, the elastic-plastic behavior of the framed structures subjected only to the concentrated loads can be exactly evaluated using the discrete model where nodal points are placed on the loading points and joints.

On the other hand, when the distributed loads act on the framed structures, possible yielded zones cannot be estimated in advance. Inappropriate discrete models lead to overestimation of the collapse load.

In this paper, applying the plastic collocation method developed newly by the authors, the advanced theory for elastic-plastic analyses of the framed structures subjected either to concentrated or to distributed mid-span loads is proposed. In this new theory, the exact collapse load, collapse mechanism, and mid-span deformation of such structures can be obtained by the discrete model where nodal points are placed only on the joints.

1 緒 言

海洋構造物をはじめとする骨組構造物の最終強度解析法の一つに塑性節点法がある^{1),2)}。本解析法は、任意形状連続体に適用可能な、有限要素法を基礎とした弾塑性解析法であるが、通常の領域積分型の弾塑性解析法と、塑性変位場の取り扱い方に本質的な差を持つ。本論文で取り扱う骨組構造物の解析の場合、要素には1次元部材要素を用いる。そして塑性化は要素の端部節点のみで判定し、塑性化した節点に対しては塑性ポテンシャル論に基づく塑性関節機構を導入して剛性評価を行う。このように塑性変形を節点のみに縮約するため、計算効率および崩壊メカニズムの把握の上で非常に有効な手段と考えられ、既に3次元骨組構造物に対しても、その適用性が実証されている^{3),4)}。

ところで骨組構造物に作用する荷重を考えた場合、その形態上、集中荷重と分布荷重に分類できる。この内、集中荷重のみが作用する場合には、解析前に内力が極大になる位置が明らかであり、可能な降伏断面を予想することができるので、これらの断面間を単位要素とした分割を用いれば塑性節点法により厳密な崩壊挙動の追跡が可能となる。これに対し、積載物重量、流体力、慣性力に代表される径間分布荷重の作用する場合、径間の降伏断面形成位置を正確に予想することはできない。従来の塑性節点法では塑性判定点が要素端部に限られるため、この種の問題の場合、荷重を等価集中力系に置き換えた上で、その作用点に節点を設けて崩壊挙動を評価した。しかし、この手法は径間要素数の増大をもたらすだけでなく、真の崩壊断面に節点が位置しない場合が起こり、崩壊荷重の上界値を推定することになる。

以上の問題点の解決のため、本論文では別報⁵⁾にて提案した塑性節点法を拡張した塑性選点法を骨組構造物の

* 大阪大学溶接工学研究所

** 広島大学工学部

最終強度解析に応用する。そして集中荷重と分布荷重を径間荷重として受ける構造物に対して、部材結合部のみに節点を配した要素分割で、厳密な崩壊荷重、崩壊メカニズム、さらに径間変位を求める理論を展開する。

ハイブリッド応力法を用いて同様の定式化を行った例に近藤の研究があるが⁶⁾ 変位法を用いて行われた研究はこれまでにない。本論文は、塑性選点法を応用することにより、この種の問題を初めて変位法の立場から研究したものである。なお材料は完全弾塑性体とし、塑性化の判定には軸力の影響も考慮する。また、基礎理論の定式化に際して、変形は微小とし平面骨組問題のみを取り扱う。

2 径間荷重を受ける梁・柱要素の弾塑性解析の基礎理論

2.1 径間荷重と断面力

Fig. 1 に径間荷重を受ける梁・柱要素を示す。要素のたわみ、および軸方向変位に x の 3 次および 1 次の変位関数を用いる微小変形要素である。本論文では弾性および塑性挙動を通じて径間をこの 1 要素で解析する。その両端節点を i, j とし、径間荷重としては、 x および z 軸方向の径間分布荷重 $q_x(x)$ と $q_z(x)$, N 個の集中横荷重 $P_s (s=1, \dots, N)$ を考える。また節点力、節点変位をそれぞれ次のように表わす。

$$\{X_n\} = \{X_i \ Z_i \ M_i \ X_j \ Z_j \ M_j\}^T \quad (1)$$

$$\{u_n\} = \{u_i \ w_i \ \theta_i \ u_j \ w_j \ \theta_j\}^T \quad (2)$$

さて、Fig. 1 に示した節点力と径間荷重の作用下で釣り合い状態にある要素に生じている径間軸力、モーメントをそれぞれ $N(x)$, $M(x)$ で表わすと、これらは節点力による成分 N_n , M_n と径間荷重による要素内付加成分 N_q , M_q の和となる。

$$\left. \begin{aligned} N(x) &= N_n(x) + N_q(x) \\ M(x) &= M_n(x) + M_q(x) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上式の N_n , M_n はそれぞれ節点力により次式で与えられる。

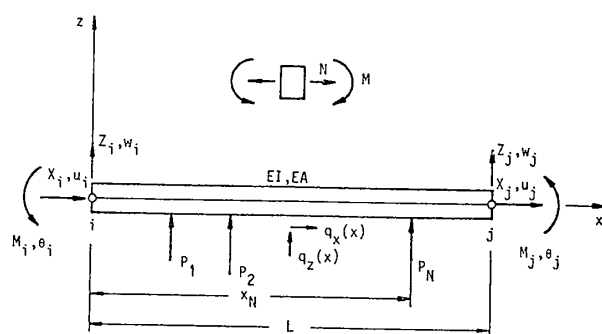


Fig. 1 Beam-column element

$$\left. \begin{aligned} N_n(x) &= -X_i \\ M_n(x) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_i - \frac{x}{L} M_j \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

一方 N_q は、次式となる。

$$N_q(x) = -\int_0^x q_z dx \quad (5)$$

また M_q は要素を両端支持した時のモーメント分布であり q_z のみ作用する場合、次式で与えられる。

$$M_q(x) = -\int_0^x \left(\int_0^x q_z dx \right) dx + \frac{x}{L} \int_0^L \left(\int_0^x q_z dx \right) dx \quad (6)$$

集中荷重 P_s ($s=1, \dots, N$) のみが作用する場合は、 m 番目の集中荷重の作用点 ($x=x_m$) における M_q は次式となる。

$$M_q(x_m) = -\sum_{s=1}^{m-1} P_s (x_m - x_s) + \frac{x_m}{L} \sum_{s=1}^N P_s (L - x_s) \quad (7)$$

この時、各荷重 P_s の作用点間では M_q は直線分布する。 q_z , P_s ($s=1, \dots, N$) が、ともに作用する時の M_q は、式 (6), (7) の和である。Fig. 2 にモーメント場 M , M_n , M_q の関係を示す。

2.2 塑性選点法による弾塑性剛性方程式の導出

2.2.1 径間塑性関節と塑性条件

Fig. 2 から明らかなように径間荷重が作用する場合は、径間に降伏断面が生じ得る。そこで本論文では、荷重増分の各段階で、要素内部の応力場をチェックし、塑性条件を満足した断面には径間塑性関節を導入する。このように、節点以外の点の塑性化を取り扱うのは、新しく提案した塑性選点法の一応用例であり、以後本解析法も塑性選点法と呼ぶことにする。

Fig. 3 (a) に示す要素内の任意点 m ($x=x_m$) に注目する。この点の断面力を

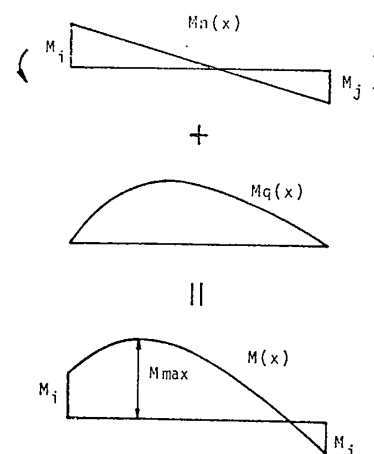


Fig. 2 Components of bending moment

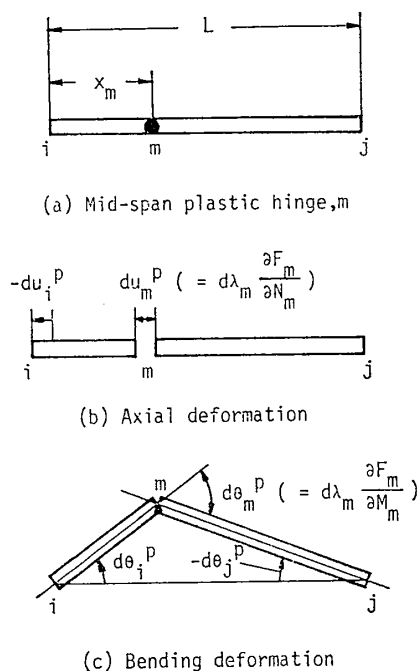


Fig.3 Plastic deformation in an element with mid-span plastic hinge, m

$$\{R_m\} = \{N_m, M_m\}^T \quad (8)$$

で表わすと、点 m の全断面塑性条件 F_m は次式のようにになる。

$$F_m = F_m(\{R_m\}) = F_m(N_m, M_m) \quad (9)$$

矩形断面部材の場合、具体的には、

$$F_m = \left(\frac{N_m}{N_Y} \right)^2 + \frac{|M_m|}{M_Y} - 1 = 0 \quad (10)$$

ここで、 N_Y, M_Y ；部材の全断面塑性軸力およびモーメント

上式 (9) に、式 (3), (4) を代入すると F_m が次式のように、両節点の節点力と径間荷重の関数で表わされる。すなわち、

$$F_m = F_m(X_i, M_i, M_j, N_q(x_m), M_q(x_m)) \quad (11)$$

なお、点 m が節点 ($x=0, L$) に位置する時は式 (4) から式 (7) までの式より知られるように、 F_m はその節点の節点力のみの関数となる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} F_i &= F_i(X_i, M_i) \\ F_j &= F_j(-X_i + N_q(L), M_j) = F_j(X_j, M_j) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

一方、材料を完全弾塑性体とすると、塑性化断面で負荷状態が続くためには次の条件を満足せねばならない。

$$dF_m = \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{dR_m\} = 0 \quad (13)$$

2.2.2 径間関節を有する要素の塑性変形特性

径間点 m で塑性条件、式 (9) を満足し降伏断面が生じた場合を考える。塑性選点法では、塑性条件 F_m を節点力で表わした式 (11) を塑性ポテンシャルとみなし、塑性ポテンシャル論に従って、塑性変位増分を次のように定義する。

$$\{du_n^p\} = d\lambda_m \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial X_n} \right\} \quad (14)$$

ここで、 $d\lambda_m$ ；positive scalar

これより、塑性変位増分は、節点に生じることになる。全節点変位増分 $\{du_n\}$ は、次式のように、弾性、塑性各成分の和となる。

$$\{du_n\} = \{du_n^e\} + \{du_n^p\} \quad (15)$$

ここで、 $\{du_n^e\}, \{du_n^p\}$ ；弾性および塑性節点変位増分要素の変位は、以上の $\{du_n^e\}, \{du_n^p\}$ によって規定される。よく知られているように、弾性変位は、弾性節点変位増分 $\{du_n^e\}$ と内挿関数である変位関数により表わされる。

次に、塑性変位を考える。点 m の塑性化により、要素には本来、点 m のみに塑性変形が生じる。塑性ポテンシャル論に従えば、式 (9) の F_m を用いて、点 m の塑性変位増分 $\{du_m^p\}$ は次式で与えられる。

$$\{du_m^p\} = \left\{ \frac{du_m^p}{d\theta_m^p} \right\} = d\lambda_m \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\} \quad (16)$$

ここで、 $du_m^p, d\theta_m^p$ ；Fig.3 (b), (c) に示す不連続変位およびたわみ角

他方、式 (4), (11) を式 (14) に代入すると、 $\{du_n^p\}$ は具体的に次の形となる。

$$\begin{aligned} \{du_n^p\} &= \{du_i^p \ dw_i^p \ d\theta_i^p \ du_j^p \ dw_j^p \ d\theta_j^p\}^T \\ &= d\lambda_m \left\{ -\frac{\partial F_m}{\partial N_m} \ 0 \ \left(1 - \frac{x_m}{L}\right) \cdot \frac{\partial F_m}{\partial M_m} \ 0 \ 0 \right. \\ &\quad \left. -\frac{x_m}{L} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial M_m} \right\}^T \end{aligned} \quad (17)$$

上式の $d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial N_m}, d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial M_m}$ は式 (16) の $du_m^p, d\theta_m^p$ そのものである。式 (17) は、点 m の塑性化に起因して、両節点に塑性変形が生じることを示している。ところで、式 (16), (17) を用いると次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} -du_i^p &= du_m^p \\ d\theta_i^p - d\theta_j^p &= d\theta_m^p \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

すなわち、Fig.3 (b), (c) が示すように、部材を剛体として塑性節点変位だけの変位を与えた場合の幾何学的関係が成立する。これより塑性節点変位増分 $\{du_n^p\}$ は点 m の塑性変位増分 $\{du_m^p\}$ を剛体的に節点にふりわけた量であることがわかる。なお、ここでは径間点 m の塑性化を議論したが、節点が塑性化した時は式 (12), (14) より、その節点のみに塑性変形が生じる。

2.2.3 変分原理を用いた塑性変形特性の考察

ここでは、仮想仕事の原理に基づいて、式 (14) の塑性節点変位増分 $\{du_n^p\}$ を用いる塑性選点法により、径間関節が生じた部材の塑性挙動を1要素で正しく評価できることを明らかにする。

今、1つの要素が節点力 $\{X_n + dX_n\}$ 、径間荷重 $q_x + dq_x, q_z + dq_z$ および $P_s + dP_s$ ($s=1, \dots, N$) の作用下

で釣り合い状態にあり、径間の m 点に塑性断面が生じているとする。この要素に仮想節点変位増分 $\{\delta du_n\}$ を与えた時の内力および外力のなす仕事 δW_i , δW_e を考える。まず式 (15) より, $\{\delta du_n\}$ は次式のように弾性成分と塑性成分の和となる。

$$\{\delta du_n\} = \{\delta du_n^e\} + \{\delta du_n^p\} \quad (19)$$

この $\{\delta du_n^e\}$ および $\{\delta du_n^p\}$ により生じる内部仮想仕事, 外部仮想仕事をそれぞれ δW_i^e , δW_e^e および δW_i^p , δW_e^p とすると, 全仮想仕事 δW_i , δW_e は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \delta W_i &= \delta W_i^e + \delta W_i^p \\ \delta W_e &= \delta W_e^e + \delta W_e^p \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

上式右辺の各項は具体的に次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \delta W_i^e &= \int_{V_e} \{\delta d\epsilon\}^T \{\sigma + d\sigma\} dV \\ \delta W_i^p &= \int_{V_p} \{\delta d\epsilon^p\}^T \{\sigma + d\sigma\} dV \\ &= \int_{V_p} \{\delta d\epsilon^p\}^T \{\sigma\} dV \\ \delta W_e^e &= \{\delta du_n^e\}^T \{X_n + dX_n\} \\ &\quad + \int_0^L \delta du^e (q_x + dq_x) dx \\ &\quad + \int_0^L \delta dw^e (q_z + dq_z) dx \\ &\quad + \sum_{s=1}^N \delta dw_s^e (P_s + dP_s) \\ \delta W_e^p &= \{\delta du_n^p\}^T \{X_n + dX_n\} \\ &\quad + \int_0^L \delta du^p (q_x + dq_x) dx \\ &\quad + \int_0^L \delta dw^p (q_z + dq_z) dx \\ &\quad + \sum_{s=1}^N \delta dw_s^p (P_s + dP_s) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここで V_e ; 弾性領域

V_p ; 塑性領域

$\delta du^e, \delta dw^e$; $\{\delta du_n^e\}$ により生じる要素内弾性
仮想変位増分

$\delta du^p, \delta dw^p$; $\{\delta du_n^p\}$ により生じる要素内塑性
仮想変位増分

$\delta dw_s^e = \delta dw^e(x_s)$, $\delta dw_s^p = \delta dw^p(x_s)$

x_s ; 荷重 P_s の作用点の x 座標

上式の δW_i^p においては, 次の完全弾塑性体の塑性負荷状態での条件式を用いている。

$$\{\delta d\epsilon^p\}^T \{d\sigma\} = 0 \quad \text{in } V_p \quad (22)$$

さて, 前項で述べたように, 要素の弾性領域は弾性節点変位 $\{u_n^e\}$ と変位関数により変位場が規定される弾性要素そのものである, 次の関係が成立する。

$$\delta W_i^e = \delta W_e^e \quad (23)$$

したがって, 要素全体の仮想仕事の原理 $\delta W_i = \delta W_e$ と

式 (20) の関係から, 塑性領域における仮想仕事の関係は次式となる。

$$\delta W_i^p = \delta W_e^p \quad (24)$$

以下, 式 (24) を用いて塑性変形特性を考察する。

式 (21) の δW_e^p に含まれる $\{\delta du_n^p\}$ は, 式 (17) より次式で定義される。

$$\{\delta du_n^p\} = \delta d\lambda_m \left\{ -\frac{\partial F_m}{\partial N_m} 0 \left(1 - \frac{x_m}{L}\right) \cdot \frac{\partial F_m}{\partial M_m} 0 0 \right. \\ \left. - \frac{x_m}{L} \cdot \frac{\partial F_m}{\partial M_m} \right\}^T \quad (25)$$

一方, Fig. 3 (b), (c) のように, 部材を剛体とした塑性変位場を仮定すると, δdu^p , δdw^p は, 具体的に次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \delta du^p &= \begin{cases} \delta du_i^p & (0 \leq x \leq x_m) \\ 0 & (x_m < x \leq L) \end{cases} \\ \delta dw^p &= \begin{cases} x \delta d\theta_i^p & (0 \leq x \leq x_m) \\ -(L-x) \delta d\theta_j^p & (x_m \leq x \leq L) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式 (25), (26) を式 (21) の δW_e^p に代入し式を展開すると, 結局式 (24) は次式となる。

$$\begin{aligned} \delta W_i^p = \delta W_e^p &= \delta d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial N_m} (N_m + dN_m) \\ &\quad + \delta d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial M_m} (M_m + dM_m) \\ &= \delta d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial N_m} N_m + \delta d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial M_m} M_m \\ &= \delta du_m^p N_m + \delta d\theta_m^p M_m \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{ここで, } \frac{\partial F_m}{\partial N_m} dN_m + \frac{\partial F_m}{\partial M_m} dM_m = dF_m = 0$$

ところで, 式 (27) の右辺は, 点 m で部材を 2 要素に分割し, 節点となった点 m に塑性節点機構を導入した時生じる内部塑性仕事に他ならない。また, この時, 両分割要素は点 m の回りに Fig. 3 (b), (c) と同様, 塑性変形による剛体変位を生じる。

以上の結果, 式 (17) の $\{\delta du_n^p\}$ を用いる塑性選点法によれば, 点 m に実際に塑性関節を設けた場合と同じ変形機構および同じ塑性仕事を生じる部材特性が 1 要素のみで厳密に得られることが明らかになった。なお, 径間関節が k 個 ($k \geq 1$) 存在する場合, 各点の塑性化に起因して生じる式 (25), (26) の諸量を合計した仮想変位を式 (21) の δW_e^p に代入することにより,

$$\delta W_i^p = \delta W_e^p = \sum_{m=1}^k (\delta du_m^p N_m + \delta d\theta_m^p M_m) \quad (28)$$

の形で式 (27) の関係が同じく成立する。これより, 複数の径間関節が生じた部材についても 1 要素でその剛性を評価できること, また, Fig. 3 (b), (c) の塑性変位場が重畳できることも明らかとなった。

2.2.4 弾塑性剛性方程式の定式化

要素の増分型弾性剛性方程式は, 次式で表わすことができる。

$$\{dX_n\} + \{dX_{eq}\} = [K^e]\{du^e\} \quad (29)$$

ここで, $\{dX_{eq}\}$; 径間荷重による等価節点力

$[K^e]$; 弾性剛性行列

この要素内の k 個の断面が塑性化した場合を考える。径間における崩壊機構の形成を考えると、節点を除いて径間に存在できる関節の数は最大2である。塑性条件式は次式となる。

$$F_m = 0 \quad (m=1, 2, \dots, k) \quad (30)$$

また, 塑性節点変位増分は

$$\{du_n^p\} = \sum_{m=1}^k d\lambda_m \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial X_n} \right\} \quad (31)$$

となり, まとめると次式のように表わすことができる。

$$\{du_n^p\} = [\Phi]\{d\lambda\} \quad (32)$$

$$\text{ここで, } [\Phi] = \left[\left\{ \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \right\} \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \right\} \dots \left\{ \frac{\partial F_k}{\partial X_n} \right\} \right]$$

$$\{d\lambda\} = \{d\lambda_1 \ d\lambda_2 \dots d\lambda_k\}^T$$

式 (15), (32) を式 (29) に代入して次式が得られる。

$$\{dX_n\} + \{dX_{eq}\} = [K^e](\{du_n\} - [\Phi]\{d\lambda\}) \quad (33)$$

一方, 各塑性断面で負荷状態が続くためには, 内力は次式を満たさねばならない。

$$dF_m = \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{dR_m\} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, k) \quad (34)$$

上式の $\{dR_m\}$ は, 式 (3), (4) から次式となる。

$$\{dR_m\} = [A_m]\{dX_n\} + \{dQ_m\} \quad (35)$$

$$\text{ここで, } [A_m] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{x_m}{L} & 0 & 0 & -\frac{x_m}{L} \end{bmatrix}$$

$$\{dQ_m\} = \{dN_q(x_m) \ dM_q(x_m)\}^T$$

式 (35) を式 (34) に代入すると, 式 (34) は次のように $\{dX_n\}$ に関する負荷条件式の形に置換できる。

$$\begin{aligned} dF_m &= \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T [A_m]\{dX_n\} + \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{dQ_m\} \\ &= \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial X_n} \right\}^T \{dX_n\} + \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}^T \{dQ_m\} \\ &= 0 \quad (m=1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\text{ここで, } \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial X_n} \right\} = [A_m]^T \left\{ \frac{\partial F_m}{\partial R_m} \right\}$$

式 (36) をまとめて次式で表わす。

$$[\Phi]^T \{dX_n\} + \{dQ\} = \{0\} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \{dQ\} &= \left\{ \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial R_1} \right\}^T \{dQ_1\}, \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial R_2} \right\}^T \{dQ_2\}, \right. \\ &\quad \left. \dots, \left\{ \frac{\partial F_k}{\partial R_k} \right\}^T \{dQ_k\} \right\}^T \end{aligned}$$

これに, 式 (33) の $\{dX_n\}$ を代入すると, 次の $\{d\lambda\}$ に関する連立一次方程式が得られる。

$$[\Phi]^T [K^e] (\{du_n\} - [\Phi]\{d\lambda\}) - [\Phi]^T \{dX_{eq}\} + \{dQ\} = \{0\} \quad (38)$$

これより $\{d\lambda\}$ は次式となる。

$$\begin{aligned} \{d\lambda\} &= ([\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1} ([\Phi]^T [K^e] \{du_n\} \\ &\quad - [\Phi]^T \{dX_{eq}\} + \{dQ\}) \end{aligned} \quad (39)$$

これを再び式 (33) に代入すると弾塑性剛性方程式が次のように求まる。

$$\{dX_n\} + \{dX_{eq}^p\} = [K^p]\{du_n\} \quad (40)$$

ここで, $\{dX_{eq}^p\} = \{dX_{eq}\}$

$$- [K^e] [\Phi] ([\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1}$$

$$\times ([\Phi]^T \{dX_{eq}\} - \{dQ\})$$

; 弾塑性等価節点力

$$[K^p] = [K^e] - [K^e] [\Phi] ([\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1}$$

$$\times [\Phi]^T [K^e]$$

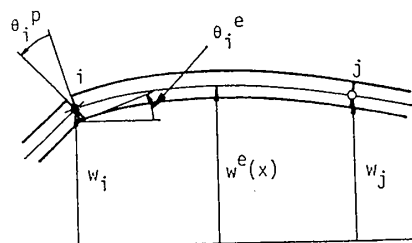
; 弾塑性剛性行列

2.3 要素径間変位の計算法

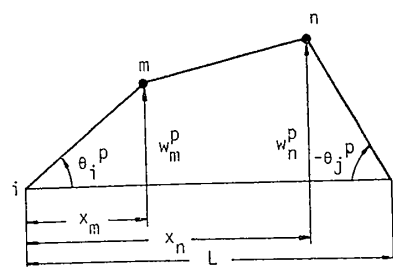
前節で導いた式 (40) を用いれば, 径間荷重を受ける骨組構造物の崩壊荷重, 崩壊メカニズムを1径間を単位要素とする最小の要素分割で厳密に求めることができる。しかし, 変形は部材結合部での値しか直接には得られない。そこで本節では2.2.2で述べた本解析理論における要素の弾塑性変形特性を参考に, 径間変位の計算法を示す。なお, ここで求める変位は, 従来の塑性節点法で得られる変位に相当する。すなわち塑性変形を関節部に縮約し, 他の部分は弾性変形すると仮定した場合の変位である。

2.3.1 径間たわみ

塑性断面を有する要素の径間全たわみ $w(x)$ は, 弾性領域のたわみ $w^e(x)$ と, Fig.3 (c) に示したモードの



(a) Elastic component



$$\theta_i^p = \theta_i^p|_m + \theta_i^p|_n$$

$$\theta_j^p = \theta_j^p|_m + \theta_j^p|_n$$

(b) Plastic component

Fig.4 Mid-span deflection

径間塑性たわみ $w^p(x)$ の和となる。

$$w(x) = w^e(x) + w^p(x) \quad (41)$$

まず, w^e は, 通常の弾性たわみ計算法より得られる。ただし, 境界条件として, 弾性領域の端部たわみ角に Fig. 4 (a) に示す次式の θ_i^e を用いなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i^e &= \sum_s (d\theta_i - d\theta_i^p) \\ d\theta_i^p &= \sum_{m=1}^k d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial M_i} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ここで, $\sum_s$; 最初の径間関節が生じた以後の全荷重 step についての合計

k ; 要素内全塑性関節数

一方, w^p は, 節点以外の径間関節が生じているとき付加されるもので, 剛体モードを考慮して, 幾何学的に導かれる。たとえば, Fig. 4 (b) のように, 2つの径間関節 m, n が存在する場合, 点 m, n における w_m^p, w_n^p は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} w_m^p &= (\theta_i^p|_m + \theta_j^p|_n) x_m \\ w_n^p &= -(\theta_j^p|_m + \theta_i^p|_n) (L - x_m) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

ここで, $\theta_i^p|_m = \sum_s d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial M_i}$

$$\theta_j^p|_m = \sum_s d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial M_j}$$

2.3.2 径間軸変位

たわみと同様, 径間の全軸変位 $u(x)$ は弾性, 塑性各成分 $u^e(x), u^p(x)$ の和である。 u^e は変位関数に一次式を用いているため, 弾性節点変位より次式で得られる。

$$u^e(x) = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x & x \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_j^e \end{Bmatrix} \quad (44)$$

一方, u^p は, Fig. 3 (b) の点 m のみ塑性化した場合,

$$u^p(x) = \begin{cases} -\sum_s du_i^p = -\sum_s d\lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial X_i} & (0 \leq x \leq x_m) \\ 0 & (x_m < x \leq L) \end{cases} \quad (45)$$

となる。径間2関節の場合も, 重畳の手続きにより u^p が求まる。

2.4 径間関節の移動

分布荷重を受ける部材において, その径間点が塑性化しても, 構造全体の崩壊メカニズムの形成までに至らな

い場合, 塑性化後の内力変動によって上記部材には径間関節の移動が生じる。第 n 荷重段階で, 径間点 m が塑性化した部材の内力分布を Fig. 5 に実線で示す。式 (40) の弾塑性剛性方程式を適用した時, 第 $n+1$ 荷重段階の荷重増加に対して部材内力は破線のように変動する。しかし, 実際には静的許容場であるためには, 最大内力点, すなわち径間関節位置は除荷を伴いながら連続的に移動せねばならない。

この現象を解析するために, 本論文では以下の解析手法を提案する。関節の移動現象の連続的な追跡は, 有限な荷重増分を与える増分型解析では不可能である。そこで初期径間関節 m の両側に Fig. 5 に示す微小距離離れたチェックポイント p, q を設け, まず p, q いずれかが塑性化するまで解析する。今, p 点が新たに塑性化したとすると (step $n+1$), 次の荷重増分に対しては p と m の両点を径間関節として解析し, いずれか一方の除荷を $d\lambda < 0$ より判定する。そして, 改めて step $n+1$ の状態から, 負荷点のみを径間関節として解析する。 m, p ともに負荷状態を維持することは, 内力変動を拘束することを意味するため, 実際上起こらない。以上の手順を崩壊メカニズムの形成まで繰り返して関節の移動を評価する。 m 点と p 点が降伏断面である場合には, m, p 間で内力は, 塑性条件を超えており, 静的許容場ではないが, これに対しては, 崩壊荷重が得られた後に最大内力が塑性条件を丁度満足するように崩壊荷重を減少させ, その下界値を求める。なお径間集中荷重が作用する場合は, 明らかに径間関節の移動は生じない。

3 解 析 例

径間荷重を受ける骨組構造物の塑性選点法による最終強度解析例を示す。荷重は比例荷重とした。分布径間荷重を受ける部材に対しては, 塑性条件を満足する位置を数値的に精度良く求め, また, いかなる塑性化点も初期塑性時に塑性条件を超えないように, 荷重増分を調節した。径間の塑性関節が移動する場合のチェックポイント間隔は, 部材長の $1/40$ とした。なお, ここでは比較のため, 塑性解析法で厳密解の得られている問題を取りあげる⁷⁾。

(1) 等分布荷重を受ける一端固定他端支持梁

Fig. 6 に荷重と部材中央のたわみの関係を示す。実線が軸力 $4P$ を加えない場合, 破線が加えた場合である。解析は1要素のみで行い, 軸力のない場合の自由度は支持点の回転角1つのみである。径間変位は2.3節の式より求めた。

実線の曲げ塑性崩壊の場合, 崩壊荷重, 崩壊機構, そしてたわみともすべて厳密解と一致している。軸力が作用する場合も, 部材内で軸力は一様と考えているため,

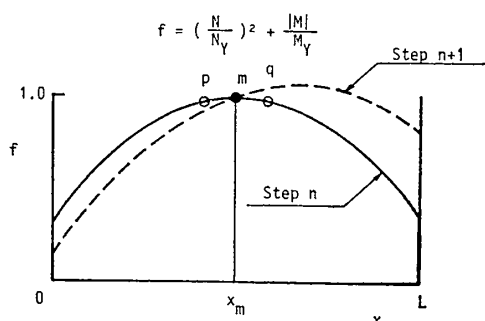


Fig. 5 Moving plastic hinge

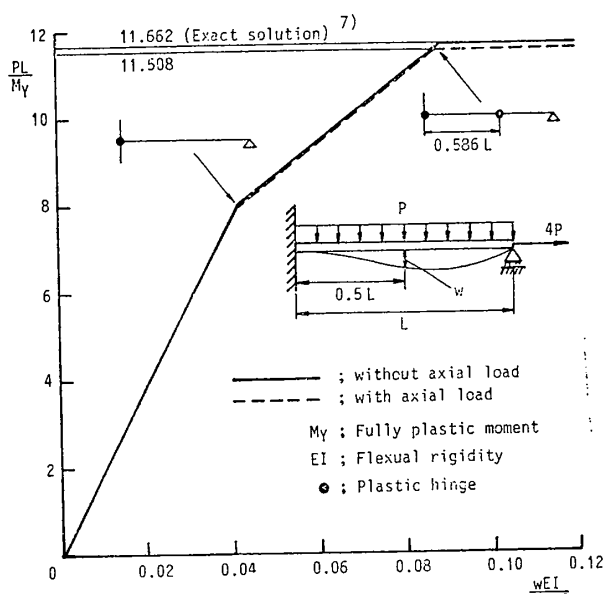


Fig. 6 Load-deflection relationship of one end fixed and the other simply supported beam under uniformly distributed loads and axial load

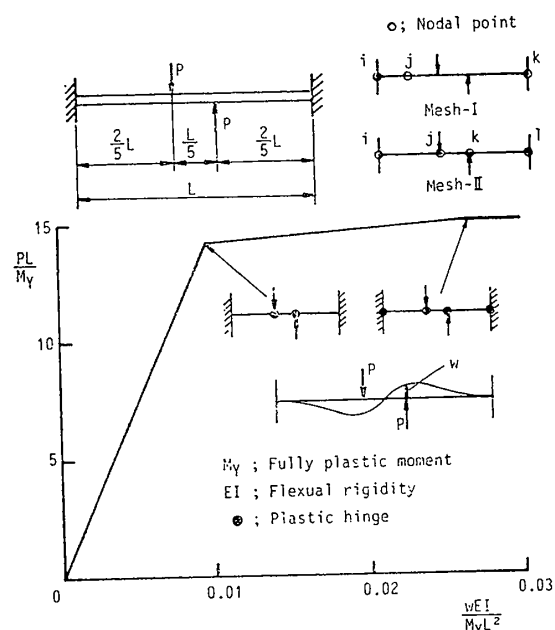


Fig. 7 Load-deflection relationship of a both ends fixed beam under two opposite concentrated loads

崩壊機構は、曲げ塑性崩壊の場合と同じである。崩壊荷重は軸力の影響で若干低下している。

(2) 2つの逆方向集中荷重を受ける両端固定梁

Fig. 7 に解析モデルを示す。ここでは曲げ塑性崩壊を対象とした。本例の場合、梁全体を1要素とする解析モデルでは、節点変位がなくなるため解析できない。そこで、対称性から1/2の領域についての解析も可能である

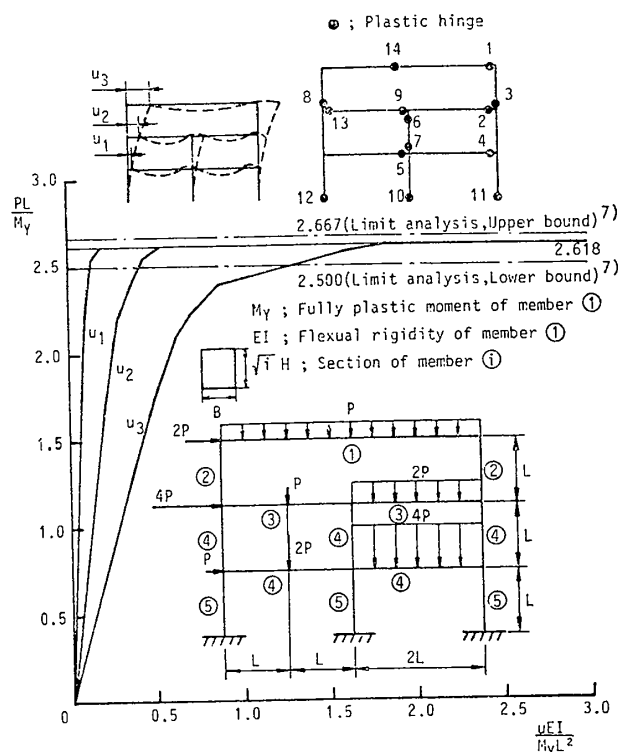


Fig. 8 Load-deformation relationship of a three story two-bay frame

が、2つの径間集中荷重を受ける要素を含む解析例として、Mesh-I のように径間に節点を設けて全体解析した。また、比較のため、荷重作用点に節点を設けた従来の塑性節点法で用いた Mesh-II の分割についても解析した。

本解析例では、2つの荷重作用点に塑性関節が形成された後、両固定端が塑性化して崩壊に至る。すなわち Mesh-I では径間関節が2個存在することになる。Fig. 7 に示す荷重と荷重点変位の関係はいずれの要素分割の場合でも、崩壊荷重、崩壊メカニズムとも厳密解に完全に一致している。また、本解析結果より径間変位計算法の妥当性が確認できた。

(3) 3層ラーメン骨組

Fig. 8 の3層骨組の曲げ塑性崩壊解析を、部材結合部のみに節点を配した13個の要素分割で行った。Fig. 8に関節の形成過程を併せ示す。本解析例では、最上層の分布荷重を受ける部材に最後に径間関節が形成して崩壊に至るため、関節の移動過程はない。崩壊荷重、崩壊機構は厳密解を与えている。また解析時間は約4秒であり、分布荷重を受ける部材を4分割し、径間集中荷重の作用点にも節点を配した場合の1/8であった。

(4) 山型ラーメン骨組

Fig. 9 に解析モデルおよび荷重、変位曲線を示す。左側の傾斜部材には鉛直方向の等分布荷重により、部材の軸方向と、たわみ方向の両分布荷重が作用する。

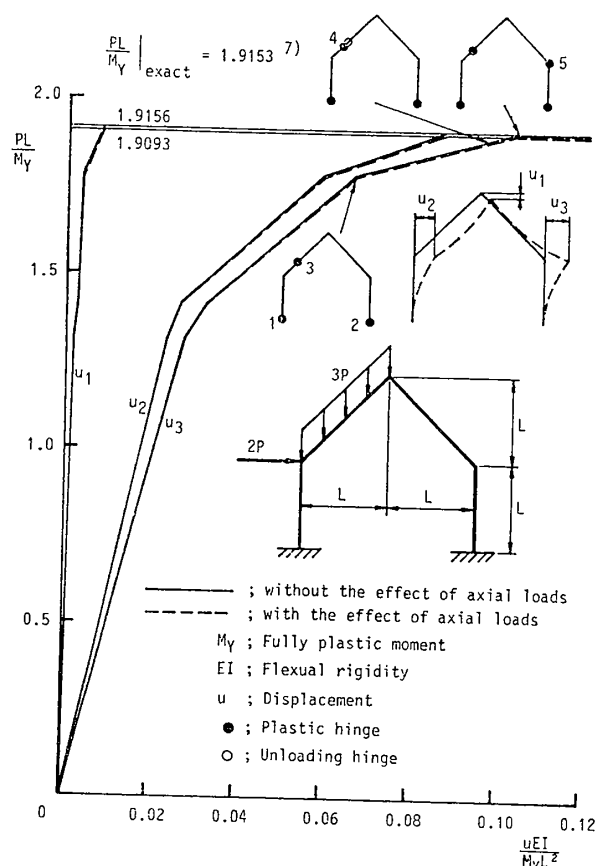


Fig. 9 Load-deformation relationship of a gable frame

Fig. 9 の実線は曲げのみを、破線は曲げ、軸力両者を塑性条件に考慮した場合の結果である。関節形成過程の図より明らかなようにいずれの場合も、傾斜部材に関節の移動が生じる。実線の示す崩壊荷重は、厳密解 (1.9153) より若干高めの 1.9156 であるが、部材の最大モーメントが、塑性条件を満足するように、外力を補正した結果は 1.9154 となり、ほぼ厳密解となる。解析時間は約 1 秒であった。

以上の結果、塑性選点法を応用した骨組構造物の最終強度解析法のすぐれた計算効率と精度が明らかとなった。本解析法は容易に 3 次元構造解析に拡張可能である。また、今後、大変形を考慮した梁・柱要素への適用性の拡張を計画している。

4 結 論

本研究で得られた主要な結果を以下に示す。

(1) 塑性選点法を応用し、任意の形態の径間荷重を受ける部材に対して、1 要素でその塑性崩壊挙動を追跡可能な要素の弾塑性剛性方程式を導出した。

(2) 本解析理論では、径間に塑性断面が生じた場合も、塑性変形は要素の節点に生じる。この解析理論の妥当性を仮想仕事の原理を用いて検証した。

(3) 部材径間変位は、直接、解析では取り扱わないが、別途求めるための算出法を明示した。

(4) 種々の解析例を通して、本解析法の、計算効率と精度の両面でのごく優れた適用性を明らかにした。

最後に本研究の遂行に当たり、助力された村上典生氏 (日立造船情報システム)、三浦正博氏 (広島大学大学院) に感謝します。なお数値計算には広島大学総合情報処理センター HITAC M-200H を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 上田, 矢尾, 藤久保: 塑性関節法の一般化に関する研究, 日本造船学会論文集, 第 146 号 (1979), pp. 307~313.
- 2) Y. Ueda, T. Yao: The Plastic Node Method-A New Method of Plastic Analysis, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 34 (1982), pp. 1089~1104.
- 3) 上田, 松石, 山川, 赤松: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第 124 号 (1968), pp. 183~191.
- 4) 上田, 赤松, 近江: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析 (その 2), 日本造船学会論文集, 第 126 号 (1969), pp. 253~262.
- 5) 上田, 藤久保, 三浦: 塑性選点法の開発—塑性節点法の拡張, 日本造船学会論文集, 投稿予定.
- 6) 近藤: 骨組の弾塑性崩壊解析に於ける一離散化手法, 日本鋼構造協会第 13 会大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, 1979, pp. 231~236.
- 7) P. G. Hodge: Plastic Analysis of Structure, McGraw-Hill, New York, 1959.