（昭和 62 年 11 月　日本造船学会秋季講演会において講演）

音響減衰率からの気泡分布推定方法に関する研究

（第 1 報　理論的研究）

正員　高川　真　一*

A Study on Estimation Method of Bubble Distribution from Acoustic Attenuation
(1st Report : Theoretical Research)

by Shinichi Takagawa, *Member*

Summary

It is very important for cavitation research to grasp beforehand the bubble distribution condition in media.

The purpose of this study is to realize a real-time indication system of estimated bubble distribution condition in media using measured acoustic attenuation data.

For this purpose, theoretical studies on the relation between the bubble distribution condition and the acoustic attenuation and the boundary conditions of the relation were executed and are shown. The estimation method of the bubble distribution condition from acoustic attenuation data is also shown and error/fluctuation occurrence mechanics on the estimation are discussed.

1 使用記号

a：気泡半径（m）

a_R：共振気泡半径（m）

c_1：媒体中の音速，本研究では 1500 m/sec に設定

f_j：j 番目の周波数（Hz）

$h_m^{(2)}$：第 2 種第 m 次球ハンケル関数

$i=\sqrt{-1}$：虚数単位

j_m：第 m 次球ベッセル関数

k：波長定数$=2\pi/\lambda$(1/m)，k_1：媒体中，k_2：気体中

n：気泡数密度（1/m^3）

p_0：周囲圧力，本研究では 101325 N/m^2 に設定

p：音圧（N/m^2）

r：気泡中心からの距離(m)，またはインピーダンスの抵抗成分

t：時刻（sec）

v：気泡表面の半径方向速度（m/sec）

x：平面進行波の進行方向距離（m）またはインピーダンスの虚数成分

z：気泡のインピーダンス

A_m, B_m, C_t：係数

$C(k_1 a, \cos\theta)$：指向性関数

C_p：気体の等圧比熱，本研究では 0.24 kcal/kg·deg を採用

C_λ：気体の熱伝導率，本研究では 6.1×10^{-6} kcal/m·sec·deg を採用

D：気泡中心間距離（m）

E：音波のもつパワー（Watt）

$F(a)$：気泡数密度分布関数（1/m^4）

$G_t(a)$：$F(a)$ を近似するためのステップ関数

K：媒体の体積弾性率（N/m^2）

K_2：気体の体積弾性率（N/m^2）

P_m：第 m 次ルジャンドル関数

R：気体定数＝8.314409（J/mole·deg）

S：気泡数密度分布関数と減衰率周波数特性を結びつける行列

T：絶対温度，本研究では 293°K を採用

W：気体の分子量，本研究では 28×10^{-3} kg/mole を採用

α：減衰定数，減衰率（neper/m）

α_d：減衰率（dB/m）

β：位相定数

$\eta_d=20\log e \fallingdotseq 8.686$：減衰率の単位変換定数，neper/m→dB/m

λ：波長（m）

κ：気体の比熱比，本研究では 1.41 を採用

*　海洋科学技術センター

μ：媒体の粘性係数，本研究では 10^{-3}(Nsec/m^2) を採用

ρ：質量密度，本研究では $\rho_1=1000\,\mathrm{kg/m^3}$（水），$\rho_2=1.25\,\mathrm{kg/m^3}$（気体）を採用

θ：気泡中心から見た角度

ω：角周波数$=2\pi f$

Φ：音波の速度ポテンシャル

Ψ_1：気体の体積弾性率の修正係数

Ψ_2：気泡内気体の交番熱伝導に基づく損失を表わす関数

2 序

キャビテーションの研究に際しては，どのような気泡が水中に含まれているかをあらかじめ把握しておくことは，非常に重要である。このため今まで，ホログラフィー法や光散乱法，コールタカウンタ法などにより，水中の気泡分布状況が種々計測されてきている[1]。しかし，ホログラフィー法では，多数の気泡の個々の半径を計測してそれから分布状況を求めるため，非常に労力を要したり，あるいは光散乱法などでは，気泡とゴミとの判別がつきにくいなど，それぞれに問題点がある。

一方，気泡には伝搬してくる音響信号の強さを減衰させる能力があるので，種々の周波数の音響信号の伝搬減衰率を計測することにより，気泡の分布状況が求められる可能性がある。

特に送信信号として，壁からの反射音の影響を避けるためにバーストパルス信号を用い，かつたとえば矩形波や三角波のように種々の周波数成分を含む信号を用いることとすれば，受信波を高速フーリエ変換（以下 FFT と呼ぶ）することにより，各成分周波数における減衰率が一挙に測定される。そこで，このようにして得られる減衰率の周波数特性関数から気泡数密度分布関数を求める解析プログラムが用意してあれば，気泡数密度分布状況をリアルタイムで表示することも可能となる。

本研究では，このような気泡数密度分布状況をリアルタイム表示ができる計測システムの実現を目指して，まず理論的研究として，基礎理論とその適用範囲の明確化，並びに減衰率周波数特性関数から気泡数密度分布関数を求める解析プログラムに関する研究を行った。

3 減衰機構と減衰率算出の基礎

3.1 減衰機構

気泡による音の減衰機構には，放射減衰，粘性減衰，交番熱損失減衰の三つが一般に考えられている[2]。このうち粘性減衰は，気泡の振動に伴う気泡周囲の液体の粘性によるパワー損失である。交番熱損失は，気泡の振動に伴う気泡内部の気体の断熱変化でない圧縮・膨張によって，熱の形で失われるパワー損失である。

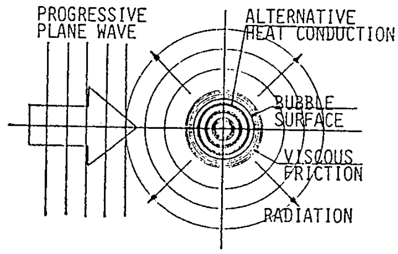

Fig. 1 Attenuation of acoustic power

このようなパワー損失による減衰と異なり，放射減衰は基本的にはパワー損失はない。音波が入射してくると気泡はそのパワーを吸収し，そのパワーにより自らが音源となって振動する。この振動によってパワーが気泡の全周囲に放射されるため，入射波と同じ方向へ向うパワーは非常に小さなものになってしまう。そのために透過波中のパワーは減衰する。これが放射減衰である（Fig. 1 参照）。

3.2 今までの研究例と問題点

音響信号の減衰率の計測から水中の気泡分布状態を推定する方法に関する研究は，今までにも行われており[3),4)]，中でも T. Brockett[5)] は，かなり詳細な理論解析を行い，DTNSRDC のキャビテーション水槽での音響信号減衰率の計測から，気泡分布状態を推定している。

Brockett の理論解析は，媒体の音響信号に対する複素体積弾性率Kと位相定数β，減衰定数αの間に(1)式

$$\beta-j\alpha=\omega\sqrt{\rho_1/K} \tag{1}$$

の関係があることを用い，気泡分布状況と，K，ひいてはαとを関連づけるものである。

しかしこのような議論が展開できるのは，気泡の数密度が非常に大きく，媒体が均質とみなせる場合に限られている[6)]。また，気泡が音響信号に対して球対称振動することも仮定されているが，取扱われている周波数帯域で球対称振動しているとみなして良いかどうかの吟味もされていない。

また，3.1 で述べたように気泡による音響信号の減衰機構には，粘性減衰，交番熱損失減衰，放射減衰があるが，Brockett は粘性減衰を考慮しておらず，また交番熱損失減衰については定数として扱っている。

本研究では，Brockett の理論解析上のこのような不備な点を考慮に入れて，まず気泡が球対称振動するとみなせる範囲がどの程度までであるかを示し，次に実吉の理論[2)]に準拠して減衰機構を定式化し，そして気泡がまばらに分布する場合の，地泡数密度分布関数と音響信号減衰率周波数特性関数との関係について研究することとする。

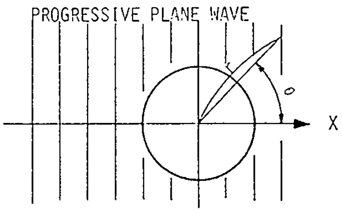

Fig. 2 Spherical coordinates for determining the perturbation field of a bubble

3.3 球対称振動限界

ここでは，入射平面波によって気泡がどのように振動するかを調べ，入射波の波長と気泡半径とがどのような関係にあれば気泡は球対称振動しているとみなして良いかについて調べる。

x 軸方向に進行する平面波の速度ポテンシャルを Φ とすれば，Φ は（2）式のように表わされる：

$$\Phi=\Phi_0\exp\{j(\omega t-k_1x)\} \qquad (2)$$

一方この Φ は，気泡を中心にして考えれば（3）式のように表わされる（Fig. 2 参照）。

$$\Phi=\Phi_0\exp\{j(\omega t-k_1x)\}=\Phi_0\exp\{j(\omega t-k_1r\cos\theta)\}$$
$$=\Phi_0\exp(j\omega t)\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(-j)^mP_m(\cos\theta)j_m(k_1r) \qquad (3)$$

この平面波によって振動する気泡からの散乱波については，Yosioka & Kawasima[7),8)] は，気泡外部について，

$$\Phi_1=\Phi_0\exp(j\omega t)\sum_{m=0}^{\infty}A_mP_m(\cos\theta)h_m{}^{(2)}(k_1r) \qquad (4)$$

気泡内部について，

$$\Phi_2=\Phi_0\exp(j\omega t)\sum_{m=0}^{\infty}B_mP_m(\cos\theta)j_m(k_2r) \qquad (5)$$

と表わし，気泡壁面（$r=a$）で速度が内外面一致し，かつ（4），（5）両式に各々媒質の密度を乗じたものが一致することから

$$\partial\Phi_1/\partial r=\partial\Phi_2/\partial r|_{r=a},\quad \rho_1\Phi_1=\rho_2\Phi_2|_{r=a} \qquad (6)$$

として，係数 A_m, B_m を求めている。

このようにして得られる外部散乱波の音圧 p は

$$p=\rho_1\partial\Phi_1/\partial t \qquad (7)$$

であるので，（4）式を（7）式に代入して

$$p=\Phi_0C(k_1a,\cos\theta)\exp\{j(\omega t-\delta)\} \qquad (8)$$

に書き改めれば，この $\Phi_0C(k_1a,\cos\theta)$ が気泡周囲の音圧レベルの分布状況を表わす。

したがって，この音圧レベル分布が球形であれば，気泡は球対称振動しているとみなすことができる。音圧レベル分布は x 軸に対し回転対称であるので，x 軸を含む平面で切った断面での分布形状を調べると，Fig. 3 に示すように音圧レベル分布は k_1a に応じて種々変化する。

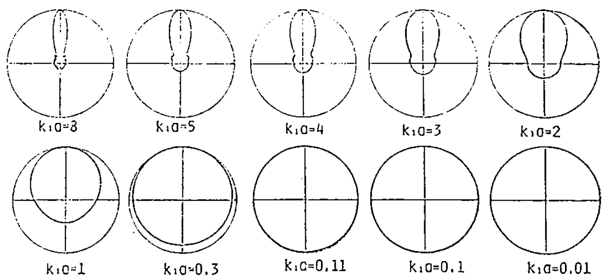

Fig. 3 Directivity patterns of a bubble

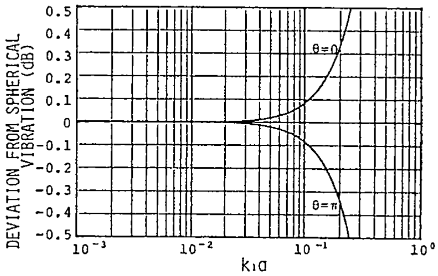

Fig. 4 Deviation from spherical vibration mode

なお，Fig. 3 に示す図はすべて $\theta=0$ での値で割って表わしてある。

また，Fig. 3 から分かるように，$\theta=0$ と $\theta=\pi$ における音圧レベル分布の形状変化が比較的大きいので，この2点におけるレベル変化を球対称振動である0次モードと比較すると，k_1a に対して Fig. 4 に示すような球対称振動からのずれが求められる。Fig. 4 は0次モードを基準としてそれからのずれを dB 表示したものであり，この図から分かるように，k_1a が 0.1 より小さければ気泡はほぼ球対称振動とみなして良く，0.1 より大きくなるにしたがって急激に球対称振動からずれてくる。

しかし一方，真の球対称振動はあり得ないことも同図は示している。そこで，後述するように一般の音響計測機器の分解能がおおむね 0.1dB であること（0.1dB 以下のずれは検知できない）を考慮して，ここでは球対称振動からの音圧レベル分布のずれが 0.1dB 以下の場合を球対称振動とみなすこととした。その場合，

$$k_1a<0.11 \qquad (9)$$

であれば，気泡は球対称振動しているとみなすことになる。これはまた，気泡半径対波長比でいえば，おおむね

$$a/\lambda<1/60 \qquad (10)$$

になる。

Fig. 5 の曲線Aは，周波数と共振気泡半径（(19) 式参照）の関係を示しており，直線Bは周波数と波長の関係を，そして直線Cは (10) 式の関係を示している。

本研究で球対称振動とみなす領域は，直線Cより下の部分である。

種々の半径の気泡群を含む媒体を考える。この気泡の

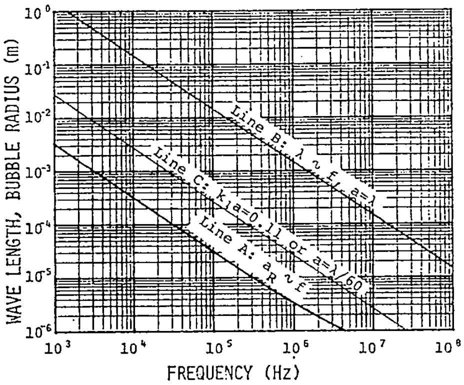

Fig. 5 Resonant bubble radius and spherical vibration region

中で，減衰率に有義な影響を与える気泡の最大半径が仮に 1mm であったとする。その共振周波数は Fig. 5 から約 3kHz である。この 1mm の気泡は約 30kHz 以上の周波数に対しては球対称振動とはみなせない。したがって，球対称振動とみなせる周波数帯域は，この例の場合 3～30kHz ということになる。

一般の場合にも同様のことがいえる。すなわち，球対称振動とみなせる周波数帯域は，媒体中の気泡のうち減衰率に有義な影響を与える最大半径気泡の共振周波数から，おおむねその 10 倍の周波数までであることが Fig. 5 からいえる。

この範囲より低い周波数については，球対称振動条件（9）式および（10）式を満たすが，減衰率に有義な影響を与える気泡が存在しないので，検討対象からはずすこととする。

3.4 1個の気泡のインピーダンス

実際の液体中の気泡の振動を考える際には，1個の気泡の表面インピーダンス z を用いると便利である。

実吉[2]は，3.1 節で示した各減衰機構に応じて，表面インピーダンスを放射，粘性，熱交番の各インピーダンスから構成されるものとし，気泡が球対称振動するという条件下で各インピーダンスを次のように与えている：

$$z_r=r_r+jx_r=(\omega a)^2\rho_1/c_1+j\omega a\rho_1 \quad (11)$$

$$z_v=8\mu/3a \quad (12)$$

$$z_h=r_h+jx_h$$

熱交番インピーダンスについて，実吉[2]は

$$r_h=3K_2/\omega a\cdot\Psi_1{}^2\Psi_2 \quad (13)$$

$$x_h=-3K_2/\omega a\cdot\Psi_1 \quad (14)$$

とし，

$$\Psi_1=\{1+3(\kappa-1)/X\cdot(\sinh X-\sin X)/(\cosh X-\cos X)\}^{-1} \quad (15)$$

$$\Psi_2=3(\kappa-1)/X\cdot\{(\sinh X+\sin X)/(\cosh X-\cos X)-2/X\} \quad (16)$$

$$X=a\sqrt{2\omega C_p W/C_\lambda RT} \quad (17)$$

で与えている。

これは，気泡内部の気体が気泡の振動に伴ってポリトロープ変化をし，そのために生ずる熱交番で損失されるパワーを考察した結果得られるものであり，Ψ_1 は体積弾性率の修正係数を表わし，$K_2\Psi_1$ が見かけの体積弾性率を表わす。また，Ψ_2 は交番熱伝導に基づく損失を表わす関数である。

したがって，1個の気泡の単位表面積当りのインピーダンス z は

$$\begin{aligned} z&=z_r+z_v+z_h\\ &=(r_r+r_v+r_h)+i(x_r+x_h)\\ &=\{(\omega a)^2\rho_1/c_1+8\mu/3a+3K_2\Psi_1{}^2\Psi_2/\omega a\}\\ &\quad+j(\omega a\rho_1-3K_2\Psi_1/\omega a) \end{aligned} \quad (18)$$

と表わされる。

共振条件については，（18）式中の虚数部を0にすることによって得られ，

$$\omega=\sqrt{3K_2\Psi_1/\rho_1}/a,\quad a=\sqrt{3K_2\Psi_1/\rho_1}/\omega \quad (19)$$

となる。簡単にするために $\Psi_1=1$ とすれば

$$\omega=\sqrt{3K_2/\rho_1}/a=\sqrt{3\kappa p_0/\rho_1}/a \quad (20)$$

となり，Minneart の共振式[9]が得られる。

また，平面進行波から1個の気泡があることによって失われるパワー E_l は，音場音圧を p とすれば気泡表面は

$$v=-p/z \quad (21)$$

の速度で振動するので，

$$E_l=4\pi a^2\cdot v^2\cdot R_e(z)=4\pi a^2p^2R_e(z)/|z|^2 \quad (22)$$

となる。

3.5 まばらな気泡群への適用

半径 a の気泡が数密度 n で存在する媒体に単位面積当りパワー E_0 の平面進行波が入射してくると，この平面進行波は1個の気泡に出会うごとに（22）式で示されるパワーが損失される。したがって減衰率 α は

$$e^{-2\alpha}=(1-E_l/E_0)^n \quad (23)$$

あるいは

$$-2\alpha=n\ln(1-E_l/E_0) \quad (24)$$

となり，E_l/E_0 が十分小さければ

$$\alpha=nE_l/2E_0 \quad (25)$$

と近似される。E_0 は

$$E_0=p^2/\rho_1c_1$$

であり，E_l/E_0 は

$$E_l/E_0=4\pi a^2\rho_1c_1R_e(z)/|z|^2 \quad (26)$$

であるので，減衰率 α は

$$\alpha=2\pi a^2n\rho_1c_1R_e(z)/|z|^2 \quad (27)$$

と表わされる。

ここで注意しなければならないのは，(24)式から(25)式へ移行する際の近似の精度である。E_l/E_0 は（26）式が示すように共振時に最も大きくなり，その値は a の自

乗に比例する。したがって a がある程度大きいとこの近似における誤差が大きくなる。しかし，媒体を水として試算すると，a が 0.55 mm 以下ではこの近似による誤差は1％（約 0.1 dB）以下となるので，本研究では，$a<0.55$ mm（周波数では約 6 kHz 以上）でこの近似が十分な精度で成り立つと考えることとする。

もう一つの問題として，気泡同士の相互作用の問題がある。(23) 式を導くに当っては，入射波が気泡に出会うごとに (22) 式に示す E_l だけパワーを損失するとしているが，気泡側からみれば，E_l だけパワーを受け取り，一部は熱になるものの，残りは自らが音源となって音波として放射する。そのため，この気泡の近くにある他の気泡は平面進行波とその気泡が発する音波の双方の影響を受けることになる。

E_l のパワーを受け取った気泡による音圧 p_r と，平面進行波の音圧 p の比は (28) 式のように表わされる[2]:

$$p_r/p=\omega a\rho_1/|z|\cdot a/D \tag{28}$$

この式から分かるように，気泡の振動による音圧は距離に反比例して小さくなり，また共振からはずれておればさらに小さくなる。音圧が最も大きくなるのは共振状態である。Fig. 6 は共振状態における (28) 式を a/D で割った値を，周波数を横軸にして示したものである。この図から，$a/D\sim10^{-3}$ であれば $p_r/p\sim10^{-2}$（約 0.1 dB）となり，気泡相互の影響はほとんど無視できる（検知できない）が，$a/D\sim10^{-2}$ であれば $p_r/p\sim10^{-1}$（約 1 dB）となり，気泡の相互影響は比較的大きくなる。

一方，水中気泡の体積含体率は一般におおむね 10^{-6} 程度といわれており[3]，その場合は a/D はおおむね 10^{-2} 程度となる。したがって (27) 式によって算出される減衰率には，その半径付近の気泡の体積比が 10^{-6} 程度であれば 1 dB 程度の誤差が含まれるということになる。

さて，(27) 式はこの程度の誤差を含み得るものであるが，簡単な形式であるので，種々の半径の気泡からなる気泡群に対しても，線型重ね合せで容易に拡張できる。

気泡数密度分布関数を $F(a)$ とすれば，半径が $a\sim a+\Delta a$ にある気泡の数密度 Δn は

$$\Delta n=F(a)\Delta a \tag{29}$$

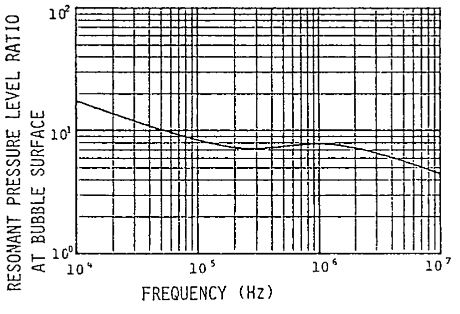

Fig. 6 Mutual vibration effect of bubbles

である。したがって (27) 式は次のように書き改められる：

$$\Delta\alpha=2\pi\rho c_1a^2\Delta nR_e(z)/|z|^2$$
$$=2\pi\rho c_1a^2F(a)R_e(z)/|z|^2\cdot\Delta a \tag{30}$$

この式は，半径が $a\sim a+\Delta a$ の気泡の減衰率に対する寄与分であり，種々の半径の気泡による減衰率を足し合せれば，送信音響信号周波数に対する媒体の減衰率が求められる。すなわち

$$\alpha=2\pi\rho c_1\int_0^\infty a^2F(a)R_e(z)/|z|^2da \tag{31}$$

で与えられる。また，周波数を種々変化させて対応する α を求めれば，その気泡群に関する音響減衰率周波数特性関数が得られる。

なお，(31) 式では積分区間を $(0,\infty)$ としたが，3.3 節で示したように球対称振動条件下で考えなければならないので，媒体中の減衰率に有義な影響を与える最大気泡半径 $a_{\max}$ をもって積分の上限とする必要があり，また周波数特性関数の周波数帯域も，$a_{\max}$ に対応する共振周波数から，おおむねその 10 倍の周波数までとする必要がある。

今までの議論では，減衰率の単位は物理単位，すなわち neper/m を用いてきた。しかし一般には dB/m が用いられる。換算係数 η_d は

$$\eta_d=20\log_{10}e\doteqdot8.686$$

であるので，今後は dB/m 表示することとし，その表示による減衰率を α_d と表わすこととする。そうすると (31) 式は上記の積分区間の議論も踏まえて次のように表わされる：

$$\alpha_d=2\pi\rho c_1\eta_d\int_0^{a_{\max}}a^2F(a)R_e(z)/|z|^2da \tag{32}$$

3.6 減衰率の計算例

Fig. 7 は，(33) 式で表わされる $F(a)$ を用いて (32) 式により減衰率を計算したものである。

$$\log F(a)=-A(\log a+5)^2+13,\quad A=10,\ 15,\ 20,\ 30 \tag{33}$$

この関数は，$a=10^{-5}$ m で最大となる，両対数グラフ上で放物線で表わされる関数である。

Fig. 7 は三つの図から構成されている。

右上の図は横軸に気泡半径を，縦軸に気泡数密度を，左下の図は縦軸に周波数を，横軸に減衰率を，右下の図は横軸に気泡半径を，縦軸に周波数を，各々対数で表わしており，右上の図は気泡数密度分布関数を，左下の図は減衰率の周波数特性関数を表わしており，右下の図は共振状態における気泡半径と周波数の関係を表わしている。

この図で特徴的なのは，気泡数密度が最大になる気泡半径（$a=10^{-5}$m）と，減衰率が最大になる周波数とが，共振関係にないという点である。このようなずれがどの

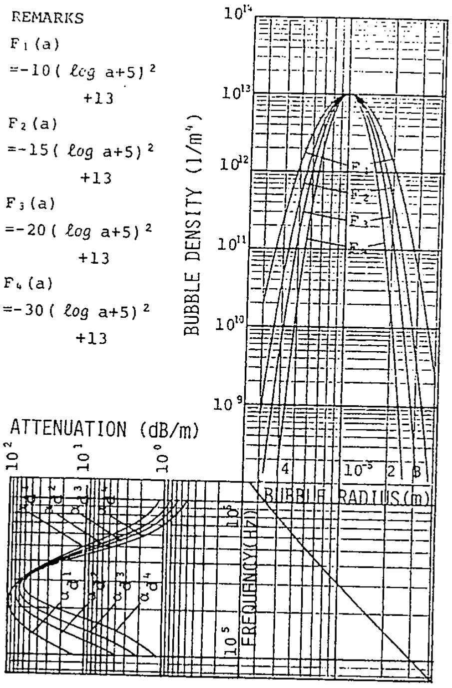

Fig. 7　Bubble distribution functions and acoustic attenuation functions

ようにして生ずるかについては後述する。

4　気泡数密度分布関数の推定

(32) 式は，与えられた気泡数密度分布関数から減衰率を算出するものであるが，実際の計測などでこのようなプロセスを踏むことはなく，むしろ計測結果として与えられた減衰率の周波数特性関数から，気泡数密度関数を推定することになる。

本章では，まずこの推定方法について検討し，次にあらかじめ適当なモデルとなる気泡数密度分布関数を設定しておき，これに基づいて減衰率の周波数特性関数を求め，この減衰率周波数特性関数から気泡数密度分布関数を推定して，先に設定したモデルとどの程度一致するか調べることとした。

4.1　推定方法

(32) 式に立ち戻って，$F(a)$ をステップ関数の1次結合で近似することを考える。すなわち，$F(a)$ をステップ関数 $G_i(a)$ により

$$F(a)=\sum C_i G_i(a) \tag{34}$$

$$G_i(a)\begin{cases}1 & a_i\leq a<a_{i+1}\\ 0 & a<a_i,\ a_{i+1}\leq a\end{cases} \tag{35}$$

と表わすものであり，Fig. 8 に示すように曲線 $F(a)$ を階段状に近似するものである。したがってまた，C_i は $a_i\leq a<a_{i+1}$ における $F(a)$ の近似的な値となり，各 C_i が求まれば $F(a)$ の関数形が近似的に求められたことになる。

この方法は，$F(a)$ の変化が緩やかであればその近似は良好であるが，変化が急峻であれば誤差が大きくなる性質を持っている。

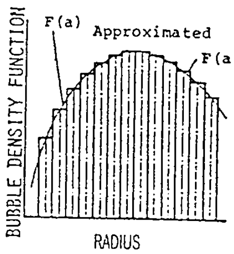

Fig. 8　Approximation of bubble distribution function by step functions

(32) 式に (34) 式，(35) 式を代入して整理すると

$$\alpha_d=2\pi\rho c_1\eta_d\sum C_i\int_{a_i}^{a_{i+1}}a^2R_e(z)/|z|^2da \tag{36}$$

となるので，

$$S_i=2\pi\rho c_1\eta_d\int_{n_i}^{a_{i+1}}a^2R_e(z)/|z|^2da \tag{37}$$

とすれば，(36) 式は

$$\alpha_d=\sum C_i S_i \tag{38}$$

となる。S_i は (37) 式に示されるように容易に積分できるので，種々の周波数に対する S_{ij}（周波数 f_j に対応する S_i）をあらかじめ求めておけば，周波数 f_j に対応する減衰率 α_{dj} を用いて，C_i に関する1次方程式 (39) 式が得られる。

$$\alpha_{dj}=\sum C_i S_{ij} \tag{39}$$

したがって，(34) 式で $F(a)$ を表わす際の分割数を N とし，N 種の周波数を与えることとすれば，(39) 式は

$$\begin{pmatrix}\alpha_{d1}\\ \alpha_{d2}\\ \vdots\\ \alpha_{dN}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N}\\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_N\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_N\end{pmatrix} \tag{40}$$

となる。そして (40) 式の各辺に対し，左側から S^{-1} をかければ直ちに各 C_i が求まることになる。

しかし，前述したように (34) 式による $F(a)$ の近似は，$F(a)$ が急峻な変化をする場合，誤差が大きくなるので，(40) 式に S^{-1} を乗じて直接 C_i を求めると，負の C_i が得られることがある。C_i は気泡数密度であるから，これは不合理である。

そこで本研究では，逆行列によって直接 C_i を求める方法は採らず，最初に各 C_i を適当に与え，与えられた α_{di} と (40) 式で求められる α_{di} との比を各 C_i に乗ずるという繰り返し計算法を採用することとした。

また，区間分割では，N 個の周波数を与え，各周波数に対応する共振気泡半径を (19) 式により求め，相隣る

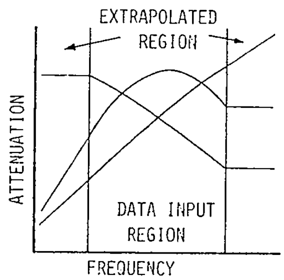

Fig. 9　Extrapolation method

共振気泡半径 a_{Ri}, a_{Ri+1} を用いて

$$a_i=\sqrt{a_{Ri}\cdot a_{Ri+1}} \qquad (41)$$

により与えた。

さらに，(31) 式や (32) 式から明らかなように，減衰率はその周波数に対応する共振気泡のみが寄与するのではなく，それに近い半径の気泡の寄与分もある。そのために特に，与えた周波数帯域の両端付近では，その外側に減衰率の周波数特性関数を外挿して，対応する気泡の寄与分も考慮に入れる必要がある。

外挿方法には種々考えられるが，本研究では様々な外挿方法を用いて調べた結果，減衰率の周波数特性関数が与えた周波数帯域の端部において増加関数であれば，両対数グラフ上でその勾配のまま直線外挿し，減少関数であれば，端点と同じ減衰率のままとした（Fig. 9 参照）。

4.2　計　算　例

前節の推定方法を用いて，いくつかのモデルにより，どのように推定されるかを調べた。

Fig. 10～13 がその計算例であり，図の表わし方は Fig. 7 と同じである。そして左下の図の丸印がデータ入力点であり，右上の図の階段状関数が推定された気泡数密度分布関数である。いずれの場合も入力データ点数は 50 点とし，周波数間隔は等比数列で与えている。また外挿部は便宜上使用しただけであるので，図には示していない。

Fig. 10 は，(42) 式で与えられる気泡数密度分布関数をモデルとしたもので，推定された関数はモデルの関数

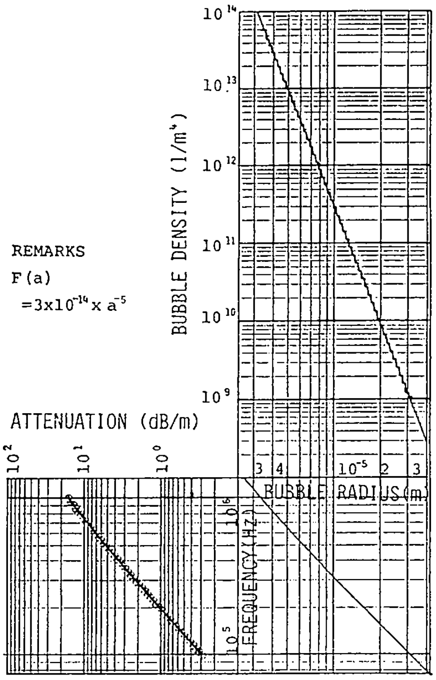

Fig. 10　Estimation of bubble distribution function Ⅰ

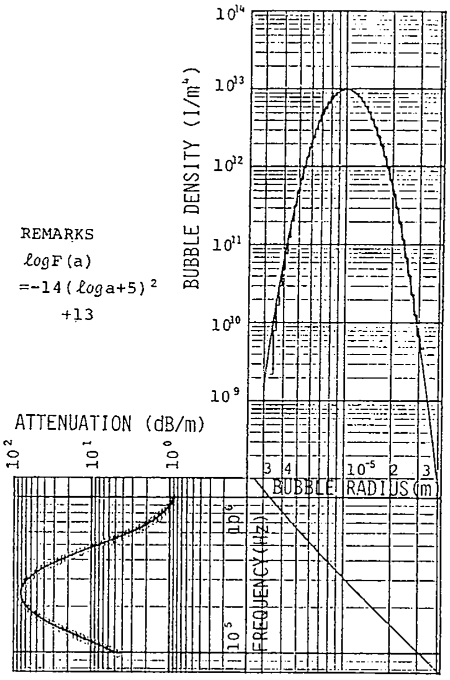

Fig. 11　Estimation of bubble distribution function Ⅱ

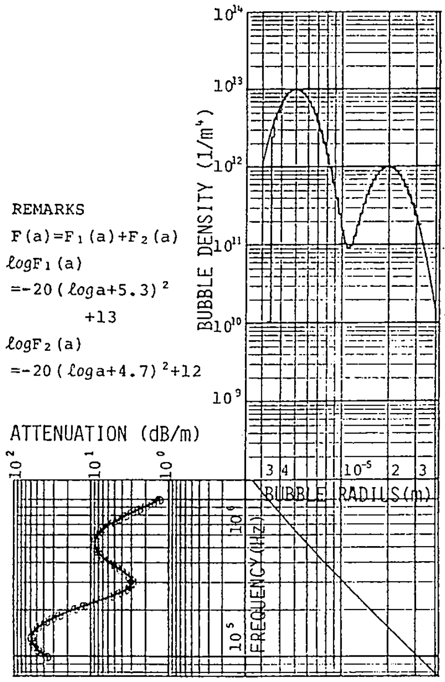

Fig. 12　Estimation of bubble distribution function Ⅲ

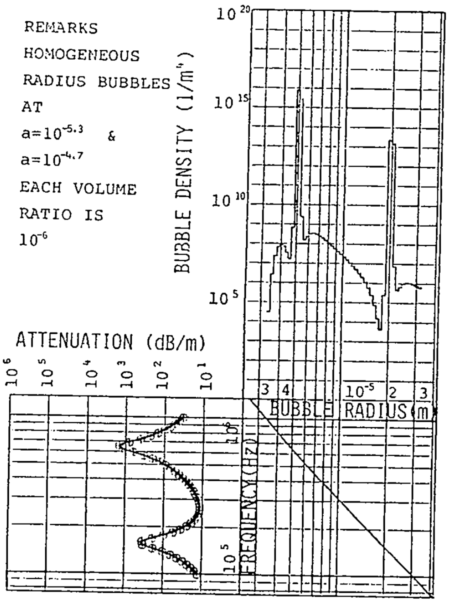

Fig. 13 Estimation of bubble distribution function Ⅳ

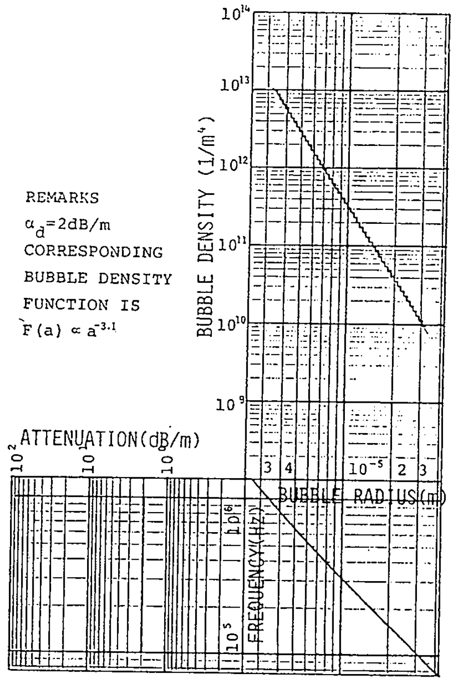

Fig. 14 Estimation of bubble distribution function Ⅴ

と良く一致していることが分かる。

$$F(a)=3\times10^{-14}a^{-5} \tag{42}$$

Fig. 11 と Fig. 12 は各々 (43), (44) 式をモデルとして与えたものであり，高周波数側端部に対応する半径部分を除いて良く一致している。一致があまり良くない部分は外挿方法によるものである。

$$\log F(a)=-14(\log a+5)^2+13 \tag{43}$$

$$F(a)=F_1(a)+F_2(a) \tag{44}$$

$$\log F_1(a)=-20(\log a+5.3)^2+13$$

$$\log F_2(a)=-20(\log a+4.7)^2+12$$

Fig. 13 は，$a=10^{-5.3}$m と $a=10^{-4.7}$m という気泡がともに体積比で 10^{-6} ずつある気泡群に対するものである。$F(a)$ はこれらの点で無限大になるものであり，(34) 式のようなステップ関数では基本的に表わせるものではないが，Fig. 13 は特定の半径の気泡が集中的に存在することを良く表わしている。

Fig. 14 は，Fig. 7 と同じ表現で今度はモデル関数を与えずに，減衰率が周波数にかかわらず一定の場合の気泡数密度分布関数を推定したものであり，得られた関数は

$$F(a)\propto a^{-3.1} \tag{45}$$

である。

この (45) 式と 3.6 節の Fig. 7 を比較して考えると，Fig. 7 で気泡数密度が最大の気泡半径と減衰率が最大となる周波数とが共振関係にないのは，この (45) 式で表わされる関係が影響していることが分かる。すなわち $F(a)/a^{-3.1}$ という比が最大になる点で減衰率が最大になることが分かる。

5 誤差と変動に関する考察

(32) 式が示すように，減衰率の周波数特性関数 α_d は気泡数密度分布関数 $F(a)$ を積分したものである。したがって α_d は本来滑らかな曲線となる性格のものである。

しかし実際に計測されるのは音響信号の受波強度であり，気泡がほとんどないと考えられる基準状態における受波強度との差が減衰率である。そしてこの計測に誤差が入る可能性がある。このような誤差が入ると，α_d は滑らかな曲線とはならなくなり，4.1 節で示した方法で気泡数密度分布関数 $F(a)$ を推定すると，変動が大きな $F(a)$ が得られる。

本章では，誤差要因にどのようなものがあるか，それらはどの程度の誤差を生ずるものか，またどうすればこのような誤差を小さくできるかについて考察する。

誤差要因としては，3.5 節で述べたように気泡相互の影響があるため，(32) 式自身に気泡体積比が 10^{-6} 程度の場合で 1dB 程度の誤差が入り得るが，これ以外の計測系に起因する誤差として次のようなものが挙げられる。

5.1 音圧計測装置自身が有する計測誤差

FFT を含めた音圧計測装置は一般に計測誤差が非常に小さく，分解能以下とされている。逆に，そのようでなければ計測機器として使用できないともいえる。一般にこの分解能は 0.1dB であり，3.3 節ではこの数値を用いた。また仮にある程度計統誤差があるとしても，減衰率の計測においては，基準状態における受波強度と試

料媒体を通しての受波強度との差で求めるので，計統誤差は排除される。したがってこの要因による誤差は分解能以下であるといえる。しかし一方，計測値には分解能程度の不連続性が入ることになる。

5.2　送受波器間距離

音波は一般に球面拡散するため，送受波器間隔が変化すると，同じ強さの送波信号でも受波信号の強さは変化する。送波信号レベルと受波信号レベルの間には

$$受波信号レベル(\mathrm{dB})=送波信号レベル(\mathrm{dB})-20\log(距離)$$

の関係があるので，距離の変化による誤差を 0.1dB 以内に抑えるには，距離の変化は1％以内にする必要がある。

5.3　基準状態

採取したばかりの水道水は，中に多くの気泡を含んでおり，このような水では基準状態は計測できない。海洋科学技術センターの音響試験水槽では，水を入れ替えた場合，約2ヵ月以上水を静置しておいてから計測を始めている。このように水を「寝かせる」ことによって安定した計測ができるようになり，計測機器で分解能より大きなふらつきが検知されなくなる。このような状態で計測したのが基準状態である。また，別の見方をすれば，送受波器の特性を計測したことになる。

特性が分かっている送受波器であれば，設置場所などが変わっても，基準状態は容易に補正できる。

5.4　周囲雑音と壁からの反射

音響計測で常に問題になるのは，受波器に入る周囲雑音と，壁などからの反射音である。周囲雑音に対しては，信号音を十分強いものにしておけば，その影響は相当減ずることができる。たとえば，SN 比を 40dB とすれば，雑音レベルは信号レベルの1％となり，無視できる程度となる。壁からの反射音に対しては，使用する信号波を連続波とせずにバーストパルスとすれば，直接入射波と反射波を容易に分離でき，反射波の影響を排除できる。

5.5　被計測媒体による計測値の変動

流れがあれば，気泡は流れに乗って移動して行く。また静水中であっても，気泡は浮力で浮上し，また表面張力と気体分子の拡散によって気泡径は徐々に変化する。さらに，水中に一様に気泡が存在するとは考えにくく，局部的に分布状況が異なると考えるのが自然である。このような気泡群による音響信号の減衰率は，したがって刻々と変化することになる。

周波数を少しずつ変えて対応する減衰率を計測する方法では，気泡の分布状況が刻々と変化するために，計測される減衰率も変動の大きなものとなり，減衰率の滑らかな周波数特性関数はなかなか得られない。

これに対し，種々の周波数成分を含む信号を一挙に発射し，受波信号を FFT 解析する方法を採れば，同一の気泡分布状況に対する減衰率の周波数特性関数が直ちに得られる。

以上の考察から，計測上の誤差，変動は，計測機器の分解能程度まで十分小さく抑えられるといえる。

Fig. 15 は，この分解能程度の不連続が減衰率周波数特性関数にある場合の気泡数密度分布関数の推定である。減衰率の端部各 10 点については，外挿の必要上最小自乗法により平滑化してある。与えたモデル関数は Fig. 10 に示した式と同じである。推定された気泡数密度分布関数は，減衰率の不連続を反映して変化の激しいものになっている。これについては次のように考えることができる。

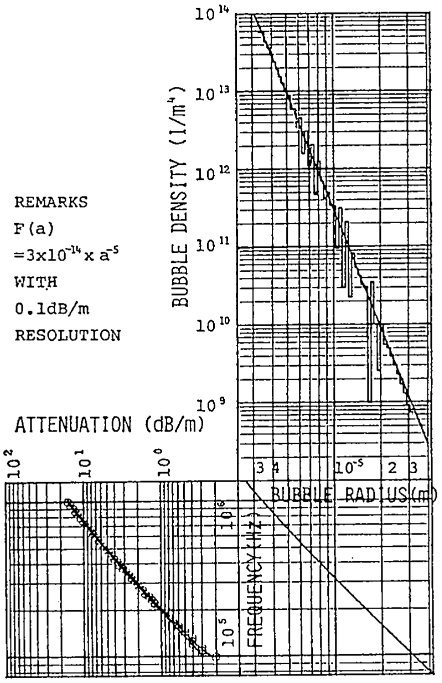

Fig. 15　Estimation of bubble distribution function Ⅵ

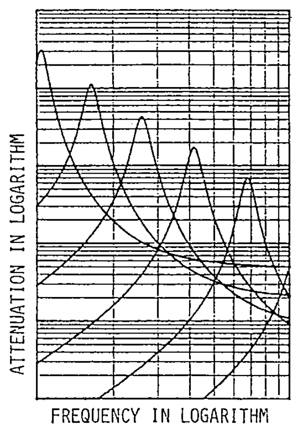

Fig. 16　Frequency characteristic functions of each $G_i(a)$

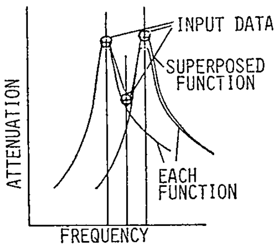

Fig. 17 Superpositioning of frequency characteristic functions and fluctuation occurrence mechanics on bubble distribution estimation

(35) 式の個々の $G_i(a)$ に対応する減衰率の周波数特性関数は Fig. 16 のようになる。気泡数密度分布関数を推定することは，与えられた減衰率のデータに Fig. 16 の個々の曲線のピークが一致するように各係数を求めることである。

今 Fig. 17 に示すように，相隣る三つの周波数のうち中央のものの減衰率が周りより小さいとする。すると，両横の部分を線型重ね合せするだけで，中央の減衰率に近いものが得られる。この減衰率が両横の線型重ね合せ分より小さければ，ここでの気泡数密度は，厳密解としては負値，本研究の繰返し計算法では0が与えられる。一方，この部分の気泡数密度が0，もしくは非常に小さくなると，両横の部分に対する中央の部分からの下支えが小さくなり，この下支え分を補償するために両横の気泡数密度は大きくなる。そのために Fig. 15 のような変化の激しい曲線が得られるものである。

したがって Fig. 15 のように激しく変動する場合，下の方は意味がなく，上の方すなわち包絡線を結んでこの曲線を気泡数密度分布関数と考えれば良いといえる。

6 まとめ

以上の研究の結果をまとめると，次のようになる。

（1） 気泡音響理論では，一般に気泡は球対称振動することが仮定されているが，このような条件が実質的に満たされる範囲（計測器で球対称振動からのずれが検知できない範囲）は，$k_1a=0.11$ 以下，別の表現をすれば，波長が気泡半径のおおむね60倍以上の範囲である。そして，減衰率の周波数特性関数で，気泡が球対称振動するとみなせる範囲は，減衰率に有義な影響を与える最大の半径の気泡に対応する共振周波数から，その約10倍の周波数までの帯域である。

（2） 媒体中の気泡数密度分布関数から減衰率の周波数特性関数を求める式（(32) 式）を導き出した。この式には，気泡の体積比が 10^{-6} 程度の場合，約 1dB 程度の誤差を含み得る。

（3） 気泡数密度が最大になる気泡半径と，減衰率が最大になる周波数とは共振関係には必ずしもない。減衰率は，気泡数密度分布関数と $F(a)\doteqdot a^{-3.1}$ という関数の比が最大になる気泡半径に対応する共振周波数で，最大となる。

（4） 与えられた減衰面の周波数特性関数から，気泡数密度分布関数を推定する方法を示した。この方法では，与えられた周波数帯域の高周波側端部で若干誤差が大きくなるが，それ以外の部分では良好に推定できる。また連続関数だけでなく，離散的な関数も良好に推定できる。

（5） 計測誤差は，計測装置の分解能以下に抑え込むことが可能である。また，減衰率計測の基礎になる基準状態は，水を長期に亘って「寝かせる」ことによって作成でき，この状態で送受波器の特性が計測される。特性が分かれば，この送受波器を別の装置に移設しても簡単な換算によって基準状態が求められる。

（6） 種々の周波数成分を含む信号を一挙に発射し，受波信号を FFT 解析する方法を採れば，水の流れや気泡の浮力による上昇などによる気泡分布状態の刻々の変化の影響が排除できる。

（7） 計測で得られる減衰率の周波数特性関数には，計測装置の分解能程度の不連続性が入り，推定される気泡数密度分布関数も変動の大きなものになる。このような場合は，変動値のうちの高い値の包絡線を考えれば，若干高めではあるが比較的近い値となる。

本研究は，気泡分布状況をリアルタイムで表示するシステムの実現を目指して行った研究の第1歩としての，理論的研究である。実際にどのように計測されるかやシステムの試設計については，第2報で報告することとする。

謝 辞

本研究の実施に当っては，東京大学工学部船舶工学科の加藤洋治教授に，貴重な御指摘，御助言をいただいた。ここに記して感謝の意を表す。

参考文献

1) 加藤洋治：「キャビテーション」，槇書店，(1974) p. 20–23.
2) Saneyoshi, Junichi : "Theoretical Studies on Absorption and Reflection of Ultrasonic Waves in Water Containing Bubbles", Bulletin of the Tokyo Institute of Technology, Series B, (1953), No. 1.
3) Killen, J. M. & Ripken, J. F.: "A Water Tunnel Air Content Meter" University of Minnesota, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Project Report No. 70, Feb. (1965).
4) Schiebe, F. R.: "The Influence of Gas Nuclei

Size Distribution on Transient Cavitation Near Inception", University of Minnesota, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Peoject Report No. 107, May (1969).

5) Brockett, T.: "Computational method for Determination of Bubble Distribution in Liquids", DTNSRDC Report 2798 April (1969).

6) 超音波技術便覧：日刊工業新聞社，(1978) p. 147-154.

7) Yosioka, K. & Kawashima, Y.: "Acoustic Radiation Pressure on a Compressible Sphere", Acostica, 5, 167 (1955).

8) Yoshioka, K. & Kawashima, Y.: "Acoustic Radiation Pressure on Bubbles and their Logarithmic Decrement", Acostica, 5, 173 (1955).

9) Minneart, M.: Phil. Mag., 16, p. 235 (1933).