

(昭和 62 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

Towed Vehicle の動力学に関する基礎的研究

正員 大 楠 丹* 正員 柏 木 正*
正員 小 寺 山 亘*

Hydrodynamics of a Depth Controlled Towed Vehicle

by Makoto Ohkusu, *Member* Masashi Kashiwagi, *Member*
Wataru Koterayama, *Member*

Summary

Hydrodynamic forces acting upon a model of a depth-controlled vehicle towed by a long cable were measured for all modes of motion and at various towed attitudes. Simple formulas proposed to predict the hydrodynamic forces on such vehicles were confirmed in their validity with results of the experiments and found to be useful for designing hydrodynamically good performances of the towed vehicle.

Analysis of coupled motions of the vehicle towed at constant speed and the long cable was presented to study the small perturbation about the towed configuration. This method of analysis is applicable to the investigation of the stability of the vertical motion of the vehicle depth-controlled by the wing action.

主 な 記 号

$V_0 = (u, v, w)$: 物体固定座標系に対する速度成分
 $\omega = (p, q, r)$: 角速度成分
 $V_c = (u_c, v_c, w_c)$: 潮流速度成分
 $r_G = (x_G, 0, z_G)$: 重心の座標
 $r_B = (x_B, 0, z_B)$: 浮心の座標
 $r_T = (x_T, 0, z_T)$: 曳航点の座標
 $F_0 = (X, Y, Z)$: 物体固定座標系の x, y, z 軸方向の外力
 $M_0 = (K, M, N)$: 物体固定座標系の x, y, z 軸まわりの外力モーメント
 U : 曳航速度 ($=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$)
 m : 質量
 ∇ : 排水容積
 $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, J_{xz}$: 慣性モーメント, 慣性乗積
 $[I]$: 慣性モーメントのマトリックス
 $A_{ij}(i, j=1\sim6)$: 付加質量
 $[A^F], [A^M]$: 付加質量のマトリックス
 ρ : 水の密度
 g : 重力の加速度
 α : トリム角 (nose up が正)
 β : 斜航角 (nose starboard が正)

1 ま え が き

海中を高速で曳航され、種々の海洋計測を実施する Towed vehicle は、アイデアそのものは新しくないが、観測の高速化が可能で、システムの信頼度が高いことなどの優れた点が多いところから、ここ 20 年ぐらいの間に多くの場所で開発が行われた^{1)~6)}。九州大学応用力学研究所においても海洋計測を広域で実施するために重量約 200 kg、曳航ケーブル長 600 m、維持水深 150 ~ 350 m 程度の Towed vehicle の開発が海洋工学研究グループによって現在進められている。

この種の海洋計測用の Towed vehicle に要求される最も基本的な性能は、曳航中に vehicle が、与えられた軌道を正確にたどることができることである。たとえば水面あるいは水底から一定の距離を維持して曳航されることが要求される。この性能を実現するためには、極く小型のものを除けば、翼など何らかのコントロール・サーフェスを用いて vehicle の位置を制御することが現実的な手段である。

Towed vehicle の設計を実施するに当たって気がつくことは、公開された文献に vehicle に作用する流体力に関する研究の結果や具体的な数値が報告された例が少ないことである。また曳航ケーブルの解析が困難なことから、ケーブルを多くの要素に分割して数値的に解析

* 九州大学応用力学研究所

し、vehicle-ケーブル系の挙動を時間を追ってシミュレーションした例が多い。したがって、本来最初に行うべき系の安定や不安定に関する解析的な議論をする研究が、単純化された場合以外は少ない^{7),8)}。

そこで本研究は、この点を補うために、(1) 水中で運動する Towed vehicle に作用する各種の流体力の特徴を、船舶工学の手法を用い組織的な水槽試験によって明らかにし、さらにその推定方法を示すこと、(2) 一定の速度で曳航され、平衡状態にある vehicle-ケーブル系の線型の運動理論を展開し、特に一定水深を保つための制御を実施した時の安定、不安定の判別を可能にすること、を目的として実施した。まだ実際の複雑な場合に適用するのに十分な域に達していない部分もあるが、今後の基本的な方向は明らかにできたと思えるので、以下にその結果を報告する。

2 運動方程式

Towed vehicle の運動は、物体固定の動座標系 $O-xyz$ で記述する。Fig.1 に示すように x 軸は vehicle の中心線上前方を正とし、原点 O は主翼の中心にとる。 y 軸は進行方向に直角で右方向を正とし、 z 軸は下方を正とする。Vehicle に作用する流体力も動座標系で表現する。したがって浮力などのように、本来地球固定の座標系で定義された成分は、オイラー角で構成される座標変換マトリックス $[E]$ を介して表わすことになる。 $[E]$ の具体的な形は Appendix 1 に示す。

石寺⁹⁾は、運動エネルギーを用いた Lamb の方法¹⁰⁾によって潜水艇の6自由度の運動方程式を導いているが、慣性流体力項に欠落した部分があるようなので、本項では別の方法で導いた。

原点 O が重心でないことを考慮して剛体の運動方程式は、

$$\dot{\mathbf{P}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = \mathbf{F}_0 \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{F}_0 \times \mathbf{r}_G \quad (2)$$

となる。ここに $\mathbf{P}, \mathbf{H}$ は vehicle の運動量と角運動量で

$$\mathbf{P} = m(\mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_G), \quad \mathbf{H} = [\mathbf{I}]\boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

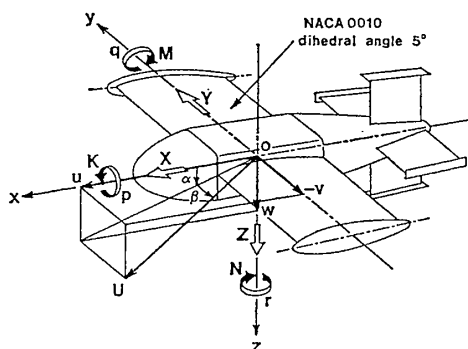


Fig.1 Coordinate system and notations

と表わされる。また外力のベクトル $\mathbf{F}_0$ 、モーメント $\mathbf{M}_0$ は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_0 &\equiv \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_T \\ \mathbf{M}_0 &\equiv \mathbf{M}_{GB} + \mathbf{M}_I + \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

のように細分化されるが、その各項を次に示す。

(1) 重力および浮力^{9),12)} $\mathbf{F}_{GB}, \mathbf{M}_{GB}$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{GB} &= [E](m - \rho V)g\mathbf{K} \\ \mathbf{M}_{GB} &= \mathbf{r}_G \times ([E]m g \mathbf{K}) - \mathbf{r}_B \times ([E]\rho g V \mathbf{K}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで $\mathbf{K}$ は z 軸方向の単位ベクトルである。

(2) 慣性流体力 $\mathbf{F}_I, \mathbf{M}_I$

これについては完全流体力学に基づいた計算が確立されており、Newman がそのテキストで簡潔な形の公式を与えている¹¹⁾。それを本論文で用いている記号で書き直すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_I &= -[A^F]\dot{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\omega} \times ([A^F]\mathbf{U}) \\ \mathbf{M}_I &= -[A^M]\dot{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\omega} \times ([A^M]\mathbf{U}) - \mathbf{V}_a \times ([A^F]\mathbf{U}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで

$$\mathbf{U} = [\mathbf{V}_a, \boldsymbol{\omega}]^T \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_a = \dot{\mathbf{V}}_0 - \dot{\mathbf{V}}_c = \dot{\mathbf{V}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_c \quad (8)$$

$$[A^F] = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & A_{15} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & A_{26} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & A_{35} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[A^M] = \begin{bmatrix} 0 & A_{42} & 0 & A_{44} & 0 & A_{46} \\ A_{51} & 0 & A_{53} & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & A_{62} & 0 & A_{64} & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

(3) 減衰力 $\mathbf{F}_D, \mathbf{M}_D$

流体の粘性に起因する流体力は実験的に求めることになるが、それを次のような形式のモデルで表わしておく。

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} X_{uu}u_a^2 + X_{vv}v_a^2 + X_{ww}w_a^2 + X_{\delta\delta}\delta^2 \\ Y_vv_a + Y_r^*r + Y_{NL}(v_a, r) \\ Z_w w_a + Z_q^*q + Z_\delta\delta \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} K_vv_a + K_p\dot{p} + K_r^*r + K_\gamma\gamma + K_{NL}(v_a, \dot{p}, r) \\ M_w^*w_a + M_q^*q + M_\delta\delta \\ N_v^*v_a + N_r^*r + N_{NL}(v_a, r) \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} Y_{NL}(v_a, r) &= Y_{vv}|v_a|v_a + Y_{rr}|r|r \\ K_{NL}(v_a, \dot{p}, r) &= K_{vv}|v_a|v_a + K_{pp}|\dot{p}|\dot{p} + K_{rr}|r|r \\ N_{NL}(v_a, r) &= N_{vvv}v_a^3 + N_{rr}|r|r \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(4) 曳航ケーブルの張力⁴⁾ $\mathbf{F}_T, \mathbf{M}_T$

静止座標系での曳航ケーブル下端での張力のベクトルを $\mathbf{T}$ と表わすと、ケーブルによって vehicle に働く外力は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_T &= (X_T, Y_T, Z_T)^T = -[E]\mathbf{T} \\ \mathbf{M}_T &= \mathbf{r}_T \times \mathbf{F}_T \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

以上の結果を (1), (2) 式に代入すると, 物体固定の座標系 $O-xyz$ で表現した運動方程式を得ることができる。それを実験および安定性解析の便宜を考えてまとめると, 次のようになる。

縦方向運動方程式

$$\begin{cases} (m+A_{11})\dot{u}+(mz_G+A_{15})\dot{q} \\ =F_X(u_a, v_a, w_a, p, q, r, \phi, \theta, \psi, \delta) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} (m+A_{33})\dot{w}-(mx_G-A_{35})\dot{q} \\ =F_Z(u_a, v_a, w_a, p, q, r, \phi, \theta, \psi, \delta) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} (I_{yy}+A_{55})\dot{q}-(mx_G-A_{53})\dot{w}+(mz_G+A_{51})\dot{u} \\ =M_Y(u_a, v_a, w_a, p, q, r, \phi, \theta, \psi, \delta) \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} F_X = & -(m+A_{33})qw_a + (m+A_{22})rv_a \\ & + (mx_G-A_{35})q^2 + (mx_G+A_{26})r^2 \\ & - (mz_G-A_{24})pr - (m+A_{11})(qw_c-rv_c) \\ & - (m-\rho V)g \sin \theta + X_{uu}u_a^2 + X_{vv}v_a^2 + X_{ww}w_a^2 \\ & + X_{\delta\delta}\delta^2 + X_T(\phi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} F_Z = & -(m+A_{22})pv_a + (mz_G-A_{24})p^2 \\ & + (mz_G+A_{15})q^2 - (mx_G+A_{26})pr \\ & - (m+A_{33})(pv_c-qu_c) + (m-\rho V)g \cos \phi \cos \theta \\ & + Z_w w_a + (Z_q + mu_a)q + Z_\delta \delta + Z_T(\phi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} M_Y = & -(mz_G+A_{15})qw_a + (mz_G-A_{42})rv_a \\ & + (mx_G+A_{62})pv_a - (J_{xz}+A_{46})r^2 \\ & + (J_{xz}+A_{64})p^2 - \{(I_{xx}+A_{44})-(I_{zz}+A_{66})\}pr \\ & + (mx_G-A_{53})(pv_c-qu_c) \\ & - (mz_G+A_{51})(qw_c-rv_c) - (mz_G-\rho V z_B)g \sin \theta \\ & - (mx_G-\rho V x_B)g \cos \phi \cos \theta + M_w w_a \\ & + (M_q - mx_G u_a)q + M_\delta \delta - x_T Z_T + z_T X_T \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $Z_q = Z_q^* + A_{11}u_a$, $M_w = M_w^* + (A_{33}-A_{11})u_a$,
 $M_q = M_q^* + A_{35}u_a$

横方向運動方程式

$$\begin{cases} (m+A_{22})\dot{v}-(mz_G-A_{24})\dot{p}+(mx_G+A_{26})\dot{r} \\ =F_Y(u_a, v_a, w_a, p, q, r, \phi, \theta, \psi) \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} (I_{xx}+A_{44})\dot{p}+(J_{xz}+A_{46})\dot{r}-(mz_G-A_{42})\dot{v} \\ =M_X(u_a, v_a, w_a, p, q, r, \phi, \theta, \psi, \delta) \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} (I_{zz}+A_{66})\dot{r}+(J_{xz}+A_{64})\dot{p}+(mx_G+A_{62})\dot{v} \\ =M_Z(u_a, v_a, w_a, p, q, r, \phi, \theta, \psi) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F_Y = & (m+A_{33})pw_a - (mx_G-A_{35})pq - (mz_G+A_{15})qr \\ & - (m+A_{22})(ru_c-pw_c) + (m-\rho V)g \sin \phi \cos \theta \\ & + Y_v v_a + (Y_r - mu_a)r + Y_{NL} + Y_T(\phi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} M_X = & -(mz_G-A_{24})pw_a - (J_{xz}+A_{46})pq \\ & - \{(I_{zz}+A_{66})-(I_{yy}+A_{55})\}qr - (A_{62}+A_{35})qv_a \\ & + (A_{26}+A_{53})rw_a - (A_{33}-A_{22})v_a w_a \\ & + (mz_G-A_{42})(ru_c-pw_c) \\ & - (mz_G-\rho V z_B)g \sin \phi \cos \theta + K_v v_a + K_p p \\ & + (K_r + mz_G u_a)r + K_\gamma \gamma + K_{NL} - z_T Y_T(\phi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (25)$$

$$M_Z = (mx_G-A_{53})pw_a + (J_{xz}+A_{46})qr$$

$$\begin{aligned} & - \{(I_{yy}+A_{55})-(I_{xx}+A_{44})\}pq \\ & - (A_{51}+A_{24})pu_a + (A_{15}+A_{42})qv_a \\ & - (mx_G+A_{62})(ru_c-pw_c) \\ & + (mx_G-\rho V x_B)g \sin \phi \cos \theta + N_v v_a \\ & + (N_r - mx_G u_a)r + N_{NL} + x_T Y_T(\phi, \theta, \psi) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで

$$\begin{cases} Y_r = Y_r^* - A_{11}u_a, & K_r = K_r^* + A_{51}u_a \\ N_v = N_v^* - (A_{22}-A_{11})u_a, & N_r = N_r^* - A_{26}u_a \end{cases}$$

3 流体力の計測実験とその結果

運動方程式に現われる付加質量係数や, 粘性流体力微係数, 揚力係数などを求めるために拘束模型試験を行った。実験に用いた vehicle の模型の概略図は Fig.1 に示す通りであり, その主要寸法を Table 1 に示す。

実験では, 流体力への自由表面の影響が出ないようにするために, 模型の中心軸を十分深く (水面から 1,200 mm) セットし, 流体力の計測は水中 6 分力計によって行った。

3.1 静的試験

Fig.2 に抵抗試験の結果を示す。これによって (18) 式の X_{uu} が求められるが, これは Hughes の摩擦抵抗係数の定数倍で表わされており, レイノルズ数の影響が認められる。斜航試験によって求められた Y 力, N モーメントを Fig.3 に, K モーメントを Fig.4 に示している。 Y 力, N モーメントでは非線型項がかなり大きい, これは図に示したように 2 次曲線で近似できるように思われる。Fig.4 の K モーメントは主として主翼の下反角 (5°) の効果によって生じるものと考えられる。次に, 主翼の迎角を δ だけ変化させることによる揚力試験の結果を Fig.5 に示す。揚力勾配は次章で述べるよう

Table 1 Principal particulars of towed vehicle

Item	Dimension	Remarks
Fuselage : length breadth height	$L = 1.0 \text{ m}$ $B = 0.2 \text{ m}$ $d = 0.2 \text{ m}$	
Main wing : chord span	$c_w = 0.4 \text{ m}$ $s_w = 0.4 \text{ m}$	2 wings (left & right) with end plate & at dihedral angle 5°
Tail wing : chord span	$c_t = 0.2 \text{ m}$ $s_t = 0.2 \text{ m}$	2-horizontal & 2-vertical wings with end plate

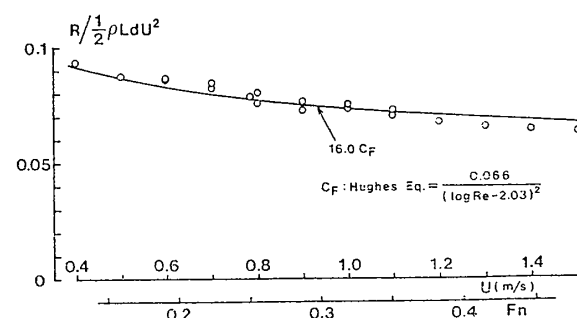


Fig.2 Resistance of towed vehicle

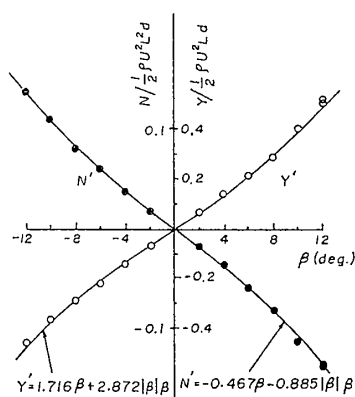


Fig. 3 Sway force and yaw moment obtained from oblique towing test

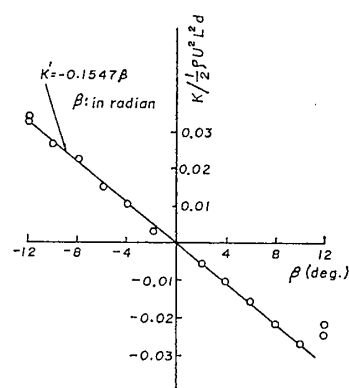


Fig. 4 Roll moment obtained from oblique towing test

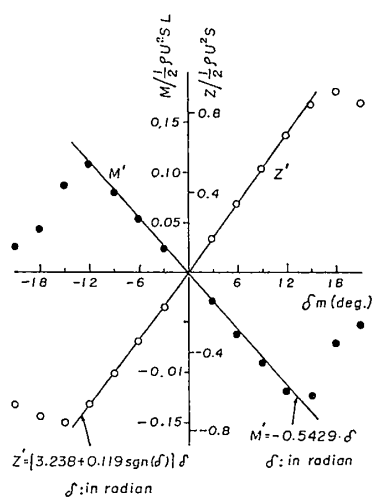


Fig. 5 Lift force and its moment about the center of main wing

に、プラントルの揚力線理論による値とほぼ同じになっている。ストール角が意外に小さく約 12° 程度である。

続いて、vehicle のトリム角 (α) を変化させた時の計測を主翼を取除いた胴体だけの時と、主翼は動かさずに胴体と主翼を一体として動かした場合の2状態について行い、その結果を Fig. 6 に Z 力について示す。図中の点線は Fig. 5 の値、すなわち主翼の迎角だけを変化

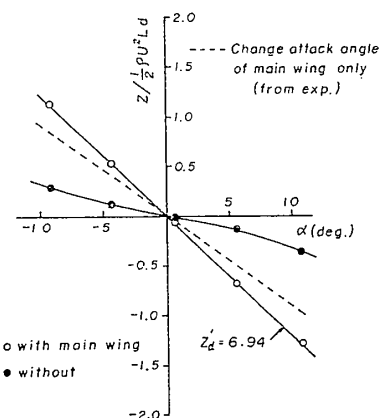


Fig. 6 Heave force obtained from static experiment

させた時の結果である。これから胴体部分の寄与と主翼部分の寄与とを単純に加えた値は、一体としてトリムさせた時の値にはほぼ等しく、干渉効果は無視できる程度と思われる。

3.2 強制動揺試験

運動方程式が物体固定座標系で記述されているので、強制動揺試験は操縦性の研究で行われている手法に基づいて実施した。Pure heave, pure sway 試験は可能であったが、pure pitch, pure yaw 試験が実験装置の制約から不可能であったので、heave と pitch, および sway と yaw の combined motion を行い解析した。したがって pitch, yaw に関する実験結果は精度が多少劣っていると思われる。計測例を以下に示す。

Pure heave 試験によって得られた heave mode の付加質量 A_{33} と減衰力係数をそれぞれ Fig. 7 と Fig. 8 に示す。Fig. 7 から分かるように A_{33} に対する前進速度影響が意外に大きく、前進速度がある場合の低周波数域で A_{33} が小さくなる傾向にある。二次元没水体に対する付加質量の計算¹⁴⁾でも、低周波数では前進速度影響によって値が大きく変化することが見いだされている。Fig. 7 の結果は、低周波数域では実験値に自由表面の影響が出てしまったものと思われる。

Fig. 8 に示した heave mode の減衰力係数 Z_w は、無次元化するとほぼ一定値となり、その値は約 6.6 で静的試験による値 (Fig. 6 参照) と大略一致している。モーメントは (20) 式に示したように、付加質量項の一部と同時に計測されるために $M_w = M_w^* + (A_{33} - A_{11})u$ の形で表わしている。着力点が主翼の中央から前方へ chord 長さの約 20% のところにあることが分かる。

次に pitching 運動に関する計測例として Fig. 9 に減衰力およびその着力点を示す。(19) 式, (20) 式に示したように力は、 $Z_q = Z_q^* + A_{11}u$, モーメントは $M_q = M_q^* + A_{35}u$ の形で計測されるので、そのまま無次元化して表わしている。今度は着力点が後方へ約 $0.3L$ のところ

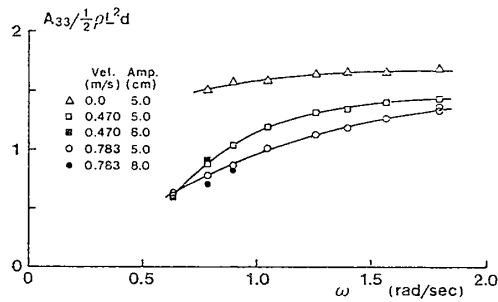


Fig. 7 Added-mass coefficient of heave

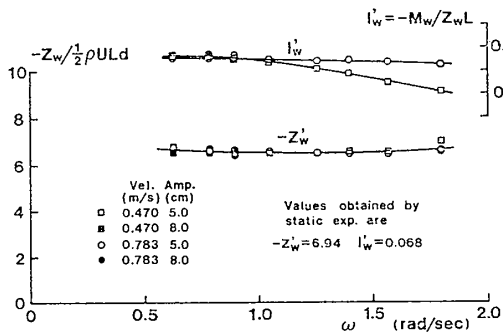


Fig. 8 Damping coefficients of heave and pitch due to heave motion

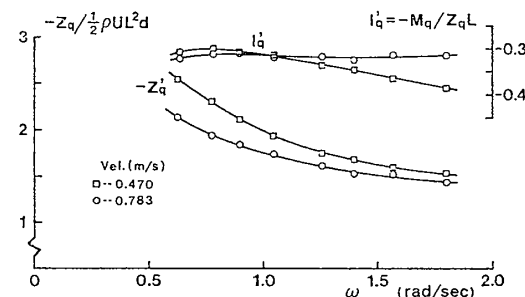


Fig. 9 Damping coefficients of heave and pitch due to pitch motion

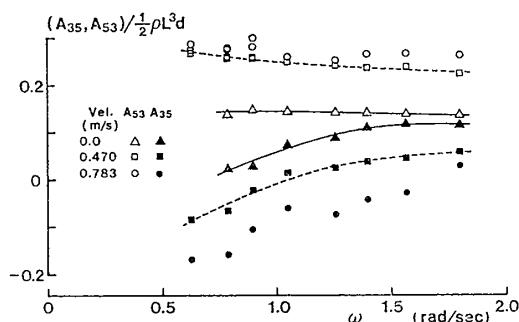


Fig. 10 Coupling added-mass coefficients between heave and pitch

ろにあるが、これは水平尾翼の寄与が大きいためと考えられる。付加質量項の一例として、 A_{53} (pure heave による) と A_{35} (combined motion による) を Fig. 10 に示す。試験のやり方で、 A_{35} の方が精度的に劣ると思われるが、前進速度の影響が顕著に現われており、それは A_{53} と A_{35} で大略反対称となっている。このことか

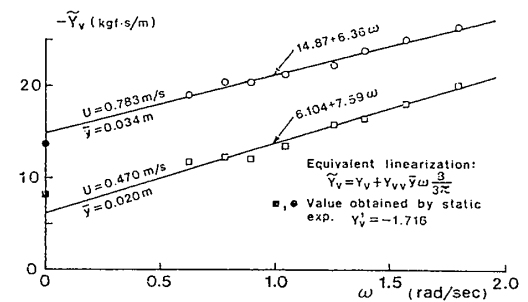


Fig. 11 Damping coefficient of sway

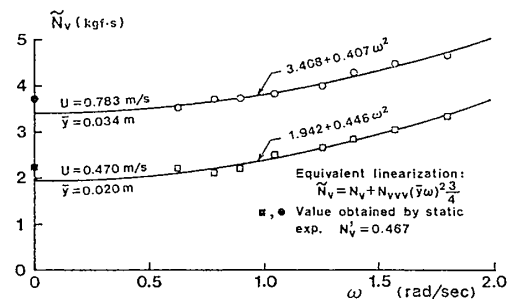


Fig. 12 Coupling damping coefficient of sway into yaw

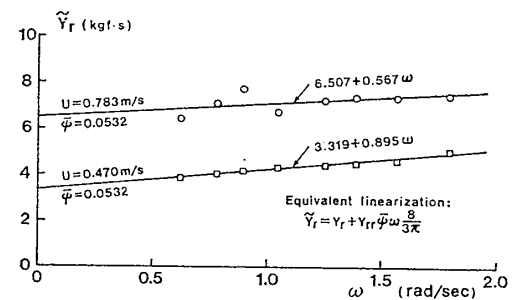


Fig. 13 Coupling damping coefficient of yaw into sway

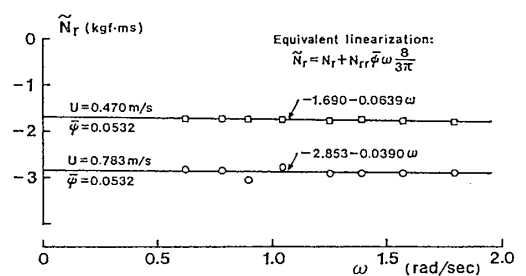


Fig. 14 Damping coefficient of yaw

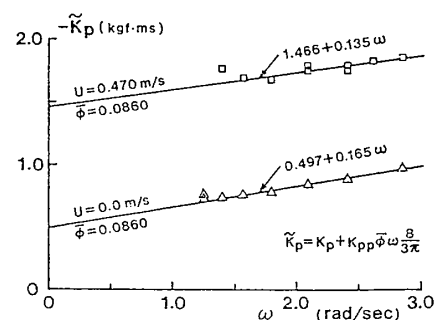


Fig. 15 Damping coefficient of roll

ら、他の付加質量項に対しても $A_{ij} \neq A_{ji}$ となっていることが考えられ、運動方程式の取扱い上注意すべき点であろう。

続いて横方向の強制動揺試験結果について示す。まず pure sway 試験によって得られた減衰力 $\bar{Y}_v$ およびモーメント $\bar{N}_v$ を、それぞれ Fig. 11, Fig. 12 に示している。図に示したように $\bar{Y}_v$ は ω に関して直線、 $\bar{N}_v$ は 2 次曲線で整理できそうである。このことは非線型項が (13) 式のように Y 力は v の 2 次、 N モーメントは v の 3 次で表わされることを意味している。Combined motion によって求められた yawing 運動の減衰力項を、Fig. 13 (Y_r) と Fig. 14 (N_r) に示している。これから Y 力の非線型項が $Y_{rr}|r|r$ の形で表わすことができ、 N モーメントの r に関する非線型項はそれほど大きくないことが分かる。最後に、pure roll 試験によって得られた rolling の減衰モーメントを Fig. 15 に示している。低周波数域で実験精度が少し悪くなっているが、ほぼ ω に関して直線となっており、非線型項が $K_{pp}|p|p$ の形で表わされることを示している。

4 流体力係数の簡易推定法

流体力の推算を何らかの方法で行うことは、異なった形状の vehicle の性能を推定したり、また実験結果の評価を行うためにも必要である。ここでは簡単な細長体理論と翼理論の組み合わせによって、運動方程式中の主な流体力係数を推定する方法についてまとめた。

4.1 縦方向運動方程式の流体力係数

まず、付加質量項は佐々木ほか⁶⁾を参考にして次式で求める。

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= 0.06 \rho V_B \\ A_{33} &= 0.93 \rho V_B + m_w + m_t \\ A_{55} &= 0.77 \rho V_B \frac{1}{20} (L^2 + d^2) + \frac{c_w^2}{32} m_w \\ &\quad + \left(\frac{c_t^2}{32} + l_t^2 \right) m_t \\ A_{35} &= A_{53} = m_t l_t \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで、 V_B : 胴体部分の排水容積、 m_w : 主翼の付加質量 $= 2\rho(\pi/4)c_w \cdot s_w^2$ 、 m_t : 水平尾翼の付加質量 $= 2\rho(\pi/4)c_t \cdot s_t^2$ 、 l_t : 尾翼中心の x 座標。

次に減衰力項に対しては加藤ほか¹²⁾を参考にしたが、プラントルの揚力線理論の結果を基本に考える。すなわち

$$\left. \begin{aligned} a_L &\equiv \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \frac{2\pi A}{A+2} \\ a_D &\equiv \frac{\partial C_D}{\partial \alpha^2} = \frac{4\pi A}{e(A+2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここで、 A : 翼のアスペクト比 $= 2s/c$ 、 e : 飛行体効率¹²⁾ $\doteq 0.8$

胴体部分については細長体理論の結果を採用すると、次のような推定式を得ることができる。

(1) δ に関する流体力微係数

$$\left. \begin{aligned} Z_\delta / \frac{1}{2} \rho U^2 L d &= k a_L \cdot \frac{S_w}{L d} \\ M_\delta / \frac{1}{2} \rho U^2 L^2 d &= -k a_L \cdot \frac{S_w}{L d} \left(\frac{l_p}{L} \right) \\ X_{\delta\delta} / \frac{1}{2} \rho U^2 L d &= -a_D \cdot \frac{S_w}{L d} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここで、 k : (28) 式の a_L を実験的に修正する係数 (さしあたり 1.0 とする)、 S_w : 主翼の翼面積 $= 2c_w \cdot s_w$ 、 l_p : 圧力中心の x 座標 $\doteq 0.35 c_w$

(2) $w(\alpha)$ に関する流体力微係数

$$\left. \begin{aligned} Z_w / \frac{1}{2} \rho U L d &= -k a_L \left\{ 1 + (1-\varepsilon) \frac{S_t}{S_w} \right\} \frac{S_w}{L d} - \pi \frac{d}{L} \\ M_w / \frac{1}{2} \rho U L^2 d &= k a_L \left\{ \frac{l_p}{L} - (1-\varepsilon) \frac{S_t}{S_w} \left(\frac{l_T}{L} \right) \right\} \\ &\quad \times \frac{S_w}{L d} + 0.4 \pi \frac{d}{L} \\ X_{ww} / \frac{1}{2} \rho L d &= (k a_L - a_D) \left\{ 1 + (1-\varepsilon) \frac{S_t}{S_w} \right\} \frac{S_w}{L d} \\ &\quad + \pi \frac{d}{L} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ここで、 $1-\varepsilon$: 主翼による down wash の影響係数 $\doteq 0.8$ 、 S_t : 水平尾翼の翼面積 $= 2c_t \cdot s_t$ 、 $l_T \doteq l_t - c_t/4$ である。

(3) q に関する流体力微係数

$$\left. \begin{aligned} Z_q / \frac{1}{2} \rho U L^2 d &= -k a_L \frac{S_t}{L d} \cdot \left(\frac{l_T}{L} \right) - \pi \frac{d}{L} \\ M_q / \frac{1}{2} \rho U L^3 d &= -k a_L \cdot \frac{S_t}{L d} \left(\frac{l_T}{L} \right)^2 - 0.6 \pi \frac{d}{L} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

以上の推定式を用いて、前節の実験に用いた vehicle の流体力係数を求め、実験値と比較したのが Table 2 である。非常に簡単な推定式によってもほぼ妥当な推定値

Table 2 Comparison of vertical hydrodynamic forces between estimated and measured values

Item	estimated	measured	remarks
A'_{11}	1.447	1.32 ± 0.34	Fig.7
A'_{15}	0.0502	0.050 ± 0.021	
A'_{15}	0.0627	-0.015 ± 0.132	Fig.10
A'_{13}	0.0627	0.216 ± 0.078	
Z'_δ	5.03	5.18	Fig.5
$X'_{\delta\delta}$	-0.704	-0.901	Fig.5
$X'_{\delta\delta}$	-3.14	-2.09	
Z'_w	-6.62	-6.94	static (Fig.6)
		-6.50	pure heave (Fig.6)
n'_t	0.521	0.473	static
		0.47 ± 0.07	pure heave (Fig.8)
X'_{wv}	2.88	3.70	
Z'_q	-1.17	-1.8 ± 0.4	Fig.9
M'_q	-0.621	-0.6 ± 0.15	Fig.9

が得られることが分かる。この表で“/”は無次元値を示す。

4.2 横方向運動方程式の流体力係数

付加質量項は (27) 式と同じように次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} A_{22} &= 0.93 \rho V_B + m_t \\ A_{44} &= \left\{ \frac{1}{32} + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{d}{s_w} \right)^2 \right\} s_w^2 m_w \\ &\quad + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{4} \right) 2 s_t^2 m_t \\ A_{66} &= 0.77 \rho V_B \frac{1}{20} (L^2 + d^2) + \left(\frac{c_t^2}{32} + l_t^2 \right) m_t \\ A_{26} &= A_{62} = -m_t l_t \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

以下、縦方向の場合と全く同様に推定式を与えることができる。

(1) $v(\beta)$ に関する流体力微係数

$$\left. \begin{aligned} Y_v \left/ \frac{1}{2} \rho U L d \right. &= -k a_L \frac{S_t}{L d} - \kappa \pi \frac{d}{L} \\ N_v \left/ \frac{1}{2} \rho U L^2 d \right. &= k a_L \frac{S_t}{L d} \left(\frac{l_T}{L} \right) - 0.4 \kappa \pi \frac{d}{L} \\ K_v \left/ \frac{1}{2} \rho U L^2 d \right. &= \frac{1}{2} k a_L \frac{S_w}{L d} \left(1 + \frac{d}{s_w} \right) \frac{s_w}{L} \Gamma \\ X_{vv} \left/ \frac{1}{2} \rho L d \right. &= (k a_L - a_D) \frac{S_t}{L d} + \kappa \pi \frac{d}{L} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここで、 Γ ：主翼の下反角 (radian), κ ：胴体部分だけの横方向可視面積比 ≈ 0.7

(2) r に関する流体力微係数

$$\left. \begin{aligned} Y_r \left/ \frac{1}{2} \rho U L^2 d \right. &= k a_L \frac{S_t}{L d} \left(\frac{l_T}{L} \right) + \kappa \pi \frac{d}{L} \\ N_r \left/ \frac{1}{2} \rho U L^3 d \right. &= -k a_L \frac{S_t}{L d} \left(\frac{l_T}{L} \right)^2 - 0.6 \kappa \pi \frac{d}{L} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(3) p に関する流体力微係数

$$\begin{aligned} K_p \left/ \frac{1}{2} \rho U L^3 d \right. &= -\frac{1}{3} k a_L \left\{ \frac{S_w}{L d} \left(\frac{s_w}{L} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{S_t}{L d} \left(\frac{s_t}{L} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

(4) r に関する流体力微係数

水平尾翼の迎角 γ は左右対称に動くのでロールモーメントを発生する。これは横方向の姿勢の制御のためである。ロールモーメントの値は次式で推定する。

$$K_r \left/ \frac{1}{2} \rho U^2 L^2 d \right. = \frac{1}{2} k a_L \frac{S_t}{L d} \left(\frac{s_t}{L} \right) \quad (36)$$

以上の推定式による実験に用いた vehicle の流体力係数と実験値を比較したのが Table 3 である。再び、簡単な推定式の精度が良いことが分かる。

5 縦運動の動的安定性の理論

Vehicle に作用する流体力の特性が分かった時に、ま

Table 3 Comparison of horizontal hydrodynamic forces between estimated and measured values

Item	estimated	measured	remarks
A_{22}	0.442	0.588 ± 0.049	
A_{44}	0.0983	0.067 ± 0.020	
A_{66}	0.0451	0.051 ± 0.020	
A_{24}	-0.0627	-0.123 ± 0.098	
A_{42}	-0.0627	-0.054 ± 0.015	
μ_v	-1.646	-1.716	static (Fig.3)
		-1.58 ± 0.28	pure sway (Fig.11)
μ_w	0.367	0.467	static (Fig.3)
		0.415 ± 0.010	pure sway (Fig.12)
κ_v	0.132	0.155	static (Fig.4)
κ_w	0.892		
γ_r	0.763	0.753 ± 0.061	Fig.13
γ_p	-0.376	-0.355 ± 0.002	Fig.14
γ_p	-0.300	-0.306	Fig.15
κ_v	0.121		

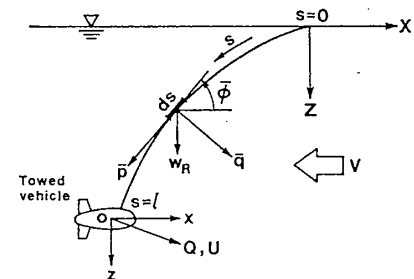


Fig. 16 Coordinate system for the analysis of cable-vehicle dynamics

ず実施すべきことは、その曳航中における安定性の検討であろう。特に主翼の迎角を変化させて、深度一定の制御を行うような場合に動的な安定性の検討が重要である。ここでは曳航ケーブルの運動との連成を考慮した vehicle の微小振幅運動（特に上下方向）の解析方法を示し、その動的安定性を検討する。基本的には解析方法は Abel の考え方⁸⁾を曲率のあるケーブルに拡張した形になっている。

なお、簡単のために縦方向の動きだけを考え、さらに重量と浮力が同一、重心と浮心も一致すると仮定する。

5.1 曳航ケーブルの振動方程式と近似解法

簡単のために Fig. 16 に示すような XZ 面内における二次元問題を考え、ケーブルに沿った座標を s とする。ケーブルの平衡状態からの変位の接線方向、法線方向成分をそれぞれ $\bar{p}, \bar{q}$ とし、また線素 ds の X 軸とのなす角を ϕ とする。Fig. 16 のその他の記号は w_R ：ケーブルの単位長さ当りの水中重量、 l ：ケーブルの長さ ($s=l$ は曳航点)、 Q ：曳航点におけるケーブルの法線方向の変位、 U ： Q 方向の Towed vehicle の速度 ($=\dot{Q}$)、 V ：一様流速である。

解析は定常成分に suffix 0 をつけ、振動成分に suffix 1 をつけて行う。ケーブルの張力 T 、 X 軸とのなす角 ϕ

は

$$T = T_0 + T_1, \quad \bar{\phi} = \bar{\phi}_0 + \bar{\phi}_1 \quad (37)$$

と表わせる。 $T_1, \bar{\phi}_1$ および $\bar{p}, \bar{q}$ を微量としてその2次以上の項は無視する。

ケーブルの法線方向の変位 $\bar{q}$ に関する微分方程式は、次式で与えられる (Appendix 2)。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(T_0 \frac{\partial \bar{q}}{\partial s} \right) - D(\bar{\phi}_0) \frac{\partial \bar{q}}{\partial s} = m_q \ddot{\bar{q}} + \rho d_c C_D V \sin \phi_0 \dot{\bar{q}} \quad (38)$$

ケーブル下端、すなわち曳航点の法線方向変位を $\bar{q} = Q(t)$ と表わすと、上端では $\bar{q} = 0$ であるから、一般的に次のようにおくことができる。

$$\bar{q}(s, t) = \frac{s}{l} Q(t) + \sum_k f_k(s) \bar{q}_k(t) \quad (39)$$

ここで $f_k(s)$ は固有関数であり、 λ_k を固有値とする時次式の解として求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T_0 \frac{df_k}{ds} \right) + \lambda_k^2 f_k &= 0 \\ f_k(0) = f_k(l) &= 0, \quad \int_0^l f_k(s) f_j(s) ds = \delta_{kj} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$f_k(s)$ の近似解法については Appendix 3 に示されている。平衡状態におけるケーブルに沿って、種々の量の変化が十分にゆるやかであると考えられるので、この近似解の使用は妥当なものと考えられる。

(39) 式の $\bar{q}_k(t)$ に関する微分方程式は (40) 式を考慮に入ると次式となる。

$$\begin{aligned} \sum_k (m_q \ddot{\bar{q}}_k + \rho d_c C_D V \sin \bar{\phi}_0 \dot{\bar{q}}_k + \lambda_k^2 \bar{q}_k) f_k(s) \\ = -\frac{s}{l} (m_q \ddot{Q} + \rho d_c C_D V \sin \bar{\phi}_0 \dot{Q}) \\ + \frac{1}{l} \left\{ \frac{dT_0}{ds} - D(\bar{\phi}_0) \right\} Q \end{aligned} \quad (41)$$

両辺に $f_j(s)$ を乗じて、 s について $0 \sim l$ まで積分すれば、固有関数の直交性によって次式で $\bar{q}_k$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} m_q \ddot{\bar{q}}_k + \beta_{kk} \dot{\bar{q}}_k + \lambda_k^2 \bar{q}_k + \sum_{j \neq k} \beta_{kj} \dot{\bar{q}}_j \\ = -(A_k \ddot{Q} + B_k \dot{Q} + C_k Q) \end{aligned} \quad (42)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \beta_{kj} &= \rho d_c C_D V \int_0^l \sin \bar{\phi}_0 f_k f_j ds \\ A_k &= m_q / l \int_0^l s f_k ds \\ B_k &= \rho d_c C_D V / l \int_0^l s \sin \bar{\phi}_0 f_k ds \\ C_k &= -1/l \int_0^l \left\{ \frac{dT_0}{ds} - D(\bar{\phi}_0) \right\} f_k ds \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

(42) 式の $\beta_{kj} (k \neq j)$ は β_{kk} に比べて小さいであろうから、解析を容易にするために以後の計算では無視する。求められた $\bar{q}_k$ によって曳航点の張力の Q 方向の変

動成分が求められて

$$\begin{aligned} \Delta T_Q &= (T_0 + T_1) \sin \bar{\phi}_1 \\ &\sim T_0 \bar{\phi}_1 = T_0 \partial \bar{q} / \partial s|_{s=l} \\ &= T_0 \left\{ \frac{Q(t)}{l} + \sum_k \frac{df_k}{ds} \bar{q}_k(t) \right\}_{s=l} \end{aligned} \quad (44)$$

5.2 動的安定性に関する計算

簡単のために縦方向の運動方程式において、vehicle はトリムしていないと仮定し、釣り合い状態からの微小撓乱項に関する微分方程式を求める。とりあえず本論文では、pitching はしないとし、pitching との連成運動の影響に関しては次の機会に報告する。この時、方程式は

$$(m + A_{11}) \dot{u} - 2X_{uu} \bar{u} u = \Delta X_T \quad (45)$$

$$(m + A_{33}) \dot{w} - Z_{ww} w = Z_\delta \delta + \Delta Z_T \quad (46)$$

ここで $\bar{u}$ は釣り合い状態での値であり、 (u, w) が微小撓乱速度成分である。Fig. 16 に示したように、 Q 方向の速度を U と表わすと

$$\left. \begin{aligned} u &= U \cos \left(\frac{\pi}{2} - \bar{\phi}_0 \right) = \dot{Q} \sin \bar{\phi}_0 \\ w &= U \sin \left(\frac{\pi}{2} - \bar{\phi}_0 \right) = \dot{Q} \cos \bar{\phi}_0 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

である。(45) 式に $\sin \bar{\phi}_0$ 、(46) 式に $\cos \bar{\phi}_0$ を乗じて加えると次式が得られる。

$$(m + \Delta m) \ddot{Q} + n \dot{Q} = Z_\delta \delta \cos \bar{\phi}_0 + \Delta T \quad (48)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \Delta m &= A_{11} \sin^2 \bar{\phi}_0 + A_{33} \cos^2 \bar{\phi}_0 \\ n &= -(2X_{uu} \bar{u} \sin^2 \bar{\phi}_0 + Z_{ww} \cos^2 \bar{\phi}_0) \\ \Delta T &= \Delta X_T \sin \bar{\phi}_0 + \Delta Z_T \cos \bar{\phi}_0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

(48) 式の右辺の主翼角 δ を変えて平衡状態の水深を保つように制御する場合には、次のような方式が一般的であろう。

$$T_\delta \dot{\delta} + \delta = \delta^* = (-K_1 Q - K_2 \dot{Q}) \cos \bar{\phi}_0 \quad (50)$$

ここで T_δ は時定数、 δ^* は指令翼角、 K_1, K_2 は制御定数である。翼角を制御しなければ $K_1 = K_2 = 0$ とすれば良い。

(48) 式で $\Delta T + \Delta T_Q = 0$ であるから (44) 式を代入し、両辺のラプラス変換をとると次のような特性方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} (m + \Delta m) S^2 + n S + \frac{K_1 + K_2 S}{1 + T_\delta S} Z_\delta \cos^2 \bar{\phi}_0 \\ + T_0 \left[\frac{1}{l} + \sum_k \frac{df_k}{ds} \Big|_{s=l} \cdot \bar{T}_k(S) \right] = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

ここで

$$\bar{T}_k(S) = \frac{Q(S)}{q_k(S)} = -\frac{A_k S^2 + B_k S + C_k}{m_q S^2 + \beta_{kk} S + \lambda_k^2} \quad (52)$$

特性方程式 (51) の根の実数部の正負によって、vehicle の上下方向の不安定、安定を判別することができる。

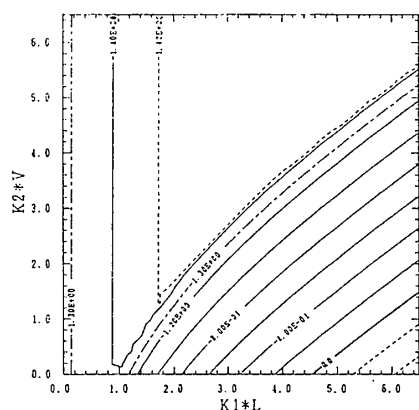


Fig. 17 Result of dynamic stability analysis for cable-vehicle system

5.3 計算例

Table 1 の模型に相当する実機（長さ 2m, 空中重量 200kg）に対して, その安定性を検討した。ケーブルの長さ l は 600m, 径 d_c は 0.0161m, 曳航速度 V は 4.12m/s, ケーブルの単位長さ当り水中重量 0.72kg とした。この状態であらかじめ平衡状態のケーブル形状を計算し ϕ_0 , T_0 のケーブルに沿った分布を求めた。この状態で vehicle の水深は 135m である。

この状態で (51) 式の特性方程式を Bairstow 法で解き, 根の実数部の最大のものを K_1 , K_2 に対して求めたのが Fig. 17 である。 K_1 と K_2 はそれぞれケーブル長 l , 曳航速度 V で無次元化している。図には, 根の実数部の最大値の等高線が画かれている。このケースでは K_1 が大きい場合以外はほぼ安定であると判断される。なお, 特性方程式 (51) の級数は, 低次のモードのケーブルの動きが vehicle の動きに対して支配的と考えることから, 3 項までしかとらなかった。

6 む す び

(1) 組織的な水槽試験によって種々の姿勢, 運動状態にある Towed vehicle に働く流体力の特性を明らかにした。

(2) 種々の形状の vehicle に適用することができる流体力の簡単な推定式の精度が, 十分であることを実験との比較によって示した。

(3) 深度制御を行った時の vehicle の微小振幅運動を, ケーブルとの動的な相互作用を考慮して計算する方法を提案した。この方法は, 深度制御を受けた時の vehicle の上下方向の安定性の検討に用いることができるが, 今後, 縦揺との連成を考慮するなどもう少し改善が必要である。

本研究に当り水槽実験に際して多大の協力をいただいた九大・応用力学研究所 稲田 勝技官, 理論計算を担

当された同じく安永 誠技官に深甚の感謝をささげる。なお本研究は昭和 60, 61 年度科学研究費補助金（一般 B）によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Dessureault, J. G.: "Batfish" A depth control-lable towed body for collecting oceanographic data, Ocean Engineering, Vol. 3, (1976), pp. 91-111.
- 2) Burroughs, J. D. and Benz, R. C.: Computer support in the design and testing of undersea towed systems, Marine Technology, April (1974), pp. 159-172.
- 3) 山北和之: 没水型曳航体の曳航特性に関する研究 (第 1 報), 日本造船学会論文集, 第 156 号 (1984), pp. 207-215.
没水型曳航体の曳航特性に関する研究 (第 2 報), 日本造船学会論文集, 第 157 号 (1985), pp. 119-125.
- 4) 望月光宣, 小田杜茂一: 海洋ロボット (有索式) の運動特性に関する研究, 三井造船技報, 第 127 号 (1986), pp. 1-9.
- 5) 佐々木建, ほか: 曳航体と曳航索の力学について, 海洋科学技術センター試験研究報告, 第 1 号 (1977), pp. 50-60.
- 6) Muddie, J. D. and Ivers, W. D.: Simulation Studies of the Response of a Deeply Towed Vehicle to Various Towing Ship Maneuvers, Ocean Engineering, Vol. 3 (1975), pp. 37-46.
- 7) Jeffrey, N. E.: Influence of Design Features on Underwater Towed System Stability, J. Hydronautics, Vol. 2, No. 4 (1968), pp. 205-212.
- 8) Abel, J. M.: Cable Interactions in a Depth Controlled Submersible, J. Hydronautics, Vol. 6, No. 2 (1972), pp. 83-89.
- 9) 石寺 博ほか: 遠隔操作式無人潜水艇の運動シミュレーション, 日本造船学会論文集, 第 158 号 (1985), pp. 157-168.
- 10) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th edition, (1963).
- 11) Newman, J. N.: Marine Hydrodynamics, MIT Press, (1977).
- 12) 加藤寛一郎, 大屋昭男, 柿沢研治: 航空機力学入門, 東京大学出版会 (1982).
- 13) 飯高 弘, 梅谷陽二: 水中調査用自動潜水船の運動と制御に関する基礎的研究 (第 1 報), 日本造船学会論文集, 第 138 号 (1975), pp. 210-221.
- 14) Kashiwagi, M., K. Varyani and Ohkusu, M.: Hydrodynamic forces acting on a Submerged Elliptic Cylinder Translating and Oscillating in Waves, 西部造船会々報, (1987)(掲載予定).

Appendix 1 座標系とオイラー角

Fig. A1 に示すように z 軸を鉛直下方にとって, 右手系の座標を用い, $\bar{O}-XYZ$ を空間固定の静止座標系,

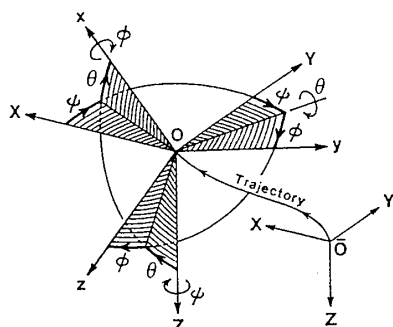


Fig. A1 Relation between body-fixed and space-fixed coordinates (Eulerian angles)

$O-xyz$ を物体固定の動座標系とする。

オイラー角 ψ, θ, ϕ を図のように定義すると静止座標系から見た物体の位置および姿勢に関する方程式は、次のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = [E(\phi, \theta, \psi)]^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi & & & \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & & & \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & & & \\ \cos \theta \sin \psi & & -\sin \theta & \\ \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta & & \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta & & \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

ここで (A-1) 式中の $[E]^{-1}$ は (A-2) 式の逆行列を表わす。(A-1), (A-3) 式の $(u, v, w), (p, q, r)$ は動座標系に対して定義された vehicle の速度と角速度である。

Appendix 2 曳航ケーブルの運動方程式

Fig. 16 の座標系で $\bar{p}, \bar{q}$ 方向の単位ベクトルを $\bar{i}, \bar{j}$ と表わすと、線素 ds の運動方程式は次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} m_c a &= \frac{\partial}{\partial s} (T \bar{i}) + F_w + F_D \bar{j} + F_I \\ a &= \ddot{\bar{p}} \bar{i} + \ddot{\bar{q}} \bar{j}, \quad \frac{\partial \bar{i}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} \bar{j} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-4})$$

F_w は空間座標系の鉛直方向に働く力 (重力-浮力) であり

$$\begin{aligned} F_w &= w_R K = w_R (\sin \bar{\phi} \bar{i} + \cos \bar{\phi} \bar{j}) \\ &\sim w_R \{ (\sin \bar{\phi}_0 + \bar{\phi}_1 \cos \bar{\phi}_0) \bar{i} + (\cos \bar{\phi}_0 - \bar{\phi}_1 \sin \bar{\phi}_0) \bar{j} \} \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

と表わせる。 F_D はケーブルに作用する $\bar{q}$ 方向の流体抗力で

$$\begin{aligned} F_D &= -\frac{\rho}{2} d_c C_D |\dot{\bar{q}} + V \sin \bar{\phi}| (\dot{\bar{q}} + V \sin \bar{\phi}) \\ &\sim -\rho d_c C_D \left\{ \frac{1}{2} V^2 \sin^2 \bar{\phi}_0 + \dot{\bar{q}} V \sin \bar{\phi}_0 \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \bar{\phi}_1 V^2 \cos \bar{\phi}_0 \sin \bar{\phi}_0 \right\} \quad (\text{A-6})$$

ここで C_D はケーブルの抗力係数であり、 d_c はケーブルの直径である。

F_I はケーブルの付加質量に相当する流体力である。

(A-4) 式を定常な部分と非定常部分に分けると、次のような運動方程式が得られる。

定常部分:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dT_0}{ds} + w_R \sin \bar{\phi}_0 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{A-7})$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_0 \frac{d\bar{\phi}_0}{ds} - \frac{1}{2} \rho d_c C_D V^2 \sin^2 \bar{\phi}_0 + w_R \cos \bar{\phi}_0 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{A-8})$$

非定常部分:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial s} + w_R \bar{\phi}_1 \cos \bar{\phi}_0 &= m_p \ddot{\bar{p}} \end{aligned} \right. \quad (\text{A-9})$$

$$\left\{ \begin{aligned} T_0 \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial s} + T_1 \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial s} - \bar{\phi}_1 (\rho d_c C_D V^2 \cos \bar{\phi}_0 + w_R) \sin \bar{\phi}_0 \\ = m_q \ddot{\bar{q}} + \rho d_c C_D V \sin \bar{\phi}_0 \dot{\bar{q}} \end{aligned} \right. \quad (\text{A-10})$$

ただし $m_p = m_c + \bar{p}$ 方向の付加質量、 $m_q = m_c + \bar{q}$ 方向の付加質量である。

(A-9), (A-10) 式において $\bar{p}, \bar{q}$ は幾何学的条件によって $\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1$ と次の関係にある

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}}{\partial s} &= \bar{\phi}_1 - \bar{p} \frac{d\bar{\phi}_0}{ds} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} &= \bar{q} \frac{d\bar{\phi}_0}{ds} \end{aligned} \right. \quad (\text{A-11})$$

これらの方程式はケーブル上端、下端での適当な境界条件を与えることによって解くことができるが、(A-10) 式で $d\bar{\phi}_0/ds$ が振動変位と同程度の微小量であるとして (A-11) 式から

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial s} \sim \bar{\phi}_1, \quad \bar{p} \sim 0 \quad (\text{A-12})$$

が得られるので、(A-10) 式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} T_0 \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial s^2} + \left\{ \frac{dT_0}{ds} - D(\bar{\phi}_0) \right\} \frac{d\bar{q}}{ds} \\ = m_q \ddot{\bar{q}} + \rho d_c C_D V \sin \bar{\phi}_0 \dot{\bar{q}} \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

ここで

$$D(\bar{\phi}_0) = \rho d_c C_D V^2 \cos \bar{\phi}_0 \sin \bar{\phi}_0$$

Appendix 3 固有値問題の近似解法

$$\frac{d^2 f_k}{ds^2} + 2a(s) \frac{df_k}{ds} + \frac{\lambda_k^2}{T_0} f_k = 0 \quad (\text{A-14})$$

ここで

$$a(s) = \frac{1}{2T_0} \frac{dT_0}{ds} \quad (\text{A-15})$$

(A-14) 式で、変換

$$f_k(s) = F_k(s) \exp \left[-\int_0^s a(s) ds \right] \quad (\text{A-16})$$

を行うと、 $F_k(s)$ に関する次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 F_k}{ds^2} + \left(\frac{\lambda_k^2}{T_0} - \frac{da}{ds} - a^2 \right) F_k = 0 \quad (\text{A-17})$$

ここで () 内の第2項と第3項が λ_k^2/T_0 に比べて十分小さいと仮定する。この微分方程式は WKB 法によって近似解を得ることができて

$$F_k(s) \sim T_0^{1/4} \{ A e^{i\lambda_k s} + B e^{-i\lambda_k s} \} \quad (\text{A-18})$$

ここで

$$\tau = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{T_0}} ds$$

となる。A, B は任意の定数で, $f_k(0) = f_k(l) = 0$ の条件によって, 次式の解を得る。

$$F_k(s) = 2iAT_0^{1/4} \sin\left(\lambda_k \int_0^s \frac{1}{\sqrt{T_0}} ds\right) \quad (\text{A-19})$$

ただし

$$\lambda_k = k\pi / \int_0^l \frac{1}{\sqrt{T_0}} ds \quad (k=1, 2, \dots)$$

この解を (A-13) 式に代入して, 次のような固有関数の近似解が得られる。

$$f_k(s) = A'T_0^{1/4} \exp\left[-\int_0^s a(s) ds\right] \sin\left(\lambda_k \int_0^s \frac{1}{\sqrt{T_0}} ds\right) \quad (\text{A-20})$$

ここで, A' は次の条件を満足するように決められた規格化定数である。

$$\int_0^l f_k^2(s) ds = 1 \quad (\text{A-21})$$