

(昭和 63 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

大型鉛直円柱による長周期波の非線形散乱 問題に関する基礎的研究

正員 増田光一* 正員 永井孝志**

Fundamental research on a nonlinear diffraction problem of the long waves by a huge vertical circular cylinder

by Koichi Masuda, Member Takashi Nagai, Member

Summary

The objectives of present paper are to formulate the nonlinear diffraction problem for the long waves induced by a short wave groups using the multiple scales perturbation method and to find the effect of 2nd-order long waves on the ocean structures.

The governing equation for the 1st-order zeroth harmonic potential is obtained by using the solvability condition of the boundary value problem for 3rd-order zeroth harmonic potential. The formulas for the surface elevation of the 2nd-order long waves induced by modulated short wave groups are derived analytically.

Numerical results are presented for the case where the envelope of incident waves-train is a sine function and the influences of the long waves around a huge circular cylinder are considered.

主な記号

- (x, y, z) : 直交直線座標
- (r, θ, z) : 円筒座標
- $\Phi(x, y, z, t)$: 速度ポテンシャル
- $\zeta(x, y, z, t)$: 自由表面の変位
- ω : 入射波の円周波数
- k : 入射波の波数
- $A(x_1, t_1)$: 入射波の包絡波形
- $B(x_1, y_1, t_1)$: 散乱波の包絡波形
- a_1 : 半径の slow scale ($=\epsilon a$)
- a : 円柱の半径
- (x_1, y_1, t_1) : slow 座標 ($=\epsilon(x, y, t)$)
- $\Phi_n(x, y, z, t, x_1, y_1, t_1)$: n 次のオーダーの速度ポテンシャル
- $\zeta(x, y, z, t, x_1, y_1, z_1)$: n 次のオーダーの自由表面変位
- F_n, G_n : n 次のオーダーの非齊次項
- Φ_{nm}, ζ_{nm} : n 次オーダー m 次ハーモニックのポテンシャルと自由表面変位
- F_{nm}, G_{nm} : n 次オーダー m 次ハーモニックの非齊次項

 g : 重力加速度 h : 水深 J_n : n 次の第1種ベッセル関数 H_n : n 次の第1種ハンケル関数 J'_n, H'_n : ベッセル関数の微分を意味する C_g : 群速度 a_0 : 入射波の波振幅 k_0 : 包絡波形の波数 Ω : 包絡波形の円周波数 $\Phi^{I_{10}}, \varphi^{I_{10}}$: 長周期の入射波ポテンシャル $\Phi^{S_{10}}, \varphi^{S_{10}}$: 長周期の散乱波ポテンシャル Φ_{10} : 長周期の全ポテンシャル**緒言**

浮遊構造物の係留系、沖合人工島に付随した小規模港湾などは、数分のオーダーの固有周期を有しているため、10秒前後の風波に対して同調することはほとんどない。しかし、実際の海洋波は、必ずしも一定の包絡波形を有するのではなく、数分のオーダーで包絡波形は緩やかに変調する。浮体の係留系及び港湾などの設計・計画に際して、緩やかに変調する包絡波形をもつ波群によって誘発される長周期波（以後、非線形長周期波または2次長周期波と呼ぶことにする）の影響を検討すること

* 日本大学理工学部

** 日本大学大学院

は重要である。ところで、非線形長周期波は、サーフビート、edge波等の原因になり得るため海岸工学の分野では、多くの研究がなされている^{1)~4)}。一方、船舶工学の分野では、係留浮体の長周期動揺という観点から若干の研究がなされている^{5),6)}。しかし、海洋施設と非線形長周期波の相互作用に関する研究は、少ないものと思われる。

そこで、本研究は、大型海洋施設（例えば、沖合人工島など）による長周期波の非線形散乱問題を Multiple Scales 摂動法を用いて定式化し、さらに大型海洋施設周辺での2次長周期波の分布性状及び周辺海域の船舶等に与える影響を明確にすることを目的とする。Multiple Scales 摂動法を用いた解析は、Agnon と Mei^{7),8)}により2次元浮体の長周期動揺に対して行われている。さらに、Zhou と Liu⁹⁾は、同様の手法により円柱に作用する2次長周期波力を計算している。

したがって、本論においては、Zhou と Liu の定式化を検討し、それを基に Multiple Scales 摂動法の長所を生かして大型鉛直円柱による長周期波の非線形散乱問題に関する定式化を行い、2次長周期波の水面変位を求める算定式を誘導する。さらに、入射波の包絡波形を正弦波と仮定し数値計算を行い、その結果を基に2次長周期波の Wave run-up 及び波振幅分布の性状について考察する。

2 基礎方程式及び境界条件

流体は、非粘性、非圧縮性の完全流体とし、その運動は、非回転であり流体中には速度ポテンシャルの存在が保障される。座標系は、Fig. 1 に示すような直角座標系 (x, y, z) であり、水深 h の水底に大型の円柱が設置される。入射波は、 x 軸の負方向から入射するものとし、便宜上円筒座標系 (r, θ, z) を用いることもある。

流場の速度ポテンシャルは以下の基礎方程式及び境界条件を満足する。

● ラプラスの方程式

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad (-h < z < \zeta), \quad (2.1)$$

ここで、 ζ は水面変位を示し、下付添字は、偏微分を意味する。

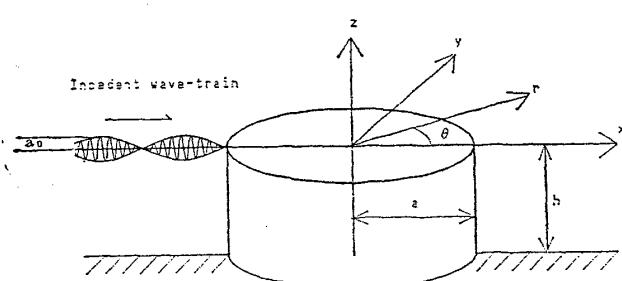


Fig. 1 Coordinate system

● 水底の条件

$$\Phi_z = 0 \quad (z = -h). \quad (2.2)$$

● 円柱表面の条件

$$\Phi_r = 0 \quad (r = a). \quad (2.3)$$

● 自由表面の境界条件

$$\zeta_t + \zeta_x \Phi_x + \zeta_y \Phi_y = \Phi_z \quad (z = \zeta). \quad (2.4)$$

$$g\zeta + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = 0 \quad (z = \zeta). \quad (2.5)$$

3 Multiple Scales 摂動展開

今、入射波群の周波数を ω と仮定すると、入射波群の包絡線は x 方向と時間 t に対して緩やかに変調する。微小振幅波の波傾斜を $kA=0(\epsilon)\ll 1$ とすると、包絡線の変調は、長さ及び時間スケールに対してそれぞれ $0(\epsilon^{-1}) \cdot 2\pi/k$ 及び $0(\epsilon^{-1}) \cdot 2\pi/\omega$ となる。さらに、本論では、大型の円柱を想定しているため、円柱の半径は波群の長さに匹敵するものとする。すなわち、

$$ka = 0(\epsilon^{-1}) \gg 1 \quad (3.1)$$

であり、半径の slow scale は、

$$a_1 = \epsilon a \quad (3.2)$$

のように定義でき、さらに、

$$ka_1 = 0(1). \quad (3.3)$$

である。

波の包絡線は、 $0(\epsilon\omega)^{-1}$ の時間的スケールと $0(\epsilon k)^{-1}$ の空間的スケールをもつから、以下のようないい新的座標

$$(x_1, y_1, t_1) = \epsilon(x, y, t) \quad (3.4)$$

を定義する。また、水深 h は相対的に浅いと仮定しているため、 z 方向には新しい座標系を定義する必要はない。

ここで、速度ポテンシャル Φ と自由表面の変位 ζ を摂動パラメータ ϵ のべき級数に展開すると、

$$\Phi = \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \dots, \quad (3.5a)$$

$$\zeta = \epsilon \zeta_1 + \epsilon^2 \zeta_2 + \dots, \quad (3.5b)$$

のようになり、ここで、 Φ_n , ζ_n は、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_n &= \Phi_n(x, y, z, t, x_1, y_1, t_1) \\ \zeta_n &= \zeta_n(x, y, z, t, x_1, y_1, t_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

であり、slow 座標を導入した場合偏微分は以下のようになる。

$$\partial/\partial x(\epsilon^n \Phi_n) = \epsilon^n \{\Phi_{nx} + \epsilon \Phi_{nxx}\} \quad (3.7)$$

式 (3.5a), (3.5b) を式 (2.1)～(2.5) に代入し、式 (3.7) を考慮して摂動パラメータ ϵ の3次のオーダーまで整理すると以下の方程式を得る。

● ラプラス方程式：

$$\Phi_{nxx} + \Phi_{nyy} + \Phi_{nzz} = F_n \quad (-h < z < 0) \quad (3.8a)$$

ここで、 $n=1, 2, 3$

$$F_1 = 0, \quad (3.8b)$$

$$F_2 = -2\Phi_{1xx_1} - 2\Phi_{1yy_1}, \quad (3.8c)$$

$$F_3 = -\{(\Phi_{1xz_1} + \Phi_{1yz_1}) + 2\Phi_{2xx_1} + 2\Phi_{2yy_1}\}. \quad (3.8d)$$

●自由表面の条件：

$$\Phi_{nnt} + g\Phi_{nz} = G_n \quad (z=0), \quad (3.9a)$$

ここで、

$$G_1 = 0, \quad (3.9b)$$

$$G_2 = -2\Phi_{1tt_1} - \left[\frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 - \frac{1}{g}(\Phi_{1t}\Phi_{1z})_t \right]_t \\ - (\Phi_{1x}\Phi_{1t})_x - (\Phi_{1y}\Phi_{1t})_y, \quad (3.9c)$$

$$G_3 = -\left[\zeta_2\Gamma_z\Phi_1 + \zeta_1\Gamma_z\Phi_2 + \frac{1}{2}\zeta_1^2\Gamma_{zz}\Phi_1 \right. \\ + 2(\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2)_t + \zeta_1(\nabla\Phi_1)_{tz}^2 + \frac{1}{2}\nabla\Phi_1 \nabla(\nabla\Phi_1)^2 \\ + \Phi_{1t_1} + 2\Phi_{2tt_1} + 2\Phi_{1x}\Phi_{1xt_1} + 2\Phi_{1x}\Phi_{1xt_1} \\ + 2\Phi_{1x_1}\Phi_{1xt} + 2\Phi_{1y}\Phi_{1yt_1} + 2\Phi_{1y}\Phi_{1yt_1} \\ \left. + 2\Phi_{1y_1}\Phi_{1yt} + 2\zeta_1\Phi_{1zt_1} \right], \quad (3.9d)$$

$$\text{ただし, } \Gamma = g \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

●自由表面の変位：

$$\zeta_n = -\frac{1}{g}H_n \quad \text{on } z=0, \quad (3.10a)$$

ここで、

$$H_1 = \Phi_{1t}, \quad (3.10b)$$

$$H_2 = \Phi_{2t} + \zeta_1\Phi_{1zt} + \Phi_{1t_1} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2, \quad (3.10c)$$

$$H_3 = \Phi_{3t} + \zeta_1\Phi_{2zt} + \zeta_2\Phi_{1zt} + \Phi_{1x}\Phi_{2x} + \Phi_{1y}\Phi_{2y} \\ + \Phi_{1z}\Phi_{2z} + \Phi_{1x}\Phi_{1x_1} + \Phi_{1y}\Phi_{1y_1} + \frac{1}{2}\zeta_1^2\Phi_{1zzt} \\ + \frac{1}{2}\zeta_1(\Phi_{1x}^2 + \Phi_{1y}^2 + \Phi_{1z}^2)_z + \Phi_{2t_1} + \zeta_1\Phi_{1zt_1}, \quad (3.10d)$$

●水底の条件：

$$\Phi_{nz} = 0 \quad z=-h \quad (3.11)$$

●円柱表面の条件：

$$\Phi_{nr} = S_n \quad r=a \quad (3.12a)$$

ここで、

$$S_1 = 0 \quad (3.12b)$$

$$S_2 = -\Phi_{1r_1} \quad (3.12c)$$

$$S_3 = -\Phi_{2r_1} \quad (3.12d)$$

ただし、

$$r_1 = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}, \quad r_1 = \varepsilon r.$$

前述のポテンシャル、水面変位及び非齊次項を、

$$\{\Phi_n, \zeta_n, F_n, G_n\} = \sum_{m=-n}^n e^{-im\omega t} \{\Phi_{nm}, \zeta_{nm}, F_{nm}, G_{nm}\} \quad (3.13)$$

のように定義すると、 $\Phi_{nm}^* = \Phi_{n,-m}$ で Φ_{nm} の複素共役を示し、 Φ_{n0}, ζ_{n0} は時間に関して緩やかに変化する波動場を示すことに注意する必要がある。

4 長周期波ポテンシャルの解

式 (3.7)～(3.13) から、長周期ポテンシャル Φ_{10} の境界値問題は、short-scale すなわち一般の座標系 (x, y, z) で考えると、

$$\Phi_{10zx} + \Phi_{10yy} + \Phi_{10zz} = 0 \quad (-h < z < 0), \quad (4.1a)$$

$$\Phi_{10z} = 0 \quad (z=0 \text{ and } -h), \quad (4.1b)$$

$$\Phi_{10r} = 0 \quad (r=a) \quad (4.1c)$$

のよう表示できる。しかし、(4.1a)～(4.1c) 式を満足する解は、1次のオーダーの周波数や速度を含まないため本論の解として不適当である。すなわち、長周期ポテンシャルは、一般の座標系 (x, y, z) に独立であり、独立変数として slow 座標 (x_1, y_1, t_1) のみを持つことが分かり、 $\Phi_{10} = \Phi_{10}(x_1, y_1, t_1)$ のように定義できる。

Φ_{10} に関する支配方程式は、式 (3.8a)～(3.9d) 及び Φ_{30} に関する solvability 条件 (文献 10) 参照) :

$$G_{30} = ghF_{30} \quad (4.2)$$

から得ることができる。

式 (4.2) を用いると、長周期ポテンシャル Φ_{10} の支配方程式は、

$$\Phi_{10t_1t_1} - gh(\Phi_{10x_1x_1} + \Phi_{10y_1y_1}) = \tilde{G}_{30} \quad (4.3)$$

となり、ここで、 \tilde{G}_{30} は short scale の時間変数 t を含まない項で構成されており以下のように定義できる。

$$\tilde{G}_{30} = -\left[g(\zeta_{11}^*\Phi_{11x} + *)_{x_1} \right. \\ \left. - \left\{ |\nabla\Phi_{11}|^2 - \frac{\omega^2}{g}(\Phi_{11}\Phi_{11z}^* + *) \right\}_{t_1} \right] \quad (z=0) \quad (4.4)$$

ただし、*印は、複素共役を意味する。

さて、ここで1次のオーダーのポテンシャル Φ_{11} について少し考察してみよう。ポテンシャル Φ_{11} はいわゆる線形散乱問題の解であり、入射波の包絡波形を $A(x_1, t_1)$ 、散乱波の包絡波形を $B(x_1, y_1, t_1)$ とする MacCamy と Fuchs¹⁰ より

$$\Phi_{11} = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \\ \times \left\{ AJ_n(kr) - B \frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)} H_n(kr) \right\} \times \cos n\theta \quad (4.5)$$

のように与えられる。ここで、 $n=0$ のとき $\epsilon_0=1$ さらに $n \geq 1$ のとき $\epsilon_n=2$ である。また、本論では、大型の円柱構造物を想定しているので、 $ka \gg 1$ であり、(4.5) 式の漸近形を求める

$$\Phi_{11} = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \\ \times \left\{ Ae^{ikz} - B \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr-(\pi/4))} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right\} \quad (4.6)$$

のようになる。ここで、

$$\beta_n = \varepsilon_n(i)^n \cos n\theta \frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)} e^{-i(\pi/2)n}.$$

円柱表面の境界条件とポテンシャル Φ_{21} に関する solvability 条件¹⁰⁾ より、入射波の包絡波形と散乱波の包絡波形は、

$$A=B \quad (r=a) \quad (4.7a)$$

$$A=A(x_1 - C_g t_1), \quad (4.7b)$$

$$B(r_1 - C_g t_1, \theta) = A(r_1 - C_g t_1 - a_1(1 - \cos \theta)) \quad (4.7c)$$

のよう定義できる。

今、(4.6) 式を (4.4) 式に代入して整理すると、 \tilde{G}_{30} は、以下の 4 つの項を含んでいる。

$$|A|^2, \frac{AB^*}{\sqrt{r}} e^{i(\cos \theta - 1)kr}, \frac{A^*B}{\sqrt{r}} e^{i(1 - \cos \theta)kr}, \frac{|B|^2}{r}. \quad (4.8)$$

(4.8) 式において Long scale の空間座標のみが独立変数となっている項は、第一項だけである。すなわち、ポテンシャル Φ_{10} に寄与する項は、入射波自身の演算から生じる項のみである。

したがって、ポテンシャル Φ_{11} に関する境界値問題は、以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} \Phi_{10x_1x_1} + \Phi_{10y_1y_1} - \frac{1}{gh} \Phi_{10t_1t_1} \\ = -\frac{k^2}{\sigma_1^2 gh} |A|^2 x_1 \left[\frac{2\omega}{k} - C_g(\sigma_1^2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\Phi_{10r_1} = 0 \quad (r_1 = a_1) \quad (4.10)$$

ここで、 $\sigma_1 = \tanh kh$

(4.9) 式から Φ_{10} に対する解は、

$$\Phi_{10} = \Phi_{10}^I(x_1 - C_g t_1) + \Phi_{10}^S(r_1, \sqrt{gh}, \theta) \quad (4.11)$$

のような形になることが予想できる。(4.11) 式の第二項は、 \sqrt{gh} の速度で伝播する散乱波を示す齊次解である。さらに、(4.9) 式は、

$$\frac{\Phi_{10t_1t_1} - gh(\Phi_{10x_1x_1} + \Phi_{10y_1y_1})}{\frac{k^2}{\sigma_1^2} \left[\frac{2\omega}{k} - C_g(\sigma_1^2 - 1) \right]} = |A(x_1 - C_g t_1)| x_1^2 \quad (4.12)$$

のよう書くことができる、ここで、

$$\Phi_{10t_1} + C_g \Phi_{10x_1} = 0 \quad (4.13)$$

なる関係を用いると、特解 Φ_{10x_1} は、

$$\begin{aligned} \Phi_{10x_1}^I &= |A(x_1 - C_g t_1)|^2 \frac{1}{C_g^2 - gh} \\ &\times \frac{k^2}{\sigma_1^2} \left[\frac{2\omega}{k} - C_g(\sigma_1^2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

のよう書くことができる。

今、入射波群の包絡波形 A を

$$A = \frac{a_0 g}{\omega} \sin k_0(x_1 - C_g t_1) \quad (4.15)$$

のよう正弦波で仮定すると、ポテンシャル Φ_{10}^I は、

$$\Phi_{10}^I = \bar{\Phi}_{10}^I(x_1) + \hat{\Phi}_{10}^I(x_1, t_1) \quad (4.16)$$

のよう書くことができる。ここで、 $\bar{\Phi}_{10}^I$ は定常項であり、 $\hat{\Phi}_{10}^I$ は変動項である。定常項は、式 (4.14)、(4.15) より

$$\bar{\Phi}_{10}^I = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0 g}{\omega} \right)^2 F(C_g) x_1 \quad (4.17)$$

となり、同様に変動項は、

$$\hat{\Phi}_{10}^I = \frac{1}{2k_0} \frac{1}{2} \left(\frac{g a_0}{\omega} \right)^2 F(C_g) \frac{i}{2} e^{2i(k_0 x_1 - \Omega t_1)} + * \quad (4.18)$$

ここで、

$$F(C_g) = \frac{1}{C_g^2 - gh} \frac{k^2}{\sigma_1^2} \left[\frac{2\omega}{k} - C_g(\sigma_1^2 - 1) \right]$$

(4.17)、(4.18) 式を (4.16) 式に代入すると長周期の入射波ポテンシャル Φ_{10}^I は、

$$\Phi_{10}^I = \frac{1}{4} \left(\frac{g a_0}{\omega} \right)^2 F(C_g) \left\{ x_1 + \left(\frac{i}{2k_0} e^{2i(k_0 x_1 - \Omega t_1)} + * \right) \right\} \quad (4.19)$$

のよう定義できる。

我々は、定常項に対して興味がないので Φ_{10}^I の変動項のみに注目して今後の議論を進める。

今、入射波と散乱波の変動成分を

$$\hat{\Phi}_{10}^I = \varphi_{10}^I e^{-2i\Omega t_1} + * \quad (4.20a)$$

$$\hat{\Phi}_{10}^S = \varphi_{10}^S e^{-2i\Omega t_1} + * \quad (4.20b)$$

のよう定義すると、式 (4.9)、(4.10)、(4.11) から散乱波ポテンシャル φ_{10}^S に関する境界値問題は、

$$\nabla_1^2 \varphi_{10}^S + 4\kappa^2 \varphi_{10}^S = 0 \quad (-h < z < 0) \quad (4.21a)$$

$$\varphi_{10r_1}^S = -\varphi_{10r_1}^I \quad (r_1 = a_1) \quad (4.21b)$$

$$\lim r_1^{1/2} \{ \varphi_{10r_1}^S - 2i\kappa \varphi_{10}^S \} = 0 \quad (r_1 \rightarrow \infty) \quad (4.21c)$$

のよう与えられる。ここで、

$$\nabla_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \quad \kappa = \Omega / \sqrt{gh}$$

入射波の速度ポテンシャル φ_{10}^I を

$$\begin{aligned} \varphi_{10}^I &= \frac{i}{2k_0} U e^{2ik_0 x_1} \\ &= \frac{i}{2k_0} U \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(i)^n \cos n\theta J_n(2k_0 r_1) \end{aligned} \quad (4.22)$$

のよう定義すると、(4.21a)、(4.21c) 式の観点から散乱波の速度ポテンシャル φ_{10}^S は、

$$\varphi_{10}^S = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varepsilon_n(i)^n H_n(2\kappa r_1) \cos n\theta \quad (4.23)$$

のよう表示できる。ここで、 $U = \frac{1}{4} \left(\frac{a_0 g}{\omega} \right)^2 F(C_g)$ で

ある。式(4.22)、(4.23)を式(4.21b)に代入すると、未定係数 B_n は、

$$B_n = -i U \frac{J_n'(2k_0 a_1)}{2\kappa H_n'(2\kappa a_1)} \quad (4.24)$$

のように決定される。式(4.24)を式(4.23)に代入すると散乱波の速度ポテンシャル φ_{10}^S は、

$$\varphi_{10}^S = -iU \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n(i)^n J_n'(2k_0 a_1)}{2\kappa H_n'(2\kappa a_1)} H_n(2\kappa r_1) \cos n\theta \quad (4.25)$$

となる。したがって、式(4.20), (4.22), (4.25)から流場の長周期ポテンシャル Φ_{10} は、

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= \hat{\Phi}_{10} + \hat{\Phi}_{10}^S = \frac{iU}{2k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \cos n\theta \\ &\times \left\{ J_n(2k_0 r_1) - A \frac{J_n'(2k_0 a_1)}{H_n'(2\kappa a_1)} H_n(2\kappa r_1) \right\} \\ &\times e^{-2i\Omega t_1} + * \end{aligned} \quad (4.26)$$

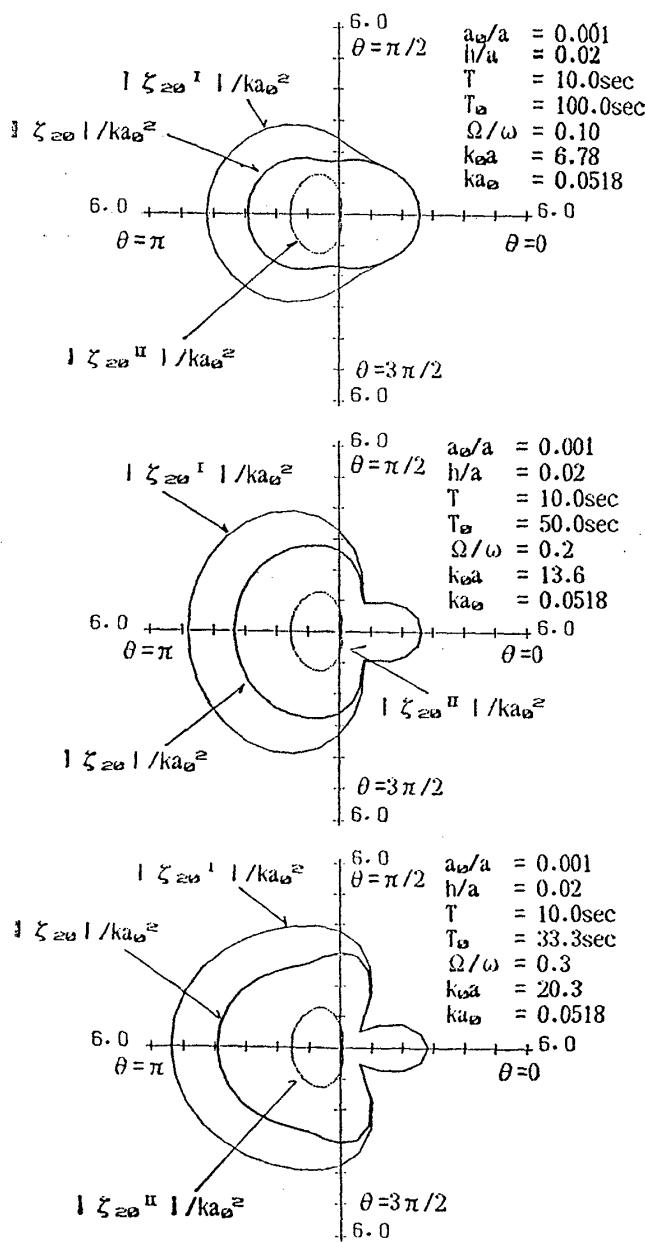


Fig. 2-1 Polar distribution for normalized run-up of the second-order long waves along a huge circular cylinder. Incident wave group is in the direction $\theta=0$

のように得ることができる。ただし、

$$A=k_0/\kappa=\sqrt{gh}/C_g, \kappa=\Omega/\sqrt{gh}$$

5 水面変位の算定式

今、 ϵ の 2 次のオーダーまで考慮すると、速度ポテンシャルと水面変位は、

$$\Phi_1 = \Phi_{10} + \Phi_{11} e^{-i\omega t} \quad (5.1a)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{20} + \Phi_{21} e^{-i\omega t} + \Phi_{22} e^{-2i\omega t} \quad (5.1b)$$

$$\zeta_1 = \zeta_{10} + \zeta_{11} e^{-i\omega t} \quad (5.1c)$$

$$\zeta_2 = \zeta_{20} + \zeta_{21} e^{-i\omega t} + \zeta_{22} e^{-2i\omega t} \quad (5.1d)$$

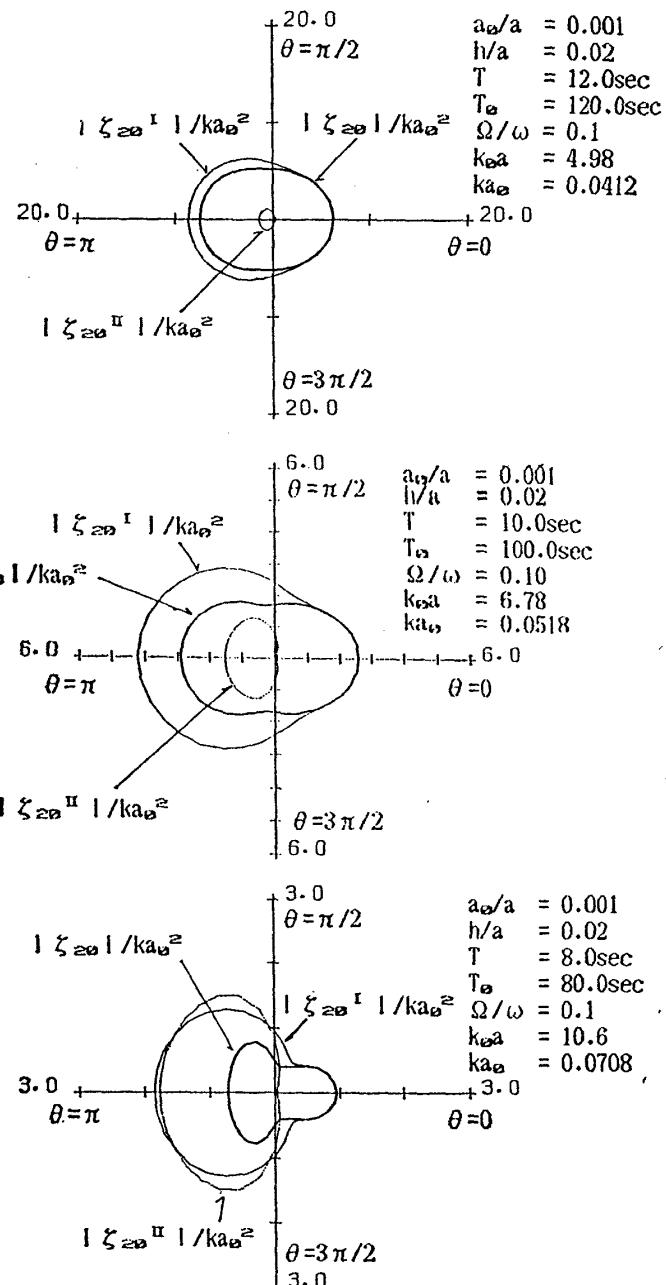


Fig. 2-2 Polar distribution for normalized run-up of the second-order long waves along a huge circular cylinder. Incident wave group is in the direction $\theta=0$

のように表示できる。(5.1) 式を (3.10) 式に代入する
と水面変位は、

$$\zeta_{10} = 0 \quad (5.2a)$$

$$\zeta_{11} = \frac{i\omega}{g} \Phi_{11} \quad (5.2b)$$

$$\zeta_{20} = -\frac{1}{g} \left(\Phi_{10t_1} - \frac{\omega^2}{g} \Phi_{11z} \Phi_{11}^* - \frac{\omega^2}{g} \Phi_{11z}^* \Phi_{11} \right. \\ \left. + |\nabla \Phi_{11}|^2 \right) \quad (5.2c)$$

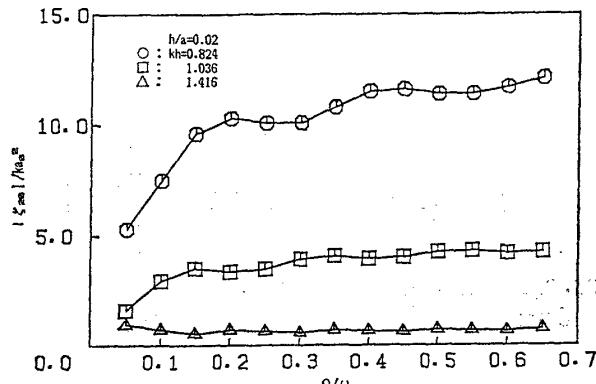


Fig. 3-1 The ratios of the wave run-up at $\theta=\pi$ and the wave amplitude of incident wave-train

$$\zeta_{21} = -\frac{1}{g} (\Phi_{11t_1} - i\omega \Phi_{21}) \quad (5.2d)$$

$$\zeta_{22} = -\frac{1}{g} \left(2i\omega \Phi_{22} + \frac{\omega^2}{g} \Phi_{11z} \Phi_{11} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_{11})^2 \right) \quad (5.2e)$$

のように与えられる。

今本論では、円柱の半径が非常に大きいと仮定してい

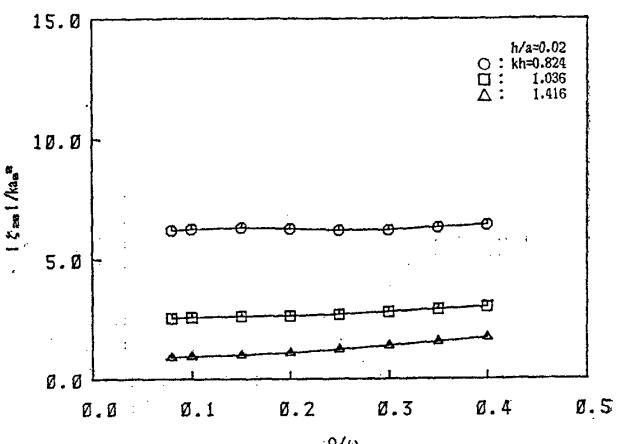


Fig. 3-2 The ratios of the wave run-up at $\theta=0$ and the wave amplitude of incident wave-train

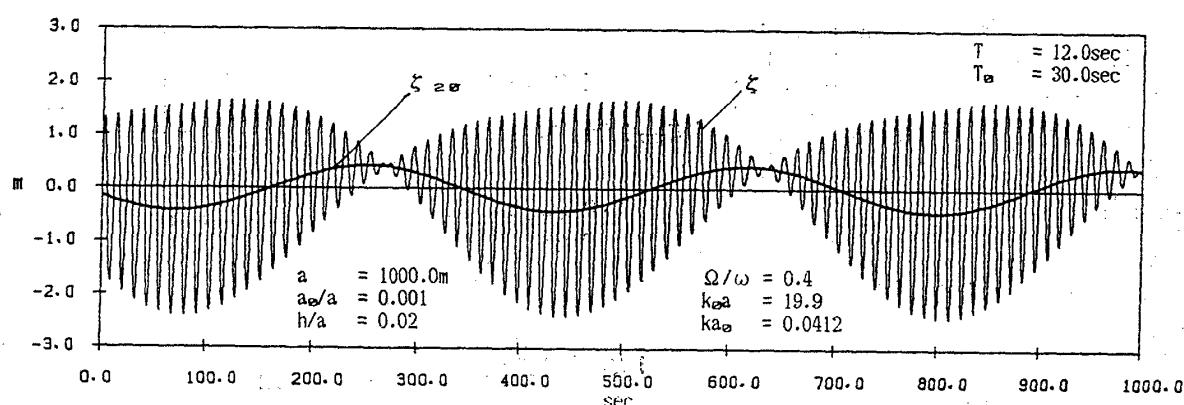


Fig. 4-1 The time series for the wave run-up of the second-order long waves in front of the circular cylinder. (at $\theta=\pi$)

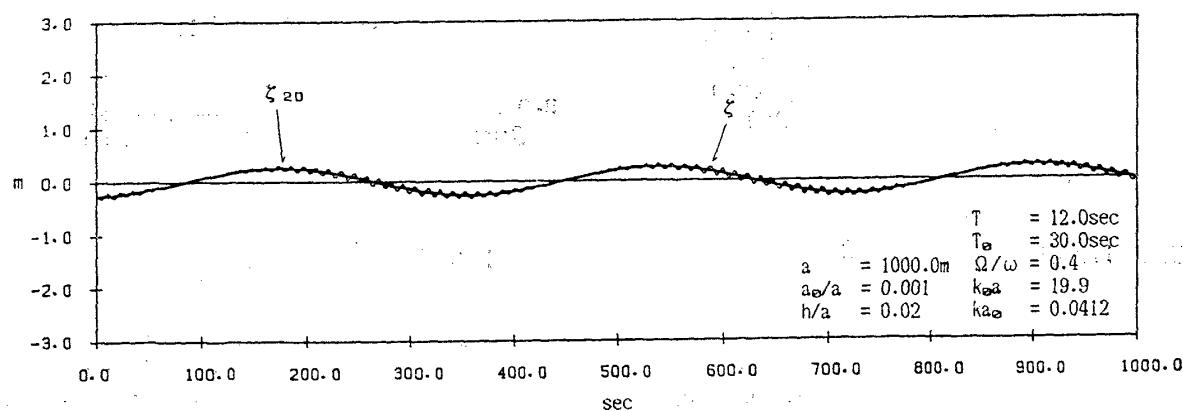


Fig. 4-2 The time series for the wave run-up of the second-order long waves behind the circular cylinder. (at $\theta=0$)

るので、短周期波は、ほとんど円柱によって反射されてしまうため重要ではない。すなわち、本論では2次の長周期波 ζ_{20} のみが重要である。

今、入射波の包絡波形を正弦波と仮定し、式(4.7)を考慮して式(4.5)及び(4.26)を式(5.2c)に代入すると、長周期波の自由表面変位は、

$$\zeta_{20} = \zeta_{20}^I + \zeta_{20}^{II} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{20}^I &= -\frac{UC_g}{g} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \cos n\theta \right. \\ &\times \left. \left\{ J_n(2k_0r_1) - A \frac{J_n'(2k_0a_1)}{H_n'(2ka_1)} H_n(2kr_1) \right\} \right. \\ &\times e^{-2i\Omega t_1} + * \quad (5.3b) \end{aligned}$$

$$\zeta_{20}^{II} = -\frac{1}{g} \left(-\frac{\omega^4}{g^2} \Phi_{11} \Phi_{11}^* + \Phi_{11r} \Phi_{11r}^* \right)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} \frac{k_0^2}{g} \left(\frac{a_0 g}{\omega} \right)^2 \left[(\sigma_1^2 |\Phi_I|^2 - |\Phi_{Ir}|^2) e^{2ik_0r_1 \cos \theta} \right. \\ &+ 2(Re[\Phi_{Ir}^* \Phi_{dr}] - \sigma_1^2 Re[\Phi_I^* \Phi_d]) \\ &\times e^{ik_0[(r_1 \cos \theta) + r_1 - a_1(1 - \cos \theta)]} \\ &\left. + (\sigma_1^2 |\Phi_d|^2 - |\Phi_{dr}|^2) e^{2ik_0[r_1 - a_1(1 - \cos \theta)]} \right] \\ &\times e^{-2i\Omega t_1} + * \quad (5.3c) \end{aligned}$$

のように与えられる。ここで、

$$U = \frac{1}{4} \left(\frac{a_0 g}{\omega} \right)^2 F(C_g), \quad \kappa = \frac{\Omega}{\sqrt{gh}}, \quad A = \frac{k_0}{\kappa} = \frac{\sqrt{gh}}{C_g}$$

$$\Phi_I = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \cos n\theta J_n(kr)$$

$$\Phi_d = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \cos n\theta \frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)} H_n(kr)$$

$$\Phi_{Ir} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \cos n\theta J_n'(kr)$$

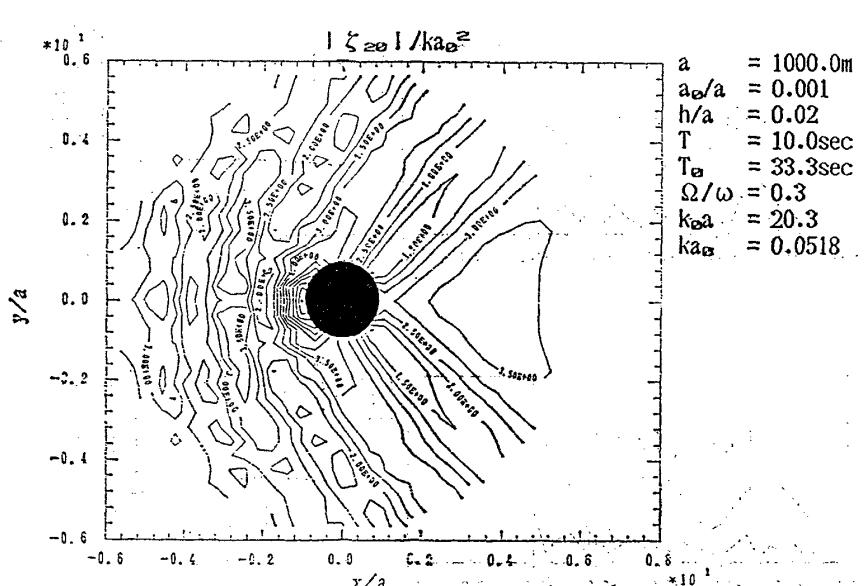
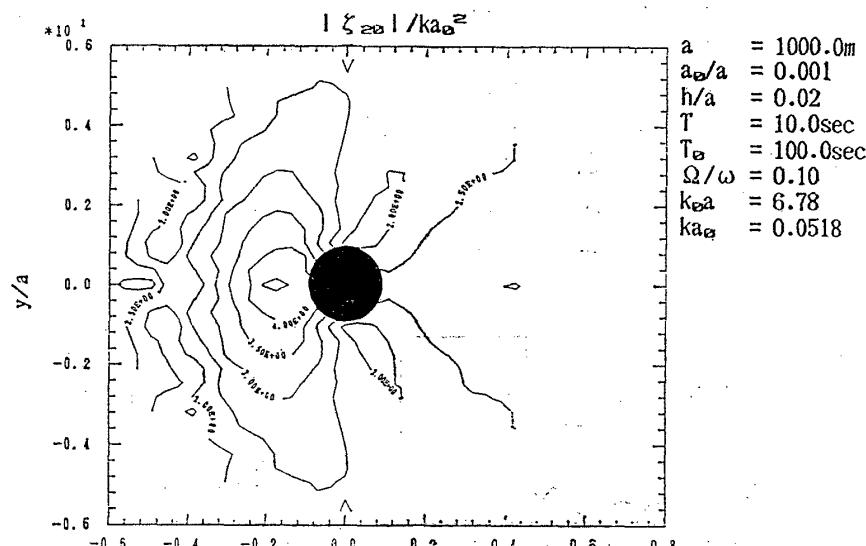


Fig. 5 Contour lines for normalized amplitudes of the second-order long waves around a huge circular cylinder

$$\Phi_{dr} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(i)^n \cos n\theta \frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)} H_n'(kr)$$

$$\sigma_1 = \tanh kh$$

6 計算結果及び考察

本論では、半径 1,000m の円柱が水深 20m の海域に設置されている場合を想定し、第 5 章の (5.3 b), (5.3 c) 式を用いて 2 次長周期波の水面変位を計算した。また、入射波の包絡波形は、(4.15) 式のような正弦波を仮定した。なお、摂動パラメーター ϵ は、Fig. 4-1, 4-2 を除き周期 10 秒、波振幅 1m、水深 20m における、波傾斜の値 $\epsilon=0.0518$ を採用した。Fig. 4-1, 4-2 では、 $ka_0=\epsilon=0.0412$ とした。

Fig. 2-1, 2-2 に 2 次長周期波による Wave run-up の分布を示す。Fig. 2-1 は、波傾斜 $ka_0=0.0518$ として包絡線の変調率 Ω/ω を 0.1, 0.2, 0.3 と変化させた場合の結果であり、変調率が大きくなるに従って分布の形状が複雑になるのが分かる。また、 ζ_{20}^I と ζ_{20}^{II} の割合は、変調率の変化に対してほぼ一定である。Fig. 2-2 は、変調率を $\Omega/\omega=0.1$ に固定し、波傾斜を $ka_0=0.0412, 0.0518, 0.0708$ と変化させた場合の結果である。 ka_0 の値が大きくなるに従い分布の性状が複雑にな

り、 ζ_{20}^{II} の割合も増加する。特に、 $ka_0=0.0708$ の場合は ζ_{20}^I と ζ_{20}^{II} の割合がほぼ等しくなるのが分かる。

Fig. 3-1, 3-2 に円柱前面（入射波側、 $\theta=\pi$ ）と背面（透過波側、 $\theta=0$ ）における wave run-up の無次元値の変調率 Ω/ω に対する変化を示す。Fig. 3-1 は、円柱前面における wave run-up の無次元値であり、 kh の値が小さくなると全体的に ζ_{20} の無次元値は大きくなる。また、 $kh=1.416$ の場合は、変調率 Ω/ω の変化に対して ζ_{20} の無次元値はほとんど変化しない。 $kh=1.036$ と $kh=0.824$ の場合は、変調率 $\Omega/\omega \leq 0.15$ の範囲で ζ_{20} の値は急激に変化し、 $\Omega/\omega > 0.15$ では ζ_{20} の変化が緩やかになる。全体的に、水深が浅くなると ζ_{20} の増加の勾配が急になる。

Fig. 3-2 は、円柱背面における結果であり、Fig. 3-1 と同様 kh の値が小さくなると ζ_{20} は全体的に大きくなる。また、変調率に対する ζ_{20} の変化はほぼ一定である。

次に、wave run-up の量を入射波振幅 a_0 を用いて評価してみよう。円柱前面における wave run-up の最大値は、本論の計算範囲内では $\Omega/\omega=0.65, kh=0.824$ の場合であり、水深 20m を考慮して、 ζ_{20} の値を計算すると $\zeta_{20} \approx 0.5 a_0^2$ となる。また、円柱背面 ($\theta=0$) では、同様の評価を行うと $\zeta_{20} \approx 0.26 a_0^2$ となる。この

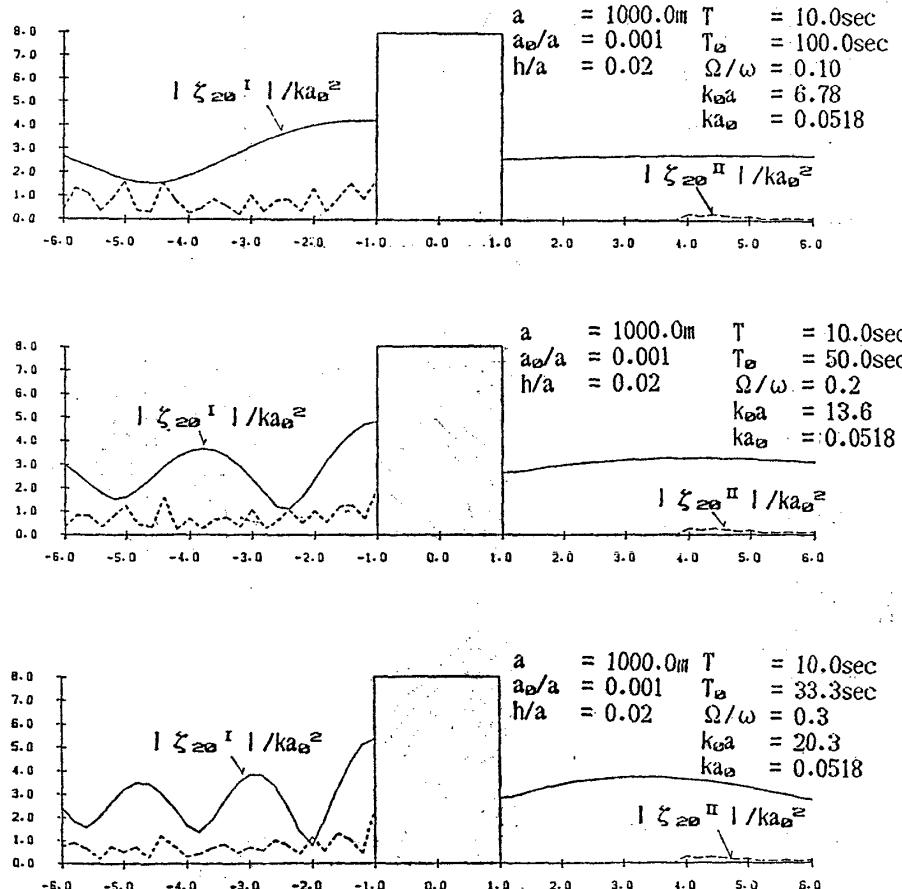


Fig. 6 Distribution on the x-axis for normalized amplitudes of the second-order long waves on a huge circular cylinder

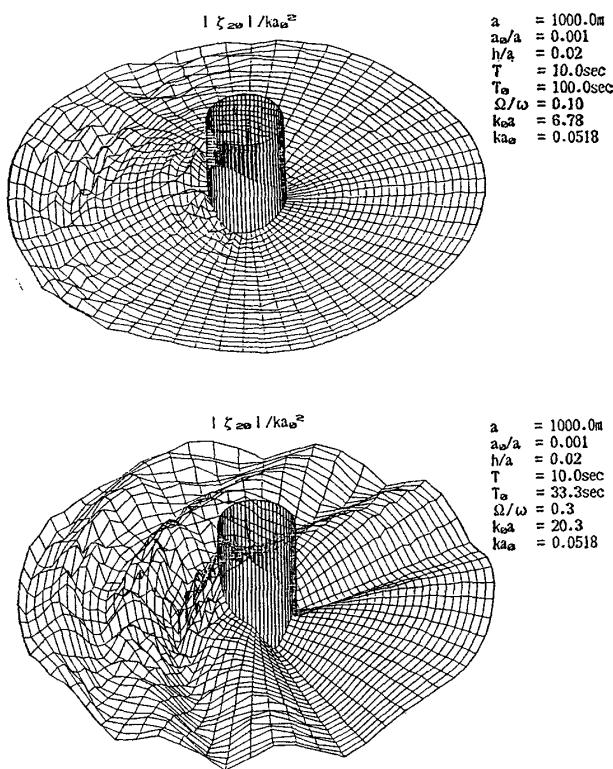


Fig. 7 A bird's-eye view for distribution of normalized amplitudes of second-order long waves around a huge circular cylinder

結果から、円柱前面では入射波振幅の2乗の50%，円柱背面では25%程度の値となることが分かる。

Fig. 4-1, 4-2に円柱前面($\theta=\pi$)と背面($\theta=0$)におけるwave run-upの時系列変化を示す。Fig. 4-2から円柱の背面では、2次長周期波の成分が支配的であることが理解できる。このことから、人工島などの設計・計画において2次長周期波の影響を十分に注意する必要がある。

Fig. 5に波振幅分布のcontourを示す。Fig. 6にx軸上での波振幅分布を示す。

さらに、Fig. 7に波振幅分布の鳥かん図を示す。これらの結果から、入射波群の周期が一定、すなわち $k\omega_0$ が一定の場合変調率が小さくなるほど円柱背後の海面は平坦になることが分かる。変調率が増加すると円柱周辺の海面は、複雑に変化する。

7 結 言

本論では、Multiple scales 摂動法により大型円柱周辺の2次長周期波の水面変位を求める算定式を導き、具体的に計算を実行しその結果から以下のような結論を得た。

- 1) 2次長周期波によるwave run-upの量は、入射

波振幅の2乗に対して円柱前面で50%程度、円柱背面で25%程度の値に達する。

2) 特に、円柱背面では、2次長周期波の成分が支配的であり、人工島などの設計・計画において2次長周期波の影響を十分に注意する必要がある。

3) 円柱周辺の2次長周期波の分布性状は、入射波の周波数 ω が一定の場合、包絡波形の変調率に依存し、変調率が大きくなると波振幅分布は複雑な性状を示す。

最後に、今回は円柱のみを対象としたが有限要素法等の適用は容易であり、今後は任意形状及び浮体への拡張を試みる所存である。また、本研究の一部は、著者らの一人が日本大学海外派遣研究員としてマサチューセッツ工科大学ペーリンズ研究所に留学した際に行われたものである。本研究の遂行に当たり理論の定式化に関して有益な御討論を頂いたマサチューセッツ工科大学 C. C. Mei 教授に心から感謝します。

参 考 文 献

- 1) Longuet-Higgins, H. S., Stewart, R. W.: Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to 'surf beat', Journal of Fluid Mechanics, Vol. 13, (1962), pp. 481-504.
- 2) Bowers, E. C.: Harbour resonance due to set-down beneath wave groups, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 79, (1977), pp. 71-92.
- 3) Mei, C. C., Benmoussa, C.: Long waves induced by short-wave groups over an uneven bottom, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 139, (1984), pp. 219-235.
- 4) 木村 晃: 非線形長周期波の2次元スペクトル, 第32回海岸工学講演論文集, (1985), pp. 154~158.
- 5) Molin, B.: On the generation of Long-Period second-order free waves due to change in the bottom profile, Papers of Ship Research Institute, No. 68, (1982), pp. 1-28.
- 6) 高木又男: 波浪による平均水面の変化—無限水深・規則波の場合—関西造船協会誌, 第200号, (1986), pp. 65~70.
- 7) Agnon, Y., Mei, C. C.: Slow-drift motion of a two-dimensional block in beam sea, Journal of Fluid Mech. Vol. 151, (1985), pp. 279-294.
- 8) Agnon, Y.: Nonlinear diffraction of Ocean gravity waves, Doctoral dissertation (MIT), (1986).
- 9) Zhou, C., Liu, P. L.-F.: Second-order low-frequency wave forces on a vertical circular cylinder, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 175, (1987), pp. 143-155.
- 10) Mei, C. C.: The applied dynamics of Ocean surface waves, John Wiley & Sons, (1983).