

(昭和 63 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

がたと摩擦を考慮した弾性リンク機構の解析

正員 鈴木 規之* 正員 都 井 裕**

Numerical Analysis of Spatial Elastic Linkage Mechanisms with Clearances and Friction

by Noriyuki Suzuki, *Member* Yutaka Toi, *Member*

Summary

In this paper numerical solution method for spatial elastic linkage mechanism with clearances and friction is presented. Deformation of each linkage member is considered to be infinitesimal, and therefore each member is analyzed by conventional finite element method. And deformation vector is separated from displacement one at each time step by using displacement function of a rigid body. Contact, friction, and viscous force vectors are calculated in the same way as Rigid Bodies-Spring Model. Finally the present method is applied to a slider-and-crank mechanism and obtained results are compared with the experimental ones.

1 序

最近のメカトロニクス技術の急速な進歩に従い、複雑な機構を持った産業用ロボット、高速、高精度で動作する情報機器の開発が進められ、これに応じて機構解析に関する研究がますます盛んになっている。中でも、振動防止、動的強度の検討など機構のダイナミクスに関わる問題が、機構の高速高精度化に伴って最近重要になってきている。

一方こうした動力伝達機構には一般にがたと摩擦が不可避の重要な問題として残されており、例えばリンク機構一つ取り上げても、円滑な動作を行うためには対偶におけるすきまが不可欠であるが、そのために位置決めの精度が低下したり、さらに高速で動作させるための軽量化をはかることにより、系の剛性が低下して弾性変形による誤差、振動の発生の原因になるなどの問題も存在する。また摩擦現象は非常に複雑な現象であるため、定量的な予測を行うことは困難であり、こうした問題が機構のダイナミクスまで含めた精密な制御を困難なものにしている。

がたと摩擦を考慮した研究も最近では少なくないが、確率論的に機構出力を評価したり、あるいは平面剛体リンクを扱ったものが大半であり、さらに弾性変形とがた、摩擦の相互影響まで含めた研究については、特定の機構に限って解析的に扱ったもので、一般性のないもの

がこれまでは多かった。

こうした問題に対する解析手法の一般化に関する研究として、近年いくつかの試みがなされている。例えば、Dubowsky らの平面リンク機構の解析^{1)~3)}、また我が国では、堀江、舟橋らの、一連の理論的および実験的研究^{5),6)}があるが、いずれも平面機構あるいはオフセットを有する平面機構の解析であり、3次元問題に対する拡張に関しては一般性に欠ける一面がある。そのため、摩擦の影響を含めた、複雑な3次元機構の解析までを統一的行える、より汎用性の高い手法の開発が必要とされている。

ここでは、がたと摩擦のあるリンク機構について、従来の有限要素法および剛体-ばねモデルの考え方に基いた一般化解析手法を提案する。

通常3次元機構の解析までを統一的行うためには、大変位、大回転に対する考慮が問題となるが、ここでは近似剛体変位関数を用いて、剛体変位成分と変形成分を分離する手法を示す。

リンク機構においては一般に剛体変位は非常に大きくなるのに対して、個々の節の変形自体は微小と考えられるので、節の変形に対しては通常の有限要素法を用いた定式化を行う。

また対偶においては軸、軸受の各中心に節点自由度を設定して、接触、非接触を剛体変位場を仮定して判定する。さらに接触時には相対変位に抵抗するバネを接触点間に発生させて力の伝達を行うものとする。

最後に数値計算例として、がたのあるスライダリンク機構の解析を行い、剛体リンクを用いた実験結果と比

* 新日本製鉄(株)

(研究当時 東京大学大学院)

** 東京大学生産技術研究所

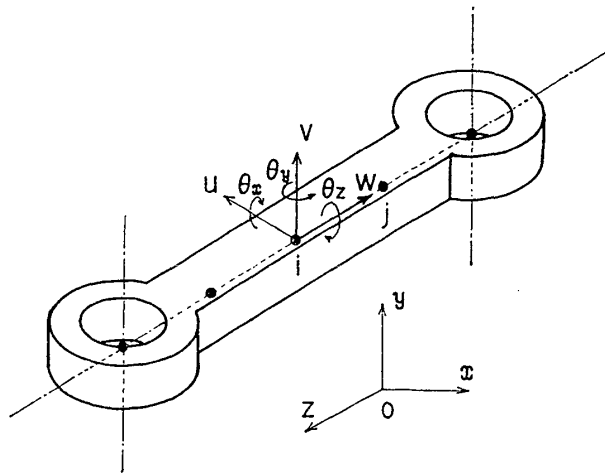


Fig. 1 Definition sketch of link element

較することにより、本手法の有効性を示す。

2 定 式 化

2.1 はり要素を用いたリンクの表現

各リンクについては Fig. 1 に示すように通常の有限要素法に基づいた一般化はり要素として定式化する。

変位、速度等はすべて全体座標系を用いて表わし、さらに時間積分の都合上、全変位形式で表わすこととする。

局所座標系の定義、軸方向変形、曲げ変形およびねじり変形に対応する要素剛性マトリックス、さらに要素質量マトリックス、要素減衰マトリックスの各マトリックスについては、通常の有限要素法の手順と同様であるのでここでは説明を省略する⁸⁾。

なお質量マトリックスについては時間積分に中心差分法を用いるので、集中質量のみを扱うものとする。

2.2 剛体変位成分の分離

一般にリンクの挙動は、剛体変位成分が非常に大きくなるので、内力を計算する際に剛体変位成分と変形成分を分けて考えないと誤差が非常に大きくなる。ここでは、全体座標系で表わされた全変位を近似剛体変位関数を用いて、剛体変位成分と変形成分に分離する手法について述べる。

2.2.1 3次元問題における近似剛体変位関数

ここでは回転の2次項まで考慮したつぎの近似的な3次元剛体変位関数を用いる⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u - \theta_z y + \theta_y z \\ &\quad - (\theta_y^2 + \theta_z^2) \frac{x}{2} + \theta_x \theta_y \frac{y}{2} + \theta_x \theta_z \frac{z}{2} \\ V(x, y, z) &= v - \theta_x z + \theta_z x \\ &\quad + \theta_x \theta_y \frac{x}{2} - (\theta_z^2 + \theta_x^2) \frac{y}{2} + \theta_y \theta_z \frac{z}{2} \\ W(x, y, z) &= w - \theta_y x + \theta_x y \\ &\quad + \theta_z \theta_x \frac{x}{2} + \theta_y \theta_z \frac{z}{2} - (\theta_x^2 + \theta_y^2) \frac{z}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2.2.2 剛体変位成分の計算

Fig. 2 に示すように全体座標系を用いて表わされた、時間ステップ i における O および P 点の全変位ベクトルを $(u_0)_i$ および $(u_p)_i$ またリンク固定座標系の原点 O を基準にして、全体座標系表示された任意点 P の位置ベクトルを $(r_p)_i$ とする。ここに、

$$\left. \begin{aligned} (u_0)_i^t &= [(u_0)_i (v_0)_i (w_0)_i (\theta_{x0})_i (\theta_{y0})_i (\theta_{z0})_i] \\ (u_p)_i^t &= [(u_p)_i (v_p)_i (w_p)_i (\theta_{xp})_i (\theta_{yp})_i (\theta_{zp})_i] \\ (r_p)_i^t &= [(x_p)_i (y_p)_i (z_p)_i] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

また第 n ステップの基準点 O における変位増分 $(\Delta u_0)_n$ は、つぎのように計算される。

$$(\Delta u_0)_n = (u_0)_{n+1} - (u_0)_n \quad (3)$$

ここに、

$$\begin{aligned} (\Delta u_0)_i^t &= [(\Delta u_0)_i (\Delta v_0)_i (\Delta w_0)_i \\ &\quad (\Delta \theta_{x0})_i (\Delta \theta_{y0})_i (\Delta \theta_{z0})_i] \end{aligned} \quad (4)$$

時間増分値が十分小さければ、変位増分は微小と考えられるので、各ステップにおいて、基準点の変位増分および任意点のそのステップにおける位置ベクトルから、先に示した近似剛体変位関数を用いて任意点における剛体変位増分を計算することにする。

すなわち (2), (4) 式の各成分を (1) 式に代入すれば、任意点 P における第 n ステップの剛体変位増分ベクトル $(\Delta u_p^r)_n$ はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} (\Delta u_p^r)_n &= \begin{Bmatrix} \Delta u_p^r \\ \Delta v_p^r \\ \Delta w_p^r \\ \Delta \theta_{xp}^r \\ \Delta \theta_{yp}^r \\ \Delta \theta_{zp}^r \end{Bmatrix}_n \\ &= \begin{Bmatrix} \Delta u_0 - \Delta \theta_{z0} y_p + \Delta \theta_{y0} z_p - (\Delta \theta_{y0}^2 + \Delta \theta_{z0}^2) \\ \quad \times \frac{x_p}{2} + \Delta \theta_{x0} \Delta \theta_{y0} \frac{y_p}{2} + \Delta \theta_{x0} \Delta \theta_{z0} \frac{z_p}{2} \\ \Delta v_0 - \Delta \theta_{x0} z_p + \Delta \theta_{z0} x_p + \Delta \theta_{x0} \Delta \theta_{y0} \frac{x_p}{2} \\ \quad - (\Delta \theta_{z0}^2 + \Delta \theta_{x0}^2) \frac{y_p}{2} + \Delta \theta_{y0} \Delta \theta_{z0} \frac{z_p}{2} \\ \Delta w_0 - \Delta \theta_{y0} x_p + \Delta \theta_{x0} y_p + \Delta \theta_{z0} \Delta \theta_{x0} \frac{x_p}{2} \\ \quad + \Delta \theta_{y0} \Delta \theta_{z0} \frac{y_p}{2} - (\Delta \theta_{x0}^2 + \Delta \theta_{y0}^2) \frac{z_p}{2} \\ \Delta \theta_{x0} \\ \Delta \theta_{y0} \\ \Delta \theta_{z0} \end{Bmatrix}_n \end{aligned} \quad (5)$$

したがって、任意点 P における第 $(n+1)$ ステップの剛体変位ベクトル $(u_p^r)_{n+1}$ および位置ベクトル $(r_p)_{n+1}$ はつぎのように表わされる。

$$(u_p^r)_{n+1} = (u_p^r)_n + (\Delta u_p^r)_n \quad (6)$$

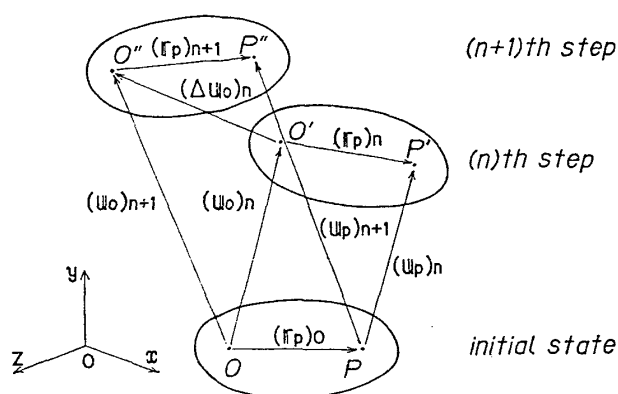


Fig. 2 Definition sketch of large displacement field

および,

$$(\mathbf{r}_p)_{n+1} = (\mathbf{r}_p)_n + (\Delta \mathbf{u}_p^r)_n \quad (7)$$

(6)式を用いれば、任意点 P における第 $(n+1)$ ステップの変形ベクトル $(\mathbf{u}_p^*)_{n+1}$ は,

$$(\mathbf{u}_p^*)_{n+1} = (\mathbf{u}_p)_{n+1} - (\mathbf{u}_p^r)_{n+1} \quad (8)$$

となり、剛体変位成分と変形成分が分離できることになる。

なお2次元問題を例にとり本手法により離散化誤差の検討を Appendix に示す。

2.3 対偶におけるがたと摩擦の表現

2.3.1 接触の判定

Fig. 3 に示すように、はり要素を用いて有限要素分割されたリンクの両端の節点は軸あるいは軸受の中心に設定し、これを対偶節点と呼ぶことにする。全体座標系 (O - XYZ 座標系) における対偶節点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ また軸、および軸受の半径をそれぞれ r_1 , r_2 とする。ここで添え字 1 および 2 は、それぞれ軸、および軸受に対応するとすれば、次のように、接触/非接触の判定を行う。

$$\begin{aligned} \delta_n &= |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| - (r_2 + r_1) \\ \delta_n &\geq 0 \cdots \cdots \text{contact} \\ \delta_n &< 0 \cdots \cdots \text{uncontact} \end{aligned} \quad (9)$$

2.3.2 接触力の評価

軸と軸受の弾性変形に対応するバネを接触点間に挿入

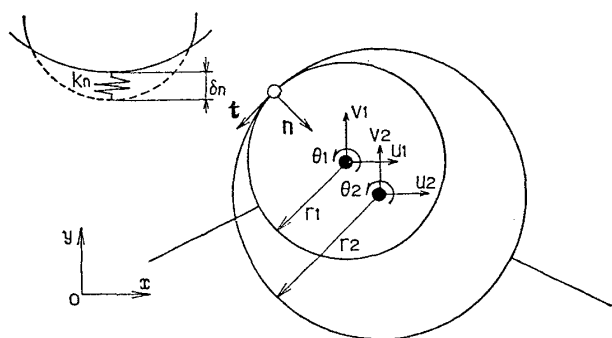


Fig. 3 Definition sketch of pairing elements with clearance

するという簡易的手法をここでは用いる。

はじめに、接触力および摩擦力の算定を行うために接触点における法線ベクトルおよび接線ベクトル ($\mathbf{n}$, $\mathbf{t}_a$, $\mathbf{t}_b$) をつぎのように定義する。

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (10)$$

平面軸受の場合は,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_a &= \begin{Bmatrix} t_{ax} \\ t_{ay} \\ t_{az} \end{Bmatrix} = \mathbf{y}_{\text{link}} \\ \mathbf{t}_b &= \begin{Bmatrix} t_{bx} \\ t_{by} \\ t_{bz} \end{Bmatrix} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_a \end{aligned} \quad (11)$$

ここに $\mathbf{y}_{\text{link}}$ は軸受の中軸方向単位ベクトルである。また球面軸受の場合 $\mathbf{t}_a$, $\mathbf{t}_b$ は一意には決定されないが、例えば,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_a &= \begin{Bmatrix} n_y \\ \sqrt{1-n_z^2} \\ -n_x \\ \sqrt{1-n_z^2} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{t}_b &= \mathbf{n} \times \mathbf{t}_a \end{aligned} \quad (12)$$

と定義する。

接触力 P_{contact} は k_n を接触点間に挿入するバネのバネ定数として、つぎのように表わす。

$$P_{\text{contact}} = k_n \delta_n \quad (13)$$

ここでバネ定数 k_n は、実験的に推定するか、または弾性論による解析解が陽に与えられていれば、接触力を相対変位の関数として直接計算してもよい。

いま接触および摩擦に関わる力をすべて運動方程式の外力項として全体座標系表示することにすれば、まず要素の接触力ベクトル $\mathbf{f}_{\text{contact}}^e$ は上で定義した局所座標系を用いてつぎのように表わされることになる。

$$\mathbf{f}_{\text{contact}}^e = P_{\text{contact}} \times \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -n_x \\ -n_y \\ -n_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ただし前半および後半の6成分はそれぞれ軸および軸受側の節点自由度に対応する。

2.3.3 すべり速度の評価

接触点におけるすべり速度は、対偶節点1および2における全体座標系表示された速度ベクトル

$$\dot{\mathbf{u}}_i^t = [\dot{u}_i \dot{v}_i \dot{w}_i \dot{\theta}_{xi} \dot{\theta}_{yi} \dot{\theta}_{zi}] \quad (i=1, 2) \quad (15)$$

を用いて、つぎの剛体変位関数に基づいて計算する。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u - \theta_z y + \theta_y z \\ V(x, y, z) &= v - \theta_x z + \theta_z x \\ W(x, y, z) &= w - \theta_y x + \theta_x y \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

すなわち、対偶節点1および2を原点とした局所座標系(全体座標系に一致)に対する接触点の座標はそれぞれつぎのように表わされるから、

$$(x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}) = (-r_i n_x, -r_i n_y, -r_i n_z) \quad (i=1, 2) \quad (17)$$

結局、接触点における $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}_a$ および $\mathbf{t}_b$ 方向の相対すべり速度 $\dot{\delta}_n$, $\dot{\delta}_{t_a}$ および $\dot{\delta}_{t_b}$ はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\delta}_n &= (\mathbf{R}_2 \dot{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{n} \\ \dot{\delta}_{t_a} &= (\mathbf{R}_2 \dot{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{t}_a \\ \dot{\delta}_{t_b} &= (\mathbf{R}_2 \dot{\mathbf{u}}_2 - \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{u}}_1) \cdot \mathbf{t}_b \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに、 $\mathbf{R}_i$ は剛体変位マトリックスで、具体的にはつぎのようである。

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{pi} & -y_{pi} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{pi} & 0 & x_{pi} \\ 0 & 0 & 1 & y_{pi} & -x_{pi} & 0 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2) \quad (19)$$

2.3.4 摩擦力の評価

先に示した相対すべり速度を用いれば、全体座標系における要素の摩擦力ベクトル $\mathbf{f}_{\text{slip}}^e$ は、 $\mathbf{t}_a$ および $\mathbf{t}_b$ 方向に対する寄与分を含めてつぎのように表わされる。

$$\mathbf{f}_{\text{slip}}^e = \text{sgn}(\dot{\delta}_{t_a}) \mu P_{\text{contact}} \times \left\{ \begin{array}{c} t_{ax} \\ t_{ay} \\ t_{az} \\ t_{az} y_{p1} - t_{ay} z_{p1} \\ t_{ax} z_{p1} - t_{ax} x_{p1} \\ t_{ay} x_{p1} - t_{az} y_{p1} \\ -t_{ax} \\ -t_{ay} \\ -t_{az} \\ -t_{az} y_{p2} + t_{ay} z_{p2} \\ -t_{ax} z_{p2} + t_{ax} x_{p2} \\ -t_{ay} x_{p2} + t_{az} y_{p2} \end{array} \right\} + \text{sgn}(\dot{\delta}_{t_b}) \mu P_{\text{contact}} \times \left\{ \begin{array}{c} t_{bx} \\ t_{by} \\ t_{bz} \\ t_{bz} y_{p2} - t_{by} z_{p2} \\ t_{bx} z_{p2} - t_{bx} x_{p2} \\ t_{by} x_{p2} - t_{bz} y_{p2} \\ -t_{bx} \\ -t_{by} \\ -t_{bz} \\ -t_{bz} y_{p2} + t_{by} z_{p2} \\ -t_{bx} z_{p2} + t_{bx} x_{p2} \\ -t_{by} x_{p2} + t_{bz} y_{p2} \end{array} \right\} \quad (20)$$

ここに、 μ は乾性摩擦係数である。

さらに、対偶における潤滑油による粘性力を考慮する場合には、ここでは簡単に対偶素の相対速度に比例する力のみを考える。したがって μ_n, μ_t を比例定数として、粘性力ベクトル $\mathbf{f}_{\text{viscous}}^e$ は、

$$(14) \text{ 式の, } P_{\text{contact}} \longrightarrow \mu_n \dot{\delta}_n$$

$$(20) \text{ 式の, } \left\{ \begin{array}{l} \text{sgn}(\dot{\delta}_{t_a}) \mu P_{\text{contact}} \longrightarrow \mu_t \dot{\delta}_{t_a} \\ \text{sgn}(\dot{\delta}_{t_b}) \mu P_{\text{contact}} \longrightarrow \mu_t \dot{\delta}_{t_b} \end{array} \right.$$

と書き換えたものを足し合わせればよい。

したがって、接触力、摩擦力および粘性力による要素の外力ベクトル $\mathbf{f}_{\text{csv}}^e$ は以上得られた各式を用いてつぎのように表わされる。

接触時

$$\mathbf{f}_{\text{csv}}^e = \mathbf{f}_{\text{contact}}^e + \mathbf{f}_{\text{slip}}^e + \mathbf{f}_{\text{viscous}}^e \quad (21)$$

非接触時

$$\mathbf{f}_{\text{csv}}^e = \mathbf{f}_{\text{viscous}}^e \quad (22)$$

2.4 運動方程式の時間積分と計算の手順

ここでは運動方程式の時間積分に速度項のみ後退差分を用いた中心差分法を用いる。すなわち第 $(n+1)$ ステップ変位ベクトルは第 (n) および $(n-1)$ ステップの変位ベクトルを用いて、次のように計算される。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_n^{\text{ext}} + \mathbf{f}_n^{\text{csv}} - \mathbf{f}_n^{\text{int}}) + 2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1} \quad (23)$$

ここに、

$$\mathbf{f}_n^{\text{int}} = \mathbf{K} \mathbf{u}_n^* + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_n \quad (24)$$

ここに $\mathbf{M}, \mathbf{C}$ および $\mathbf{K}$ はそれぞれ全体質量マトリックス、減衰マトリックス、および剛性マトリックス、 $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}$ および $\mathbf{u}$ はそれぞれ全体座標系に対する加速度ベクトル、速度ベクトル、および剛体変位も含めた全変位ベクトルであり、特に第 (n) ステップの速度ベクトルは次のように表わす。

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-2}}{2\Delta t} \quad (25)$$

また $\mathbf{u}^*$ は剛体成分を除いた変形ベクトル、 $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ および $\mathbf{f}^{\text{csv}}$ は通常の外力ベクトルおよび対偶節点に対する接触力、摩擦力および粘性力による外力ベクトルである。

最後に以上の関係式を用いた計算手順の概略を模式的に Table 1 に示す。

3 スライダクランク機構の解析

ここでは、がたと摩擦のあるリンク機構の解析例として、Fig. 4 に示すようなスライダクランク機構を取り上げる。

3.1 問題設定

Fig. 4 に示すように (link 1) が原動節として等速回転する平面スライダクランク機構を考える。(link 1)

Table 1 Conceptual program for present analysis

```

/* がたと摩擦のあるリンク機構の解析 */
{
  データの読み込み;
  各種前処理 (マップ作成など);
  全体質量マトリックスの作成;
  局所座標による要素剛性マトリックスの作成;
  初期条件の設定;
  各時間ステップ毎に
  {
    各リンク毎に
    {
      リンク固定座標系の定義;
      各要素毎に
      {
        全体座標による要素剛性マトリックスの作成;
        全体座標による要素減衰マトリックスの作成;
        剛体変位成分の計算;
        変形成分の分離;
        内力ベクトルの計算;
      }
    }
  }

  各対偶毎に
  {
    接触/非接触の判定;
    局所座標系の定義;
    相対すべり速度の計算;
    もし接触状態であれば
    {
      接触力ベクトルの計算;
      摩擦力ベクトルの計算;
    }
    粘性力ベクトルの計算;
  }

  変位ベクトルの計算と更新;
  計算結果の出力;
}

```

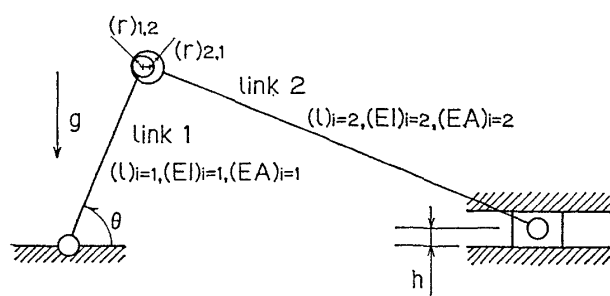


Fig. 4 Slider-and-Crank mechanism with bearing clearance

および (link 2) はいずれも弾性節で, (link 1) と (link 2) をつなぐ対偶にはすきまがあり, 接触時には摩擦力が作用する。ただしその他の対偶にはすきまも摩擦もないが, スライダには水平運動に対して摩擦力が作用するものとする。また鉛直下向きに重力が作用している。

なおここでは, がたも摩擦力もない場合の計算も行

い, がたと摩擦の影響を調べる。また対偶における潤滑油の粘性力は考慮しない。

計算は原動節の端部節点に等速回転するような強制変位を与え, 回転数を, 100 r. p. m. から 1600 r. p. m. ままで変化させて回転数による影響を調べる。

計算に用いた各リンクの寸法および材料定数はつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned}
 (EA)_{i=1} &= (EA)_{i=2} = 1.05 \times 10^6 \text{ kgf} \\
 (EI)_{i=1} &= (EI)_{i=2} = 8.75 \times 10^6 \text{ kgf} \cdot \text{mm}^2 \\
 \rho &= 7.85 \times 10^6 / 9800 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}^4 \\
 m_{\text{slider}} &= 0.2793 / 9800 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm} \\
 (l)_{i=1} &= 45.0 \text{ mm} \\
 (l)_{i=2} &= 300.0 \text{ mm} \\
 (r)_{1,2} &= 5.0 \text{ mm} \\
 (r)_{2,1} &= 6.0 (5.0) \text{ mm} \\
 h &= 3.1 \text{ mm} \\
 \mu_{12} &= 0.15 (0.0) \\
 \mu_{\text{slider}} &= 0.17 (0.0)
 \end{aligned} \right\} (26)$$

なおここでは, (link 1) および (link 2) をそれぞれ 2, 12 要素に分割し, せん断変形を考慮しない 2 次元はり要素を用いて解析する。

したがって問題の規模は次のようになる。

要素数: 14

節点数: 17

自由度数: 51

初期条件としては原動節が反時計回りに等速回転する場合に, クランク角 $\theta=0$ の位置における遊びのない機構の解析解を用いて, 各節点自由度に初速度を与える。ただし自重による初期たわみはないものとする。

また, 計算の安定性の観点から, 時間増分値はつぎのように定めた。

$$\Delta t : 0.52 \sim 0.83 \mu\text{sec.} \quad (27)$$

ここで, 時間増分値の違いは回転速度により多少変化させたためである。

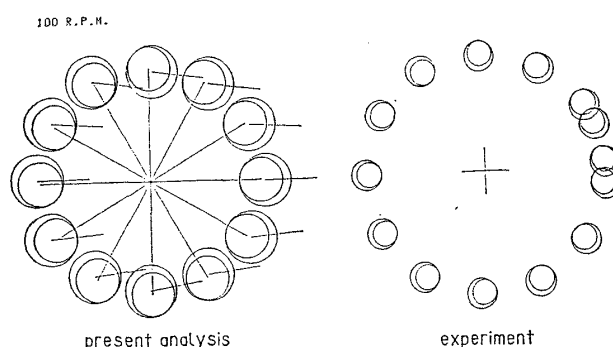


Fig. 5 Comparison of sequence of relative displacement between pairing elements with the experimental result (100 r. p. m.)

3.2 計算結果

回転数 $N=100$ (r. p. m.) の場合, 対偶における対偶素相対変位を舟橋らにより行われた実験結果⁴⁾ とともに Fig. 5 に示す。

実験結果には弾性剛性に関する情報が明らかにされておらず, ここでは各リンクの長さ, 対偶素の寸法, および摩擦係数だけを一致させている。したがって定量的な比較は意味がないので, ここでは定性的な議論にとどめ

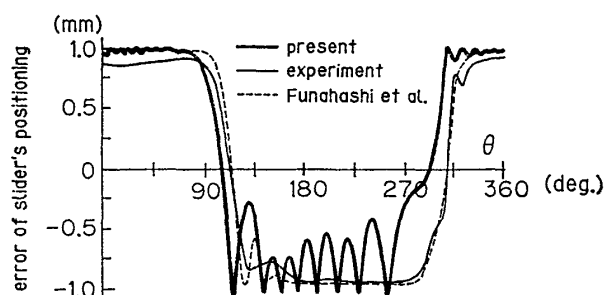


Fig. 6 Comparison of sequence of error of slider's positioning with the experimental result (100 r. p. m.)

るが, クランク角 $\theta=270\sim300^\circ$ 付近で多少の違いは見られるが概ね良好に対応していることがわかる。

つぎに, スライダの位置決め誤差のクランク角 θ に対する変化を, 実験結果および舟橋らの解析解⁴⁾ とともに, Fig. 6 に示す。

本手法による結果にはクランク角 $\theta=90\sim300^\circ$ の範囲で振動しており, 対偶素同士が接触/非接触を繰り返していることがわかる。これは, 本解析が対偶における潤滑油の粘性作用を考慮していないこと, また実験結果には弾性剛性に関する情報が与えられていないためここでは適当な値を仮定したことなどが, 原因として考えられる。しかしクランク角に対する応答としては良好な解が得られている。

つぎに回転数を変化させた場合のスライダ位置決め誤差のクランク角 θ に対する変化の様子を Fig. 7 に示す。

回転数が上昇するに従い, スライダの位置決め誤差は剛体を仮定した場合の最大値 (1.0 mm) を越えて大きく振動する様子がとらえられているが, これは先に示した対偶素同士の接触/非接触だけではなく, 更にたわみ振

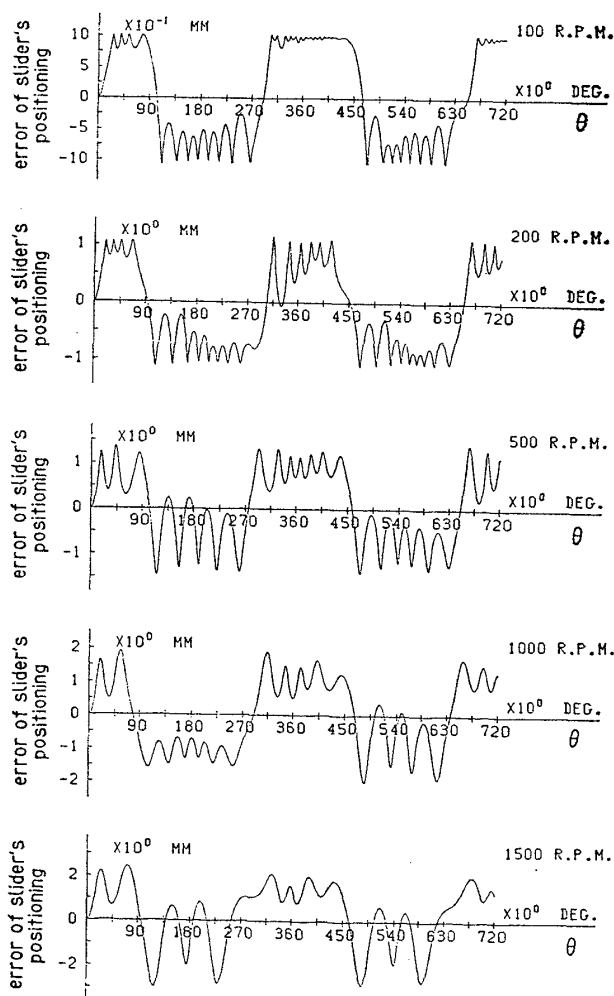


Fig. 7 Sequence of error of slider's positioning (100/200/500/1000/1500 r. p. m. from above)

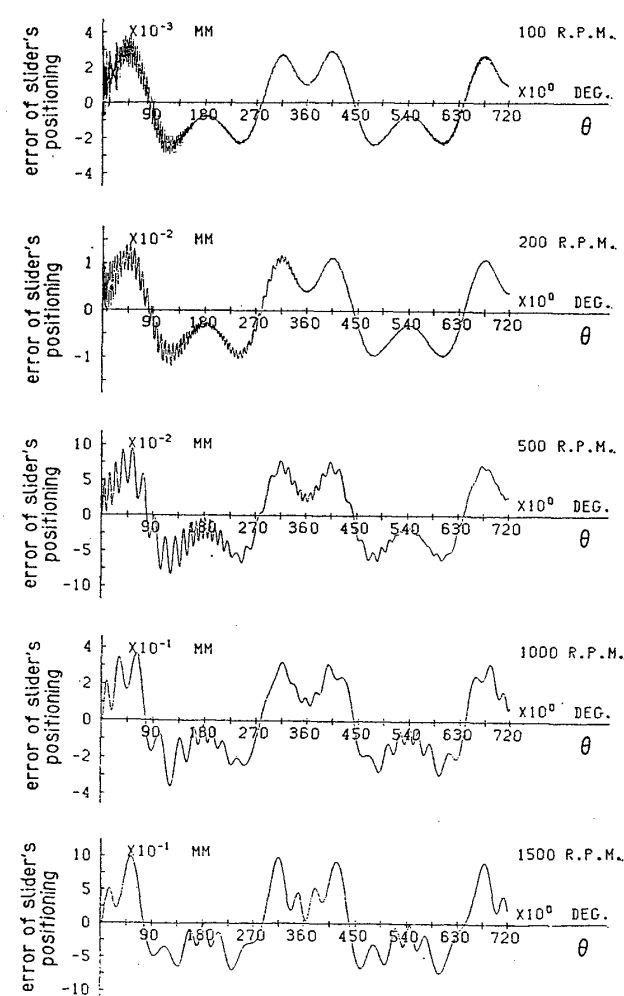


Fig. 8 Sequence of error of slider's positioning without clearance and friction

動の発生によるものと思われる。

このように高速で回転する場合には、弾性変形あるいは弾性振動の影響を考慮しなければならないと思われる。

続いて、対偶におけるがたと摩擦がない場合の計算結果を Fig. 8 に示す。

回転速度が小さい場合は、当然スライダの位置決め誤差は非常に小さいが、回転数を上げて行くと、しだいにたわみ振動の発生により誤差が大きくなっていく様子がわかる。

結局がたのない機構であっても、高速で回転するような場合には、結果的には軽量化をはかることによる弾性振動の発生が無視することのできない問題となってくる。

最後に回転数に関する parameter study を行い、スライダに生じる最大位置決め誤差および (link 2) に発生する最大横たわみが回転数の変化によりどのように変わるかをそれぞれ Fig. 9 および Fig. 10 に示す。

回転数の上昇にしたがって、位置決め誤差および横たわみは、ともに大きくなっているが、ここで特徴的なことは、周波数特性曲線に山(hump)の部分と谷(hollow)の部分の部分が周期的に現われている点であるが、文献[5]にも指摘されているように、これは機構の運動周期が弾性節の固有振動周期の整数倍であるときに現われる共振現象

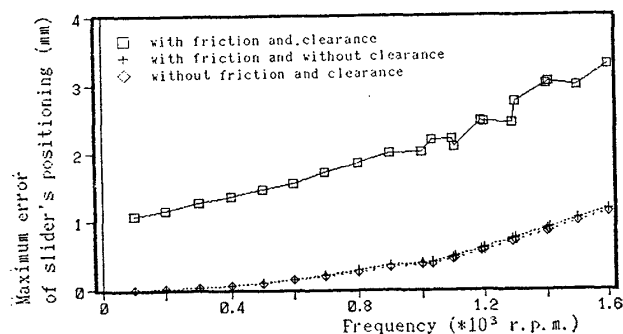


Fig. 9 Variation of maximum error of slider's positioning with revolutions per minute

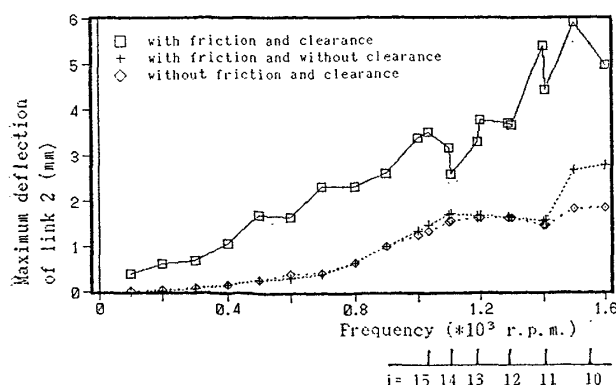


Fig. 10 Variation of maximum deflection of link 2 with revolutions per minute

象であると推定される。

なお計算時間は拘束しない自由度数 46 に対して、1 ステップあたり 0.483 msec. (HITAC M 680 H) 程度であった。

ここでは実験結果との比較により本手法の有効性を確認する目的で平面機構の解析のみを行ったが、論文中に示したように手法自体は一般の 3 次元問題に対しても、本質的に定式化の上で相違はない。したがってここでの議論はそのまま 3 次元問題にも拡張できると考えられ、実験も含めた実際の 3 次元機構の解析を行うことを今後の課題としたい。

4 結 言

本論文ではがたと摩擦のあるリンク機構について、有限要素法および剛体ばねモデルの考え方にに基づき、本質的に 3 次元問題へも適用が可能な一般化解析手法を提案し、2, 3 の数値解析例を示した。

解析法の概略および計算結果から得られた知見を以下に要約する。

- (1) 各リンクについては有限要素法の定式化に従う。また対偶においては、剛体変位関数を用いて接触/非接触およびすべりの判定を行い、接触時には軸の弾性変形に対応するバネを発生させる。
- (2) 剛体変位成分が変形成分に比較して卓越していることから、各リンクごとに近似剛体変位関数を用いて剛体変位成分の分離を行う。
- (3) がたと摩擦のある平面スライダクランク機構の解析を行い、実験結果と比較することにより、本手法の妥当性を確認した。

参 考 文 献

- 1) Dubowsky, S. and Young, S. C.: "An experimental and Analytical Study of connection Forces in High-Speed Mechanisms," Trans. ASME. Ser. B. Vol. 97 (1975), 1166.
- 2) Dubowsky, S. and Gardner, T. N.: "Dynamic Interactions of Link Elasticity and Clearance Connections," Trans. ASME. Ser. B. Vol. 97 (1975), 652.
- 3) Dubowsky, S. and Gardner, T. N.: "Design and Analysis of Multilink Flexible Mechanisms With Multiple Clearance Connections," Trans. ASME, Ser. B, Vol. 99 (1977), 88.
- 4) 舟橋, 他: 対偶に遊びのある機構の動的解析, 日本機械学会論文集 (C 編), 44 巻 379 号 (1978), 1069.
- 5) 堀江, 他: 対偶の遊びと節の弾性を考慮した機構の動的解析, 日本機械学会論文集 (C 編), 51 巻 470 号 (1985), 2554.
- 6) 堀江, 他: 対偶の遊びとオフセットを有する平面機構の動的解析, 日本機械学会論文集 (C 編), 52

巻 479 号 (1986), 2015.

- 7) 都井, 川井: 薄肉構造の離散化極限解析 (その 3), 一平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション, 日本造船学会論文集, 第 152 号 (1982), 307.
- 8) Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill (1977).

Appendix 近似剛体変位関数の幾何学的誤差の検討

ここでは, 近似剛体変位関数を用いて大変位解析を行った場合に生じる幾何学的な誤差について, 単純な 2 次元モデルを用いて検討する。

Fig. A.1 に示したような, 剛体の 2 次元はりが等速回転する問題を考える。

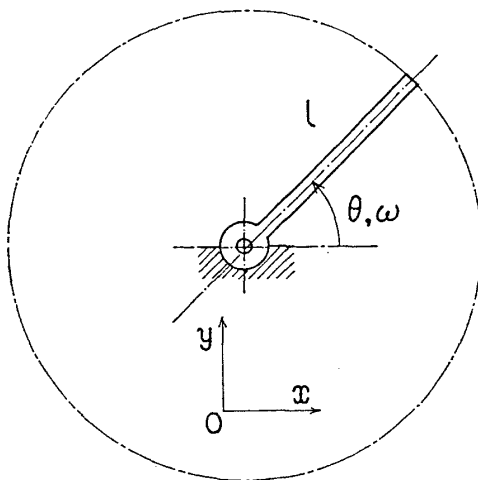


Fig. A.1 Two dimensional rotating rigid beam

本論文で示した手順に従い繰り返し計算を行い, はりの回転に対して幾何学的な誤差, ここでは, 剛体はりの全長に対する誤差の挙動を調べるものとする。すなわち, 各ステップごとに回転軸が $\Delta\theta$ (一定) だけ回転すれば, 回転軸を原点とする第 n ステップのはり先端の座標 (x_n, y_n) を用いて, はり先端の変位増分 $(\Delta u_n, \Delta v_n)$ は $\Delta\theta$ の 2 次項まで考慮すれば, 次のように計算される。

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= -\Delta\theta \cdot y_n - (\Delta\theta^2/2) \cdot x_n \\ \Delta v_n &= +\Delta\theta \cdot x_n - (\Delta\theta^2/2) \cdot y_n \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

また, 各ステップごとに計算された変位増分を用いて, 先端の座標を次のように更新する。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta u_n \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta v_n \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

初期条件を,

$$\begin{aligned} x_0 &= l \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

として, (A.1), (A.2) 式を繰り返すことにより, 各ステップにおける剛体はり先端の座標を得ることになる。

ここでは, 各ステップの座標値から計算される見かけの剛体はりの長さ,

$$l_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad (\text{A.4})$$

を正しい長さ l と比較することにより, 誤差を次のように定義する。

$$\text{error} : |1 - l_n/l| \quad (\text{A.5})$$

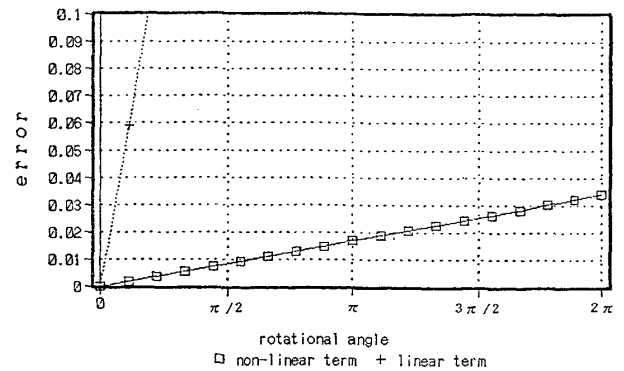


Fig. A.2 Increase of error with rotational angle in the case when incremental angle is 20 degrees.

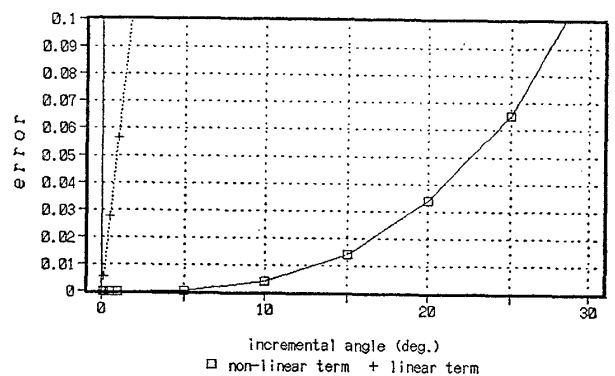


Fig. A.3 Variation of total error after one cycle with incremental angle

すなわち, 上式で計算される誤差は, 離散化誤差によって生じる見かけのひずみに相当する。

はじめに, $\Delta\theta = 20^\circ$ とした場合に, 回転角が大きくなるに従い誤差が蓄積していく様子を Fig. A.2 に示す。

(A.1) 式において $\Delta\theta$ の 2 次項まで考慮した場合には, 1 回転後も 3.5% 程度の誤差であるが, 線形項のみで計算した場合には急激に誤差が大きくなっていることがわかる。 $\Delta\theta = 20^\circ$ とかなり大きな増分を用いた場合でも, 2 次項を考慮することの効果は顕著に現われている。

次に, 回転角増分 $\Delta\theta$ の大きさによる誤差の変化を Fig. A.3 に示す。ここでは, 1 回転後の全長に対する誤差を用いている。 $\Delta\theta < 1^\circ$ では誤差はほとんど 0 に収斂しており, この程度の増分を用いれば実用上ほとんど問題はないことが図より明かである。

また $\Delta\theta = 0.1^\circ$ とした場合でも, 線形項のみで計算した場合には 0.6% の誤差 (たとえばはりを軟鋼とした場合には 126 kgf/mm^2 の応力が生じる) があり, 線形項のみで計算する場合には相当に細かい増分を用いる必要がある。

以上簡単な例題ではあるが, 近似的な剛体変位関数を用いた場合でも, 回転角増分 $\Delta\theta < 1^\circ$ 程度の値を用いれば, 十分であることがわかる。

さらに通常は, 計算の安定性の観点から時間増分値が制限され, ここで議論した範囲よりもかなり細かい増分を用いることになるのが普通であると思われ, 近似的な剛体変位関数を用いたことによる幾何学的な誤差はほぼ無視できる範囲に収まると考えられる。