# 実船データによる動揺パラメータの統計的推定
## ――連続型自己回帰モデルの応用――

正員　大津　皓平*
正員　北川　源四郎**

# Full Scale Data Depended Statistical Estimate of the Parameters in the Equation of Ship's Oscillation
## ――Application of a Continuous Auto Regressive Model――

by Kohei Ohtsu, *member*　　Genshiro Kitagawa, *member*

**Summary**

The correlogram method through a discrete auto regressive (DAR) model is powerful to estimate a damping coefficient and a natural frequency of ship's rolling and pitching motions using the sampled time series of their motions under navigation. But it is difficult to extend the method to a coupled motion, a nonlinear one of ship's oscillation, an input-output motion like maneuvering one and so on. However, nowadays, the development of stochastic identification technique of model is remarkable.

In this paper, we propose a new stochastic approach using a continuous auto regressive (CAR) model not only to gain more precise linear parameters of ship's oscillating equation representing roll and pitch under navigation but also to extend the model to the above mentioned more complicated problems in future.

The new approach begins with a transform of the equation representing a ship's oscillating motion to a CAR model which will be transformed in the last step to a state space model in accordance with the Kalman's frame work. The likelihood value is calculated by the Kalman filter using information square-root algorithm and the parameters are searched so that the likelihood value takes numerically the maximum value, using the Davidon-Fletcher-Powell optimization technique. The goodness of the model is evaluated by using AIC (Akaike's Informaton Criterion) of the model.

The data fitted in this paper are two sets of the roll's and pitch's records which were observed by a container ship under the PNW route in winter. One of them has a single peak and the other one has multiple spectral peaks due to strong rough sea.

According to the results, the CAR model proposed here fits well to the actual rolling and pitching data than the conventional method using the correlogram in the viewpoint of the AIC. The estimated natural frequncies of the ship's roll and pitch motion are fairly well but the damping coefficients by a low order's model are not stable especially in the data under rough sea conditions.

## 1. 序　　論

実船の動揺特性を予測するため，現在では実験あるいはストリップ法などにより波浪中における動揺の応答関数が求められ，波スペクトラムを与えて波浪中における動揺の短期予測が行われる。しかし，波の観測値が得られない状態で観測される運航状態での動揺データから，動揺の動特性を推定することも重要である。

*　東京商船大学商船学部航海学科
**　文部省統計数理研究所，予測制御部門

前者の流体力学的な方法による動揺解析法については動揺試験法の進歩やストリップ法等の夥しい量の理論的研究によって，求められたモデルの信頼性は日々向上してきている[2]。しかしこれ等の方法によって求めた，動揺を表現する減衰力係数，復原力係数等の特性値が，不規則に変動する実際の海面上での動揺においてどのようになるかについてはまだ良く分かっていない。

ところで，実船の運航状態で得られたデータをもとに動揺特性を把握できる可能性のある後者の方法すなわち統計的な方法の研究は，山内のコレログラムを利用する方法[1]が知られているが，これ以後の統計的確率過程論や統計的

制御理論の発展にかかわらず十分になされているとは言えない。山内の論文以後の統計的な方法の分野における大きな貢献の1つは,赤池の情報量規準 AIC の発見である[5]。この発見により,それまで主観的な検定論に頼っていたモデルの選択法に客観的な基準が与えられた。もう1つの大きな貢献は,Kalman による状態空間表現と呼ばれる確率システムの統一的な表現法の発見である[10]。この発見により,例えば後に取扱う動揺方程式を非常に計算しやすい統一的な表現に書き換えることが可能となった。

本論文の目的は,従来の船舶流体力学的なアプローチから視点を変え,実船の運航状態で得られた動揺の生データを使って,従来から船舶流体力学で使われてきた Froude の線型動揺方程式[2),3)]の係数を統計的に推定する近代確率制御理論[8)]に立脚した新しい方法を示すことである。

ところで,先に述べたこのような目的のため使われてきた山内のコレログラムによる方法[1)]では,離散的に与えられる観測値を位数2の(有色)自己回帰モデルで近似している。ただし,この自己回帰モデルはその雑音項が有色であるので,白色化[9)](Whitening)と呼ばれる方法で雑音項を白色化し,結果的に元の信号過程の位数(=2)よりも高次の本来の意味における自己回帰モデルに変換している(以後このモデルを離散型自己回帰モデル(Discrete Auto Regressive Model;略して DAR モデルと呼ぶ)。そしてこの DAR モデルに最小2乗法を適用し,回帰係数を求め,さらにこの係数からもとの位数2のモデルの信号過程における係数を抽出し,2階定差方程式の解と動揺を表現する微分方程式の解との対応から減衰係数,復原力係数を推定している。しかし,この方法では2階微分方程式の離散化されたモデルが2階定差モデルであるという仮定がなされていることに注意すべきである。この仮定は一般に正しくなく,より複雑な定差方程式となることが示されており[6),7)],この意味で山内の方法は離散領域から連続領域を見る際の近似と言える。

本論文ではこれに対して,連続領域で表現される動揺方程式から出発し,それを正確に離散化した状態空間表現モデルを構築し,このモデルのパラメータを観測値から最尤法[7),8)](Maximum likelihood method)によって同定し,統計的にみて最も確からしい動揺パラメータを推定する方法を提案する。この方法では,どの段階でもモデル作成上の近似は現われない。

本論文で取扱う動揺方程式は,減衰項 $2\varepsilon$,復原力項 $\omega^2$ とする。

$$\ddot{x}(t)+2\varepsilon\dot{x}(t)+\omega^2x(t)=u(t) \qquad (1)$$

あるいは,$\omega$ で規格化された減衰力項 $\kappa=2\varepsilon/\omega$ を使う

$$\ddot{x}(t)+\kappa\omega\dot{x}(t)+\omega^2x(t)=u(t) \qquad (2)$$

である[2),3),23)]。ここで,$x(t)$ は横揺あるいは縦揺等の動揺過程である。また $u(t)$ は波などによる強制モーメントを表現する確率的な雑音過程で,モデルを一般的にするため必らずしも白色過程とは仮定しない。第3章において,このような有色確率過程 $u(t)$ の連続領域での白色化により,(1)あるいは(2)は $x(t)$ の最高階数2より高階の微分項を含む高階連続型自己回帰モデル[4)](Continuous Auto Regressive Model;略して CAR モデルと呼ぶ)に変換されることを示す。第4章では,この CAR モデルは,Kalman による状態空間表現に変換される。この段階で,何等かの方法により確からしいパラメータの推定が出来れば,Kalman filter により,信号過程と雑音過程が分離される。

パラメータの同定には,最も精度が高いとされる最尤法を用いる。このため CAR モデルの尤度関数を与え,数値的最適化法[14),15)]により,この尤度が最も大きくなるパラメータを探索する。CAR モデルの最適次数は赤池の AIC 法[5)]で決めると同時に,求まった CAR モデルから動揺方程式のパラメータを分析する。

第6章において,この方法の応用例として PNW に就航中のコンテナ船で観測された横揺・縦揺データへのあてはめを試みる。本来ならば,船型が公表され実験的にも理論的にも明確に動揺パラメータが分かっている船を用いて,本法との比較を行うべきであるがそのような理想的なデータが手許に無い。したがって本論文においては,新しい統計的手法の導入に中心を置いて述べ,推定値の信頼性の検証については従来の定説との若干の比較を行なうに留め,将来多くのデータにこの方法を適用した段階でこの検証を試みることとする。

## 2. 離散型自己回帰モデルによる方法

序論に記したように,離散化された動揺時系列から(1)の動揺パラメータ $\varepsilon, \omega$ を推定する方法としては,山内によるコレログラムを用いる方法がある[1)]。ここでは,原理的には同じであるが,これを高速電算機向きに改良したアルゴリズムを提案する。

いま(1)をサンプリングした結果

$$x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)=u(n) \qquad (3)$$

のような次数2の離散型自己回帰過程によって表わせたとする。ここで,$x(n-i)$ は $n\Delta t$ 時刻より $i\Delta t$($\Delta t$ はサンプリング間隔,$n, i$ は正の整数)時間以前の $x$ の値である。又 $u(n)$ は,未知の外乱項の離散値である。

ところで,もし(1)の雑音過程 $u(t)$ が白色雑音のとき,(1)を離散化すると,一般には離散型自己回帰・移動平均過程(ARMA process)

$$x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)=e(n)+b_1e(n-1) \qquad (4)$$

になることが知られている[6),7)]。ここで $e(n)$ は離散型白色雑音である。このことは,たとえ $u(t)$ が白色雑音でも離散化後の $u(n)$ は,過去の自分自身の値と相関をもつ有色過程であること,よって逆に1つの自己回帰過程として表現できることを示している。そこでいま $u(n)$ は次数2の自

己回帰過程とし，

$$u(n)+b_1u(n-1)+b_2u(n-2)=v(n) \tag{5}$$

と表現できるとする。ここで $v(n)$ は白色雑音である。(4)を(5)に代入すると，結局信号過程 $x(n)$ からみると4次の自己回帰過程

$$x(n)+c_1x(n-1)+c_2x(n-2)+c_3x(n-3)+c_4x(n-4)=v(n) \tag{6}$$

となることがわかる。ここで，

$$\begin{cases} c_1=a_1+b_1, & c_3=a_2b_1+a_1b_2 \\ c_2=a_2+a_1b_1+b_2, & c_4=a_2b_2 \end{cases} \tag{7}$$

である。したがってDARモデル(6)が確定すれば(7)を解いて，$a_1$，$a_2$，$b_1$，$b_2$ を求めることが可能で，

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\ln\sqrt{a_2}/\Delta t,\ \omega=2\pi f=\cos^{-1}\left(\frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)/\Delta t,$$

$$\kappa=2\varepsilon/\omega \tag{8}$$

によって，減衰係数 $\varepsilon$ あるいは規格化された $\kappa$，及び固有角周波数が求まる[23]。(5)が任意次数でも，DARモデルが確定すれば(7)のような方程式系を解くことにより，物理モデル(1)が確定する。山内はDARモデルと等価な相関々数を用いる式から最小2乗法により $c_i$ を求めているが，この計算を高速に行なうには，いわゆるLevinson-Durbin法を用いるのが有利である。さらに次数の決定には，最小AIC法を用いるのが有効である[8),9)]。この時，(6)の対数尤度は，データ数を $N$ とし，$S$ を残差 $v(n)$ の分散とすると，

$$l=-\frac{N}{2}\ln 2\pi-\frac{N}{2}\ln(S/N)-\frac{N}{2} \tag{9}$$

によって与えられる[7)]。また(7)のような方程式系は，Newton-Raphson法により数値的に解かれる。なお(7)式は対称式で，$a_1$，$a_2$ と $b_1$，$b_2$ を入れ換えても同じ結果が得られる。しかし，どちらが信号過程のパラメータであるかを，物理的に判断することは容易である(このようなことは4次以外起こらない)。

## 3. 連続自己回帰モデルによる方法

ここでは，動揺方程式を連続領域においてそのまま連続型自己回帰モデル[4)]に変換する，新しい方法を示す。

記述を一般的にするため(1)を

$$\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_2x(t)=u(t) \tag{10}$$

と書く。ここで $u(t)$ は未知の強制外乱を表わす。動揺問題では雑音過程 $u(t)$ は，一般に連続型白色雑音であると見なすことは不可能であり，(5)と類似の連続型自己回帰過程(CAR過程)と見なすのがより一般的である。そこで $u(t)$ は，$m$ 次のCAR過程とすると，

$$u^{(m)}(t)+b_1u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_mu(t)=v(t) \tag{11}$$

と表わせる。ここで $v(t)$ は，白色雑音過程である。さらに，$u(t)$ の高次微分を(10)の左辺を用いて表現し，(11)に代入すると，

$$\overset{(m+2)}{x}(t)+A_1\overset{(m+1)}{x}(t)+\cdots+A_m\ddot{x}(t)+A_{m+1}\dot{x}(t)+A_{m+2}x(t)=v(t) \tag{12}$$

となり，(11)が信号過程 $x(t)$ を用いて $(m+2)$ 次CAR過程となる。ここで，

$$\begin{cases} A_1=a_1+b_1 & A_2=a_2+a_1b_1+b_2 \\ A_3=a_2b_1+a_1b_2+b_3, & \cdots,\ A_{m+2}=a_2b_m \end{cases} \tag{13}$$

である。(13)は(7)と本質的に同じ関係式で記号が変わっているに過ぎない。又 $m=2$ のとき対称式になることも2.において指摘した通りである。かくして，データが得られた時，そのデータ構造を最も良く表現できるCARモデルが選択されると，(13)を解いて，物理モデル(1)あるいは(2)が決定できることとなった。

## 4. 連続型自己回帰モデルの尤度関数

そこで，本章では，横揺や縦揺の時系データ $x(t)$ の時系列が与えられた時，どのようにして，CARモデル

$$x^{(k)}(t)+A_1x^{(k-1)}(t)+\cdots+A_{k-1}\dot{x}(t)+A_kx(t)=v(t) \tag{14}$$

を推定するのが，最も統計的にみて妥当であるかを検討する。

(14)の推定問題において困難な点は，この場合 $x(t)$ は測定しているが，その高階微分項は測定していない(あるいはできない)点である。このような場面で，有効な手段として制御工学の分野ではKalman等による状態空間表現が使われる[10),11)]。そして，その状態空間表現はシステムの内部表現とみなされ，外部変数である観測値から内部を推定する問題として取り扱われる。ここでも，この方法に従うこととし，状態変数

$$x_t\equiv(x(t),\dot{x}(t),\cdots x^{(k-1)}(t))^t \tag{15}$$

を定義し($A^t$ は $A$ マトリクスのtranspose)，(14)を

$$\dot{x}_t=Ax_t+Bu_t \tag{16}$$

と表現する。ここで $u_t$ は，Wiener過程 $W_t$ を使って

$$u_tdt=dW_t \tag{17}$$

と表わされる平均値0，分散 $\tau^2(N\sim(0,\tau^2))$ の正規白色雑音である。また，

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \vdots \\ & & & 1 \\ -A_k & -A_{k-1} & & -A_1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

である。$x_t$ は内部変数で，実際は観測値 $y_t$ から推定される量である。Kalmanの理論では，この内部表現と外部変数である $y_t$ を結ぶ観測方程式

$$y_t=Hx_t+w_t \tag{19}$$

を考える。このとき $H=(100\cdots0)$ と採れば，ここでの問題に合致することがわかる。$w_t$ は $N\sim(0,\sigma^2)$ の正規白色雑音で，観測雑音と呼ばれる。

次に連続モデル(16)，(19)を離散化する。$s$ 時刻にサンプリングされた後，$t$ 時刻までサンプリングされないとすると，(16)，(19)で動くシステム $x_t$ の変化はその $s$ から $t$ までの積分によって表わされる。したがって，

$$\begin{cases} x_t=F_{t-s}x_s+G\varepsilon_{t,s} \\ y_t=Hx_t+w_t \end{cases} \tag{20}$$

なる離散モデルが得られる[11]。ここで，

$$F_{t-s}=e^{A(t-s)},\ G=I_k(I_k{:}k\times k\ \text{単位行列}) \tag{21}$$

$$\varepsilon_{t,s}=\int_s^t F_{t-s}Bu_t dt \tag{22}$$

である。$\varepsilon_{t,s}$, $w_t$ には次のような統計的性質がある($E$, cov, var は期待値・共分散・分散)

$$E[w_t]=0,\ E[\varepsilon_{t,s}]=0$$
$$E[\varepsilon_{t,s}\cdot\varepsilon_{p,q}^t]=0 \qquad t>s>p>q \tag{23}$$
$$Q=\mathrm{cov}[\varepsilon_{t,s}]=E[\varepsilon_{t,s}\cdot\varepsilon_{t,s}^t]=\tau^2\int_s^t F_{t-t'}BB^tF_{t-t'}^t dt'$$
$$E[w_tw_s^t]=0,\quad t>s$$
$$R=\mathrm{var}[w_t]=\sigma^2$$

離散化が等間隔 $\Delta t$ 毎に行われるとすると，$t=n\Delta t$, $s=(n-1)\Delta t$ と置いて(20)は

$$\begin{cases} x_n=F_{\Delta t}x_{n-1}+G\varepsilon_n \\ y_n=Hx_n+w_n \end{cases} \tag{24}$$

で表わされる。

結局(14)のようなCARモデルは，等間隔サンプリングの結果，(24)のような離散型状態空間表現となることがわかる。次に(24)のようなシステムのKalman filterと最尤法(maximum likelihood method)を用いたパラメータ推定法を示す。

いま，(24)における未知パラメータをベクトル

$$\theta_k=(a_1,\ a_2,\cdots a_k,\ \tau^2,\ \sigma^2) \tag{25}$$

で表わす。このとき，$\theta_k$ が何等かの方法で与えられたという条件下で，$N$ 個の観測値 $y_1$, $y_2$, …, $y_N$ が得られる条件付確率分布即ち尤度(Likelihood)は，

$$L(\theta_k)=p(y_1,\ y_2,\cdots,\ y_N/\theta_k)=p(y_1/\theta_k)p(y_2/y_1,\ \theta_k)\cdots$$
$$\cdots p(y_N/y_1,\cdots,\ y_{N-1},\ \theta_k) \tag{26}$$

対数尤度は

$$l(\theta_k)=\sum_{n=1}^N \ln p(y_n/y_1,\cdots,y_{n-1},\theta_k) \tag{27}$$

と書ける。ここで，$p(y_n/y_1, y_2,\cdots, y_{n-1}, \theta_k)$ は，$y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$, $\theta_k$ が与えられた条件下で，$y_n$ が得られる条件付確率分布である。以後，AICとの関連で対数尤度 $l(\theta_k)$ を用いることとする。

(24)において，$\theta_k$ が指定され $y_1$, …, $y_{n-1}$ までの観測値が得られた時の $x_n$ の推定量を $\hat{x}_{n|n-1}$ 誤差共分散を $V_{n|n-1}$, $y_1$, $y_2$, … $y_n$ が観測された時点での $x_n$ の推定量を $\hat{x}_{n|n}$ 誤差共分散を $V_{n|n}$ とすると，$\hat{x}_{n|n-1}$, $\hat{x}_{n|n}$ は次のKalman filterにより与えられる[12),13)]。

(Time Update)

$$\begin{cases} \hat{x}_{n|n-1}=F_{\Delta t}\hat{x}_{n-1|n-1} \\ V_{n|n-1}=F_{\Delta t}V_{n-1|n-1}F_{\Delta t}^t+GQG^t \end{cases} \tag{28}$$

(Measurement update)

$$\begin{cases} \hat{x}_{n|n}=\hat{x}_{n|n-1}+K_n(y_n-H\hat{x}_{n|n-1}) \\ K_n=V_{n|n-1}H^t(HV_{n|n-1}H^t+R)^{-1} \\ V_{n|n}=(I-K_nH)V_{n|n-1} \end{cases} \tag{29}$$

そしてこの時，$p(y_n|y_1, y_2, \cdots y_{n-1}, \theta_k)$ の平均値・分散は，

$$\hat{y}_{n|n-1}=H\hat{x}_{n|n-1}$$
$$r_{n|n-1}=HV_{n|n-1}H^t+R \tag{30}$$

で与えられる。このことから，正規性の仮定のもとでは，

$$p(y_n/y_1,\cdots,\ y_{n-1},\ \theta_k)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi r_{n|n-1}}}\exp\left\{-\frac{1}{2r_{n|n-1}}(y_n-\hat{y}_{n|n-1})^2\right\} \tag{31}$$

となり，モデル(24)の対数尤度は，

$$l(\theta_k)=-\frac{N}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N\ln r_{n|n-1}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N(y_n-\hat{y}_{n|n-1})^2/r_{n|n-1} \tag{32}$$

で計算できることがわかる。

したがって尤度(32)を最大にするような $\theta_k$（これを $\hat{\theta}_k$ とする)を選ぶことにより，$k$ 次CARモデルの最尤推定量が得られる。得られたモデルの良さは，

$$\mathrm{AIC}_k=-2l(\hat{\theta}_k)+2(k+2) \tag{33}$$

によって評価でき[5)]，$\mathrm{AIC}_k$ が最小となる次数 $k$ のモデルが，最良なモデルとみなせる。

## 5. 計　算　法

本章では，4章で記したCARモデルの推定法の，精度良い計算のために行なった種々の工夫について示す。

尤度関数(32)がパラメータ $\theta_k$ に関して非線型であるので，最大尤度を与える $\theta_k$ は解析的に得られない。したがって数値的に非線型最適化手法を用いて $\theta_k$ を探索する必要がある。本論文では，ヘシアン(Hessian)の逆行列を直接求める必要のない，Davidon-Fletcher-Powell法(DFP法)を用いた。DFP法は，勾配ベクトル(Gradient)を利用する方法のうちで，最も有効な方法と言われるが，詳細は他書に譲る(Aoki[14)]，Himmeblau[15)])。

(28)，(29)のKalman filterの計算には，アルゴリズム通り行なうとパラメータの増加に従い，誤差共分散マトリクス $V_{n|n}$, $V_{n|n-1}$ の正定性，対称性が保持し得なくなる等の不安定現象が現われる。この困難を克服するため，Potterは共分散を上・下三角行列に分解して，遂次計算を行なうsquare-root（平方根)filterを提案した(このようにすると分解された三角行列は，正定でなくとも良い)。このフィルタは，計算精度の良さからアポロ宇宙船の軌道推定に用いられた。さらにDyer-McReynoldsは，$V$ の逆行列(情報行

列)を分解する Information Square Root Filter (ISF と略す)を開発し，これが現在の宇宙計画における軌道推定に用いられている[16),17)]。本論文でも数値計算上の安定性を保つため，ISF を使用した[18)]。ISF の逐次計算法を次に示す。

[Step 1] アプリオリの共分散 $V_{0/0}$ 及び $Q$，$R$ マトリクスの逆行列をコレスキー(Cholesky)分解により，

$$V_{0/0}^{-1}=\tilde{R}_x^t(0)\tilde{R}_x(0),\quad Q^{-1}=R_\varepsilon^t R_\varepsilon,\quad R^{-1}=R_w^t R_w \tag{34}$$

と上三角，下三形角行列に分解する。また $\tilde{R}_x(0)$ を使って，$x$ のアプリオリ推定値 $\tilde{x}(0)$ に次の処理を施す。

$$\tilde{d}(0)=\tilde{R}_x(0)\tilde{x}(0) \tag{35}$$

[Step 2] (Measurement update)

次のような $Z$ マトリクスを構成する。

$$Z=\left[\begin{array}{c:c}\tilde{R}_x(k) & \tilde{d}(k)\\ \hdashline R_w G & R_w y(k)\end{array}\right] \tag{36}$$

そしてこのマトリクス $Z$ にハウスホルダ(Householder)変換[19)]を左から右へ施し，$Z$ を上三角行列化する。

$$T\cdot Z=\left[\begin{array}{c:c}R_x(k) & d(k)\\ \hdashline 0 & \varepsilon(k)\end{array}\right] \tag{37}$$

このとき，

$$\hat{x}_{k/k}=R_x^{-1}(k)\tilde{d}(k) \tag{38}$$

$$V_{k/k}=R_x(k)^{-1}R_x^{-t}(k) \tag{39}$$

である。

[Step 3] (Time Update)

マトリクス $Z^*$ を次のように構成する。

$$Z^*=\left[\begin{array}{c:c:c}R_\varepsilon(k) & 0 & 0\\ \hdashline -R_x(k)F_{\Delta t}^{-1}G & R_x(k)F_{\Delta t}^{-1} & d(k)\end{array}\right] \tag{40}$$

この $Z^*$ に Householder 変換を左から施し，$Z^*$ を上三角行列化する

$$T\cdot Z^*=\left[\begin{array}{c:c:c}\tilde{R}_\varepsilon(k+1) & \tilde{R}_{\varepsilon x}(k+1) & \tilde{Z}_\varepsilon\\ \hdashline 0 & \tilde{R}_x(k+1) & \tilde{d}(k+1)\end{array}\right] \tag{41}$$

このとき，

$$\hat{x}_{k+1/k}=\tilde{R}_x^{-1}(k+1)\tilde{d}(k+1) \tag{42}$$

$$V_{k+1/k}=\tilde{R}_x^{-1}(k+1)\tilde{R}_x^{-t}(k+1) \tag{43}$$

[Step 4] データ終了まで Step 2，Step 3 を繰返す。

最後に，(21) における行列指数関数 $e^{At}$ の計算であるが，非常に多くの計算法がある。しかし，グローバルに良い方法は今の所無い[20)]。ここでは，$A$ が特別な形(フロベニウス型)としていることを用いて，$A$ を Jordan 標準形に変換して計算する方法を用いたが詳細は他に譲る[4),20)]。

## 6. 計算例と考察

本章では，実船実験によって得られた運航状態での動揺データに，CAR モデルをあてはめた例を示す。序論でも述べたように本来ならば，従来の実験的あるいは流体力学的方法によりここで用いている動揺パラメータが推定されている船を選び比較すべきであるが，そのようなデータが手許にないのでここでは，このような比較は行えない。したがって得られた結果の考察では，従来からの定説との若干の比較を行なうに留める。

Table 1 Principal dimensions of a container ship "HKT Maru"

| | | |
|---|---|---|
| Loa | 200.605 | m |
| Lpp | 196.00 | m |
| Breadth | 32.20 | m |
| Depth | 21.35 | m |
| Draught molded | 11.50 | m |
| $C_b$ | 0.57 | |
| G.tons | 35,309 | tons |
| Displacement | 41,264 | tons |
| Speed (service) | 20.90 | k't |
| Speed (max) | 24.10 | k't |

Table 2 Weather and sea conditions of HKT 18 and HKT 25 data

| Data | HKT18 | HKT25 |
|---|---|---|
| Ship's Course | 100° | 260° |
| Speed | 19.5 k't | 15.7 k't |
| Steering | Auto | Manual |
| Wind | | |
| Grade | 6 | 10 |
| Dir.(rel.) | Stbd 30° | Stbd 120° |
| (abs.) | 145° | 35° |
| Force(rel.) | 45 k't | 37 k't |
| (abs.) | 27 k't | 50 k't |
| Swell | | |
| Height | 2 m | 10 m |
| Length | 100 m | 200 m |
| Period(enc.) | 9 sec | 12 sec |
| Wind Wave | | |
| Height | 2 m | 4 m |
| Length | 30 m | 60 m |
| Period | 5 sec | 6 sec |

ただし，本論文の目的は，あくまで実際の海面で得られた実船の運航状態での時系列データに対して，統計的制御理論の立場から最も確からしいパラメータの推定値を求めたものであり，従来の船舶流体力学的方法とは船の置かれた状況は大きく異なっている可能性のあることには留意すべきである。

### 6.1 用いるデータ

ここで使用するデータセットは，PNW に現在も就航している大型コンテナ船上で冬期，往航復航にわたり採られ

た29セットから成る横揺，縦揺データである。Table 1 に本船の主要寸法を示す。

統計的推定法の信頼性を統計学の立場から検証するには，出来るだけ多くのデータへのあてはめが必要である。参考文献24)では，これ等の全データのスペクトラム，雑音寄与率[21]が調べられている。これ等の集積から少なくとも往航時，復航時の動揺の（特に横揺の）固有周波数の位置，連成運動時の連成の度合などがかなり正確に推定できる。まず，これ等のデータから代表的に往航・復航2つずつを選びCARモデルをあてはめた。ここでは，それらの中からさらに往航・復航時1つずつのデータを選び解析を行なう（他例についてはK. Ohtsu[25]にある）。

Table 2 に解析対象としたデータセットが採られた気象・海象状況を示す。本表にあるHKT 18データは，比較的穏やかな海況下で得られた，斜め前から波を受ける状態での往航時の記録である。またHKT 25は復航時強いウネリを右舷後方より受け，最大横揺35°に達する時化状態でのマニュアル操舵時データである。

### 6.2 計算条件

上記データにCARモデルを適用するに当り，計算上次の点に留意した。

1）データ数を$N=500$点とした。$\Delta t=2$ secである。2）ISFの計算に際し，定常性を確保するためデータの10％を尤度関数の評価から除いた。3）尤度の定義を同一にするため，DARモデルの尤度として(9)を，CARモデルの尤度として(32)を用いた。4）推定精度を上げるため，DFP法の計算終了を全パラメータの尤度関数に関する勾配が0.1以下となる時点とした。5）勾配(gradient)は，数値的に求めたが，計算評価点の両側の傾斜の平均をとり精度を高めた。6）CARモデルの安定性を確保するため，DFP法における1次元探索の段階で安定性をチェックし，抵触するモデルをペナルティ法により削除した。7）(13)の解法には，Newton-Raphson法を用いた。

### 6.3 動揺データ解析の方法

対象とするデータに対し，先ずコレログラム，スペクトルを計算し，時系列を構成する要素波，減衰の程度，スペクトラムのピーク位置等に関する情報の検討を行なう。このうちスペクトラムの計算には，ARモデルによる方法を用いる[9]。ARモデルは，最高20次まで試みAIC最小次数を最適モデルとし，スペクトラムを計算する。

$a_1$，$a_2$の推定値が得られれば，

$$\omega=2\pi f=\sqrt{a_2-(a_1/2)^2} \tag{44}$$

によって，固有周波数を，また

$$\varepsilon=a_1/2,\ \kappa=2\varepsilon/\omega \tag{45}$$

によって，減衰係数$\varepsilon$あるいは$\omega$によって規格化された減衰係数$\kappa$を計算する[23),2)]。

なおCARモデルは，計算時間の都合で最高6次モデルまで計算する。後の計算結果によると，縦揺に関して，安定なAICの上昇が見られるのはさらに高次と判断されるが，計算時間の都合で今回は，高々6次とした。

Fig. 1 に以上の方法により求めたHKT 18データの縦揺時系列へのあてはめ結果の1部を示す。後に述べるように，この時の最適次数は5である。この図の細線は縦揺実データの一部，内側を通る太線は5次CARモデルで，最適化法で探索して得られた最適モデルにおけるKalman filterからの縦揺の推定値である。CARモデルに対するアプリオリなパラメータに関する情報が少ない点から出発しているにもかかわらず，推定された縦揺の値は，実データの動きを良く追っている。

### 6.4 横揺データへのあてはめ

往航時HKT 18データ及び復航時HKT 25データのコレログラム，スペクトラムをFig. 2～Fig. 5に示す。これらを比較するとHKT 18は，海況が静穏なこともあって，単純なコレログラムとなり，ほぼ単峰性のスペクトラムであるのに対し，HKT 25は，出合周期100 secに近い斜め追い波の影響を受けた複雑なコレログラム，そして双峰性のスペクトラムになっている。29セットの全データからの解析によると[24]，両データのスペクトラムに現われるそれぞれ0.064 Hz(HKT 18)及び0.053 Hz(HKT 25)付近のピークが，当時の横揺の固有周期であると推定される。

Table 3，Table 4は，それぞれHKT 18のCAR及びDARモデルのあてはめ結果，Table 5，Table 6はHKT 25の両モデルのあてはめ結果である。これ等の表において，$a_1$，$a_2$は(10)あるいは(3)における$\dot{x}(t)$, $x(t)$あるい

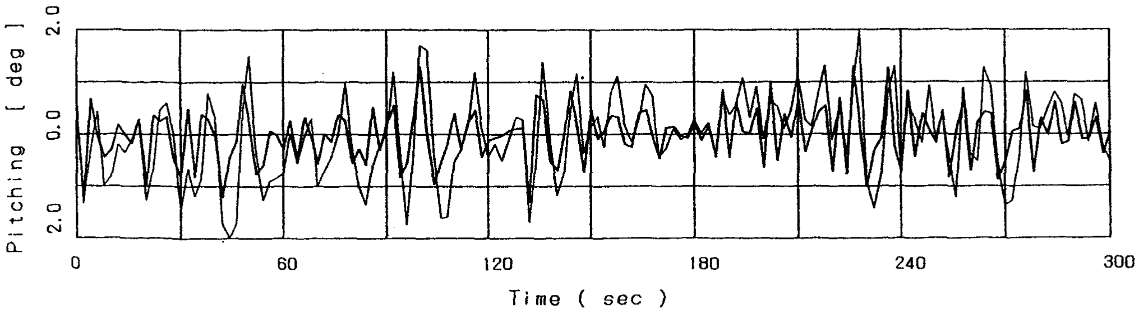


Fig. 1 The actual pitching time series (light line) and its filtered one (bold one) (HKT 18 data ; Model's order 5)

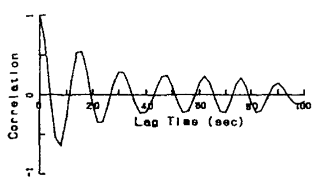


Fig. 2 Correlogram of Roll in HKT 18 data

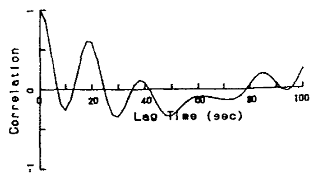


Fig. 4 Correlogram of Roll in HKT 25 data

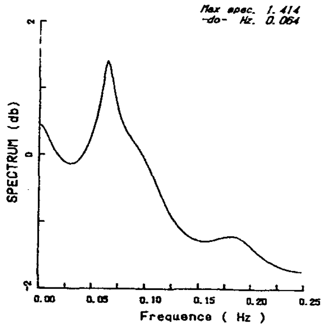


Fig. 3 Spectrum of Roll in HKT 18 data

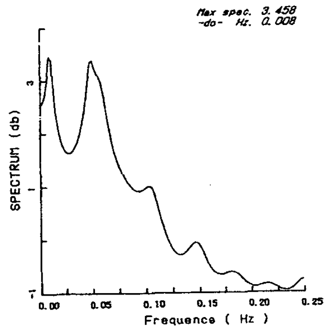


Fig. 5 Spectrum of Roll in HKT 25 data

Table 3 Estimated value of Roll's parameters by CAR model (HKT 18 data)

| Model / Data / Motion | CAR / HKT18 / Roll | | |
|---|---|---|---|
| Order | 2 | 3 | 4 |
| AIC | 6.315684 | 6.319780 | 6.323728 |
| $\mathrm{Exp}(\tau^2)$ | 5.277766 | 1.852094 | 0.112478 |
| $\mathrm{Exp}(\sigma^2)$ | 3.893752 | 1.941378 | 1.713130 |
| $a_1$ | 0.101977 | 0.102796 | 0.107372 |
| $a_2$ | 0.183741 | 0.184862 | 0.183161 |
| $b_1$ | | 2.886507 | 2.853928 |
| $b_2$ | | | 4.616303 |
| Damp.Coef.($\varepsilon$) | 0.059476 | 0.059771 | 0.062721 |
| Normalized Damp.Coef.($\kappa$) | 0.279485 | 0.280043 | 0.295442 |
| Nat.Freq.(Hz) | 0.067736 | 0.067940 | 0.067576 |

Table 4 Estimated value of Roll's parameters by DAR model (HKT 18 data)

| Model / Data / Motion | DAR / HKT18 / Roll | |
|---|---|---|
| Order | 5 | 6 |
| AIC | 7.587518 | 7.591412 |
| $a_1$ | -1.205767 | -1.208187 |
| $a_2$ | 0.855736 | 0.857598 |
| $b_1$ | -0.088638 | -0.085538 |
| $b_2$ | -0.089303 | -0.088097 |
| $b_3$ | -0.119547 | -0.120245 |
| $b_4$ | | -0.007851 |
| Damp.Coef.($\varepsilon$) | 0.038949 | 0.038405 |
| Normalized Damp.Coef.($\kappa$) | 0.180958 | 0.178596 |
| Nat.Freq.(Hz) | 0.068512 | 0.068449 |

は $x(n-1)$, $x(n-2)$ の係数 $b_1$, …は雑音項の係数である。$\exp(\tau^2)$, $\exp(\sigma^2)$ は状態空間表現(24)における白色雑音の分散 $\tau^2$, $\sigma^2$ である(いずれも無較正)。また，$\varepsilon, \kappa$, $\omega$ は，$a_1$, $a_2$ から計算した動揺方程式のパラメータに対応している。

表から CAR, DAR モデルの AIC を比べると両データとも CAR モデルの AIC が小さい。このことは，CAR モデルの方が良くデータにあてはまり，しかも最適次数は CAR モデルでは 2 次と少なくて済むことを示している。又，HKT 18 データのモデルでは，$\omega$ はほぼ CAR, DAR で合致しているが，減衰係数が若干異なる。CAR モデルのフィルターの効果と考えられる。以後あてはまりの良い CAR モデルについて若干の考察を行なう。

まず，横揺固有周期については，HKT 18, HKT 25 データとも，本項の初めに述べた全データから判断した値に良く合致している。

次にこれまでの定説によると一般的にみて，減衰係数 $\kappa$ 値は，平水中小角度動揺で 0.15〜0.20 から大角度横揺で 0.60 程度で，前進速力がある場合には揚力効果などで少し大きくなると言われている[2),3)]。CAR モデルによる HKT 18 データの $\kappa$ 値はこの範囲であるが大角度動揺である HKT 25 の $\kappa$ が HKT 18 のそれより小さく出ている。この時の横揺が後方より出合周期の長いウネリを受け，その結果 100 sec 近い周期のいわばヒール状態からの横揺であり平水中での大角度横揺とは様子が異なっているとも考え

Table 5 Estimated value of Roll's parameters by CAR model (HKT 25 data)

| | | |
|---|---|---|
| Model | CAR | |
| Data | HKT25 | |
| Motion | Roll | |
| Order | 4 | 5 |
| AIC | 7.436342 | 7.429619 |
| Exp($\tau^2$) | 1.905653 | 0.654577 |
| Exp($\sigma^2$) | 1.475203 | 0.016328 |
| $a_1$ | 0.090718 | 0.070021 |
| $a_2$ | 0.122311 | 0.120733 |
| $b_1$ | 6.256623 | 0.259801 |
| $b_2$ | 0.747135 | 2.360304 |
| $b_3$ | | 0.202698 |
| Damp.Coef.($\varepsilon$) | 0.045359 | 0.035011 |
| Normalized Damp.Coef.($\kappa$) | 0.261601 | 0.202550 |
| Nat.Freq.(Hz) | 0.055191 | 0.055020 |

Table 6 Estimated value of Roll's parameters by DAR model (HKT 25 data)

| | |
|---|---|
| Model | DAR |
| Data | HKT25 |
| Motion | Roll |
| Order | 6 |
| AIC | 9.185900 |
| $a_1$ | -1.510951 |
| $a_2$ | 0.923488 |
| $b_1$ | -0.711195 |
| $b_2$ | 0.013756 |
| $b_3$ | -0.040629 |
| $b_4$ | -0.158293 |
| Damp.Coef.($\varepsilon$) | 0.019900 |
| Normalized Damp.Coef.($\kappa$) | 0.119473 |
| Nat.Freq.(Hz) | 0.053018 |

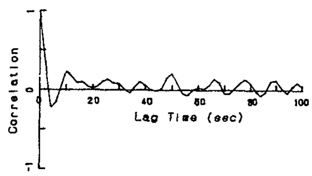


Fig. 6 Correlogram of Pitch in HKT 18 data

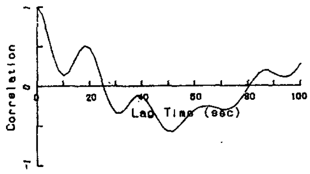


Fig. 8 Correlogram of Pitch in HKT 25 data

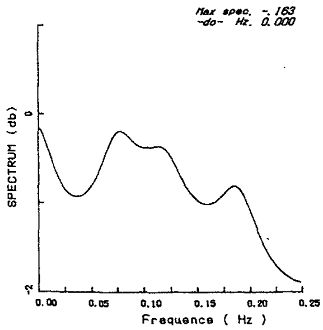


Fig. 7 Spectrum of Pitch in HKT 18 data

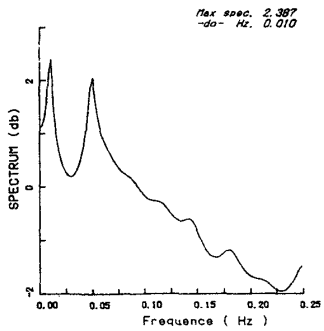


Fig. 9 Spectrum of Pitch in HKT 25 data

るが，真の原因解明にはさらに多くの解析の累積が必要である。

CAR モデルあてはめの際の次数の相異による安定度は，表からわかるように HKT 18 の方が良く，外力の影響が強い HKT 25 では安定度が悪くなっている。もう少し高次で安定し AIC が低く出るモデルの存在の可能性も考えられるが，連成項あるいは非線形項の導入も考えられ，両方の面から今後検討したい。

### 6.5 縦揺データへのあてはめ

次に，同じ 2 つのデータセットと縦揺データに対する CAR，DAR モデルのあてはめ結果を示す。Fig. 6～Fig. 9 は，HKT 18，25 データの縦揺のコレログラム，スペクトラムを表わしている。

良く知られているように，縦揺は船固有の運動の減衰が強い運動で，実データにおいてもスペクトラム等から縦揺固有周期を見出す事は困難である。動揺の固有周期($T_\theta$) を求める近似式としては，例えば田宮の近似式

$$T_\theta=2.01\sqrt{(0.77C_B+0.26)(0.92+0.44B/d)d} \qquad (46)$$

がある[22]。本公式に当時の平均喫水(往航 9.87 m，復航 7.87 m)をあてはめると，往航 8.06 sec(0.124 Hz)復航

Table 7 Estimated value of Pitch's parameters by CAR model (HKT 18 data)

| Model | CAR | |
|---|---|---|
| Data | HKT18 | |
| Motion | Pitch | |
| Order | 4 | 5 |
| AIC | 6.983932 | 6.983643 |
| Exp(τ²) | -2.795541 | 1.498370 |
| Exp(σ²) | 2.095736 | 2.107763 |
| $a_1$ | 0.461463 | 0.307765 |
| $a_2$ | 0.420421 | 0.447874 |
| $b_1$ | 0.135616 | 0.543017 |
| $b_2$ | 3.580106 | 1.570790 |
| $b_3$ | | 0.574800 |
| Damp.Coef.(ε) | 0.230732 | 0.153883 |
| Normalized Damp.Coef.(κ) | 0.761546 | 0.472538 |
| Nat.Freq.(Hz) | 0.096441 | 0.103658 |

Table 8 Estimated value of Pitch's parameters by DAR model (HKT 18 data)

| Model | DAR |
|---|---|
| Data | HKT18 |
| Motion | Pitch |
| Order | 7 |
| AIC | 8.327500 |
| $a_1$ | -0.890317 |
| $a_2$ | 0.668884 |
| $b_1$ | 0.318642 |
| $b_2$ | 0.190616 |
| $b_3$ | -0.362407 |
| $b_4$ | -0.186052 |
| $b_5$ | -0.323699 |
| Damp.Coef.(ε) | 0.100537 |
| Normalized Damp.Coef.(κ) | 0.405390 |
| Nat.Freq.(Hz) | 0.079199 |

Table 9 Estimated value of Pitch's parameters by CAR model (HKT 25 data)

| Model | CAR | |
|---|---|---|
| Data | HKT25 | |
| Motion | Pitch | |
| Order | 5 | 6 |
| AIC | 7.486955 | 7.482769 |
| Exp(τ²) | 2.840363 | 5.422334 |
| Exp(σ²) | 1.694849 | 2.092394 |
| $a_1$ | 0.207863 | 0.195160 |
| $a_2$ | 0.139470 | 0.818508 |
| $b_1$ | 0.437237 | 8.428726 |
| $b_2$ | 1.133087 | 1.722290 |
| $b_3$ | 0.107634 | 1.125897 |
| $b_4$ | | 0.065086 |
| Damp.Coef.(ε) | 0.103932 | 0.097580 |
| Normalized Damp.Coef.(κ) | 0.579481 | 0.216980 |
| Nat.Freq.(Hz) | 0.057090 | 0.143150 |

Table 10 Estimated value of Pitch's parameters by DAR model (HKT 25 data)

| Model | DAR |
|---|---|
| Data | HKT25 |
| Motion | Pitch |
| Order | 7 |
| AIC | 9.289740 |
| $a_1$ | -1.468748 |
| $a_2$ | 0.856971 |
| $b_1$ | -0.390117 |
| $b_2$ | 0.087588 |
| $b_3$ | -0.297425 |
| $b_4$ | -0.186142 |
| $b_5$ | -0.072080 |
| Damp.Coef.(ε) | 0.038588 |
| Normalized Damp.Coef.(κ) | 0.235798 |
| Nat.Freq.(Hz) | 0.052091 |

7.73 sec(0.129 Hz)となる。この値の周辺周波数0.11～0.14 Hz付近について，全データのスペクトラム[24]を当たってみると，弱いながらも顕著なピークが，この範囲内に19例あることがわかった。Fig. 1の実データやコレログラム(Fig. 6)にも所々細かな動きが散見される。これらのことから両データの縦揺固有周期は7～9 sceの間と考えられる。

Table 7～Table 10は，2つの縦揺データへのCARモデル，DARモデルのあてはめ結果を示す。ここでもCARモデルのAICは，DARよりも全般にわたって小さく，以後CARモデルの結果により若干の考察を試みる。

まずHKT 18データの固有周波数を最適モデルである5次モデルで見ると，0.103 Hzで周期9.6 sec程度である。この値は，上記の推定値の範囲よりやや周波数は低く，スペクトラム(Fig. 7)の0.075 Hzと0.12 Hzのピークの中間よりやや高周波側を指している。HKT 25では，5次

までのモデルがいずれも固有周波数として 0.057 Hz 以下の長周期を指していたが 6 次にいたり 0.143 Hz(約 6.9 sec)となり，AIC も改良されている。

減衰係数には，HKT 18 の最適モデルでは約 0.473 である。この値は Roll のそれよりもかなり大きく，減衰の強いことを示している。しかしながら，対数減衰率に換算すると，0.742 となり，参考文献 2 )に示された若干の船の値より小さい。HKT 25 では，$\kappa$ 値は縦揺のものとしては，非常に小さく，より高次モデル等の検証が必要である。これらの結果から，縦揺へのあてはめは，運動の減衰が強く，外乱の影響を受けやすいことから，全般的にみて横揺よりも高次のあてはめが必要であると予想される。連成項等の導入に合わせて今後この方向で解析を進めたい。

## 7. 結　論

本研究においては，連続型自己回帰モデル(CAR モデル)と呼ばれる時系列モデルを使用して，従来から良く知られている Froude の線型動揺方程式の，実船離散的時系列動揺データのみに依存した(data dependent)新しい統計的あてはめ法を提案した。

この方法では，有色雑音項を含む動揺の運動方程式は白色化されそして最終的には，Kalman による確率的状態空間表現され，このモデルの尤度を最も高らしめるパラメータを最適化手法で探索された。モデルの良さは，赤池の AIC 法で測られ最良次数モデル(ここでは結果的に最適な雑音項の次数)が選択された。この計算過程で現われる Kalman filter の計算には，精度の良い ISF(Information Square Root Filter)を用いた。

最後にこの方法を実際の大型コンテナ船の運航状態において採られた，横揺と縦揺からなる 2 つのデータにあてはめ，次のような結果が得られた。

1） 従来知られていた山内による方法[1] に比べ，AIC で見て統計的に良いモデルが得られた。

2） CAR モデルによる方法で求めた横揺・縦揺の減衰係数，固有周波数の値のうち，固有周波数についてはほぼスペクトラムや実験公式から推察した値と一致する。しかし，減衰係数 $\kappa$ は高々 6 次までの CAR モデルでは静穏時横揺データへのあてはめを除いて安定しているとは言えない。

3） 減衰の弱い横揺データへのあてはめの方が，CAR モデルは低次で安定し，減衰が強くその結果外乱の影響が強く出る縦揺では 6 次まででも安定せずさらに高次モデルあるいは連成項の導入などが望まれる。

本方法の特徴は，

1） 微分方程式の離散化において近似が無いこと。

2） 実船の動揺データが得られると外乱項である波浪が測定されてなくとも同定が可能であること

3） 最も推定精度の高い最尤法が用いられていること，

等である。

今後検討すべき点としては，

1） 同じ船を用いた従来の流体力学的アプローチとの比較による本法の信頼性の検証

2） 外乱を受ける状態・強さ等によって分類した系統的なあてはめ，

3） 異なった船型を持つ実船データの記録へのあてはめによる係数の比較

4） 連成運動への拡張，非線型項の導入，

等である。中でも多くのデータへのあてはめによる信頼性の検証が望まれる。

本研究のうちのその一部は，著者の 1 人がスウェーデン・ルンド大学に留学中に行なった。留学中お世話になった K. J. Åström 博士，秘書の Mrs. Eva Schldt 他協力して頂いた方々に謝意を表します。又本研究は，統計数理研究所と東京商船大学との共同研究の一環として行った。その便宜を計られ，終始暖い助言を頂いた統計数理研究所長・赤池弘次博士，田辺国士博士，さらに本稿のメモ段階で有益な助言を頂いた昭島研究所山内保文博士に深甚の謝意を表します。図面作成の段階で，日本郵船 K. K の石塚正則君，織田美千子氏にもお世話になった。最後に運動性能研究委員会において有益なアドバイス・コメントを頂いた事に深く感謝致します。

## 参考文献

1) 山内保文：船の動揺の時系列論的解析について，造船協会論文集，第 99 号，昭和 31 年 5 月，pp 47-64。
2) 元良誠三監修：船体と海洋構造物の運動学，成山堂，1982。
3) 姫野洋二：横揺減衰力，第 2 回耐航性に関するシンポジウム，日本造船学会，昭和 52 年 12 月，pp. 199〜209。
4) R. H. Jones: Fitting a Continuous Time Autoregression to Discrete Data, Applied Time Series Analysis, II, (D. F. Findley Ed.), Academic Press, 1981, pp. 651-692.
5) H. Akaike: Information Theory and an Extension of the maximum likelihood principle, 2nd International Symposium on Information Theory, B. N. Petrov and F. Csaki, Academiai Kiado, Budapest, 1973, pp267〜287.
6) M. S. Bartlett: On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time Series, J. R. Statist. Soc., Suppl. 8, 1946, pp273-282.
7) G. E. P. Box and G. M. Jenkins: Time Series Analysis, Forecasting and Control, Holden-Day, 1970.
8) 得丸英勝他共編：統計工学ハンドブック，培風館，昭和 62 年 7 月。
9) 山内保文監修：船舶海洋工学者のための不規則現象論，海文堂出版，1986。

10) R. E. Kalman and R. S. Bucy : New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. of the ASME, Journal of Basic Engineering, 83D, 1961, pp95～108.
11) K. J. Åstōm : Introduction to Stochastic Control Theory, Mathematics in Science and Engineering Vol. 70, 1970, Academic Press, pp. 82-84.
12) B. D. O. Anderson and J. B. Moore : Optimal Filtering, Information and System Science Series, T. Kailath ed. Prentice-Hall, 1979.
13) 北川源四郎：時系列解析一時間領域でのモデリングとその応用，情報処理，第21巻第11号，1980, pp 1174～1183.
14) M. Aoki : Introduction to Optimization Techniques, Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming, Macmillan Co., New York, 1971.
15) D. M. Himmelblau : Applied Nonlinear Programming, Macgraw-Hill Book Co.,
16) 西村敏充：Square-Root Filter/Smoother と Sensitivity analysis，システムと制御，Vol. 19，No7，1955, pp. 378～384.
17) P. G. Kaminsky, A. E. Bryson Jr. and S. F. Schmidt : Discrete Square Root Filtering : A Survey of Current Techniques, Trans. on Automatic Control, Vol. AC-16, No. 8, Dec., 1971, pp727～736.
18) G. Kitagawa : A Nonstationary Time Series Model and Its Fitting by a Recursive Filter, Journal of Time Series Analysis, 2, 1981, pp. 103～116
19) 坂元慶行，石野真木夫，北川源四郎：情報量統計学，情報科学講座 A・5・4，共立出版，1983。
20) C. Moler and C. V. Loan : Nighteen Dubious Ways to Compute the Exponetial of a Matrix, SIAM Review Vol. 20. No. 4, Oct., 1978, pp. 801～836.
21) 大津晧平：船体運動の統計的最適制御に関する研究（1），日本造船学会論文集，第152号，1972，pp. 243～256。
22) 関西造船協会編：造船設計便覧，第4版，海文堂出版，昭43年，p 446。
23) 坪内忠二：振動論，復刻再版，昭和51年，現代工学社。
24) 立花良則，中村康広，野村耕司：実船データによる船体運動解析，東京商船大学航海学科第33回生卒業論文，昭和60年。
25) K. Ohtsu : Maximum Likelihood Estimation of Ship's Dynamics, Report of Lund Universidy, Nov., 1987.