

疲労亀裂伝播のシミュレーションによる 信頼性評価

—データ収集と解析法について—

正員 板垣 浩* 正員 石塚 鐵夫*
正員 黄 培彦**

Reliability Assessment by Simulation of Fatigue Crack Growth
(Data Acquisition and Analysis Method)

by Hiroshi Itagaki, *Member* Tetsuo Ishizuka, *Member*
Huang Peiyan, *Member*

Abstract

A method is proposed for estimation of the probability distribution of fatigue crack growth life and reliability assessment of structures by simulating material resistance to fatigue crack growth along a crack path. The data for the simulation can be obtained from a few fatigue tests. The material resistance is treated as a spatial non-Gaussian (eventually Weibull, in this report) stochastic process. Therefore, a non-Gaussian stochastic fields simulation method proposed by Shinozuka, et al. is applied with statistical data obtained experimentally. The statistical analysis of the material resistance is performed with the data obtained by stress intensity factor control tests. The main results obtained are: (1) This method is useful to estimate the probability distribution of fatigue crack growth life; (2) the material resistance seems to follow a 3-parameter-Weibull distribution; (3) this method is useful for simulation of rather long fatigue crack; (4) using this method, the probability distribution of fatigue crack growth life can be estimated from very few fatigue tests; (5) the smallest life can be determined; and (6) stress intensity factor control test is preferable for the statistical analysis.

1. 緒 言

機械部品、構造物等の疲労に関する信頼性設計方法としては、安全寿命設計、フェイルセーフ設計、耐損傷設計等が提案されている¹⁾。このような設計に際しては、材料あるいは構造物の疲労破壊寿命分布を推定し、対象物の信頼性評価を行う必要がある。

材料あるいは構造物の疲労破壊寿命分布を知るには、統計的手法を用い寿命分布のすべてのパラメータを実験的に推定する方法があるが、多数の疲労試験の繰返しが必要である。このような試験は時間的かつ経済的制約から考えて現実的ではない。この欠点を多少でも補う方法の一つに、ベイズ統計法を用い疲労寿命分布のパラメータを推定

する方法がある。これは、過去に蓄積されたデータを利用し、自分の経験的判断も加え少数の疲労試験結果からパラメータを推定する方法である。この方法で推定した寿命の分布特性を用いた設計では、必然的に不確実要因を含んでいるので、安全係数を大きめに取らねばならないという欠点がある。

本研究では、疲労亀裂伝播の現象にのみ着目して、上述のような不都合を解決する方法を考察する。基本的には少数の疲労試験データから疲労亀裂伝播に関する材料抵抗の統計的特性を推定し、その特性を数値シミュレーションすることによって伝播寿命を求め、それより寿命分布のパラメータを推定する方法である。疲労亀裂伝播のシミュレーション方法は種種提案されている^{2-8,10-12)}。その一つに、いわゆる Paris 則⁷⁾の疲労亀裂伝播係数 C と伝播指数 m を確率変数として取り扱い、試験データから C の分布関数 $F_C(c)$ 及び C と m の相関関係を定め、それより C と m をシミュレートする方法がある。この方法で得られた亀裂長さ～繰返し数関係曲線(以下 $a-N$ 曲線という)は、 C と m

* 横浜国立大学工学部 (Faculty of Engineering, Yokohama National University)

** 横浜国立大学大学院 (School of Engineering, Yokohama National University)

は一定であるので、平滑な曲線となる。これは、多くの実験的事実と一致しないことが知られている。一方、伝播指数 m は亀裂経路に沿って一定値であり、かつ伝播係数 C は空間的確率変数であると仮定し、 $a-N$ 曲線をシミュレートする方法もあり、この方法で得られる $a-N$ 曲線はジグザグな曲線となる。

上述した二つのシミュレーションに用いられる確率変数 C は全く異なるものであることに注意しなくてはならない。すなわち、後者の C の平均値が前者の C に対応している。前者の方法を採用する時は、 C の分布を定めるために N 個の標本を用いるとすれば、 N 本の試験片を必要とする。後者では、亀裂経路に沿って k 個の標本を採取するとすれば、 N 本の試験片から $k \times N$ 個の標本が取れることになる。従って、前者のシミュレーション方法で疲労亀裂伝播寿命分布の推定を行うとすれば、基礎データを得るために多数の疲労試験を必要とする。これに反し、後者の方法を用いる場合、少数の疲労試験ですむ可能性が充分にあると考えられる。

筆者等の一人は先に微視的な研究から、亀裂伝播に関する材料の抵抗を近似的に正規(空間)確率過程として扱い疲労寿命を考察する方法を提案した⁸⁾。それは、非常に微細な亀裂には適用しうが、巨視的寸法(数 mm~数 cm)の亀裂には適用しがたいことが分かっている、巨視的亀裂を扱うためには、材料抵抗のデータを相応する距離にわたって収集しなくてはならず、実験的困難を伴う。また、材料抵抗の分布は必ずしも正規確率過程として扱えるとは限らない等の難点もあった。しかしながら、後述するように、非ガウス過程の簡易シミュレーション方法が Shinozuka 等⁹⁾によって開発されていること、応力拡大係数 ΔK 制御による実験によって、長い亀裂に沿って同一条件の下でのデータ収集が可能になっていることなどで¹⁰⁾、巨視的立場から、モンテカルロ法を適用した疲労寿命の推定が可能になると考えられる。

このような観点から、本研究では、伝播係数 C を空間的確率変数として扱い、比較的長い疲労亀裂について伝播抵抗の統計的解析モデルを仮定し、試験データから材料の統計的特性、例えば確率分布関数、自己相関関数あるいはパワースペクトル密度関数を推定することを試みる。さらに、得られた材料の統計的特性を用いた疲労亀裂伝播のシミュレーションにより疲労亀裂伝播寿命分布を推定し、疲労亀裂伝播に関する構造物等の信頼性を検討する方法を論じる。

2. 疲労亀裂伝播抵抗の統計的特性の解析方法

2.1 確率過程としての伝播抵抗係数

疲労亀裂伝播挙動を表すパラメータである疲労亀裂伝播速度 da/dN は、一般に、パリズ則⁷⁾

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1)$$

で表されることが多い。ここに、 a は亀裂長さ、 N は繰返し数、 ΔK は応力拡大係数範囲であり、 C, m は材料定数とされている(以下、 C を伝播係数、 m を伝播指数と呼ぶ)。

疲労亀裂伝播の統計的特性の解析モデルとしては、幾つかのモデルが挙げられるが^{10),20),21)}、(1)式を用い解析モデルを構成する際に、伝播係数 C と伝播指数 m の取り扱い方は、次の四つに分けられる。すなわち

- 1) C, m ともに定数とする⁷⁾(確定的モデル)；
- 2) C, m ともに確率変数とする^{2-6,14,15)}；
- 3) m は一定として、 C のみ確率変数とする¹¹⁻¹³⁾；
- 4) m のみ確率変数として、 C は定数とする。

このうち、1)は確定的モデルであるから、ここでは考えない。また、4)は例を見ない。

本研究では、解析を単純化するため伝播指数 m は亀裂伝播経路に沿ったあらゆる場所で一定とし、伝播係数 C のみを空間的確率変数と仮定する。これは、しばしば採られている仮定であるが、 m の変動を無視し得ないとの論議も見られる。本報告ではこの点については論じない。この仮定のもとに、疲労亀裂伝播速度 da/dN は一つの確率過程となり、次式のように表されることになる。

$$\frac{da}{dN} = C(x)(\Delta K)^m \quad (2)$$

ここに、 x は材料中の場所を表す変数である。

材料抵抗の特性を表すには、疲労亀裂伝播速度 da/dN よりも、Ortiz^{15,21)}らのようにその逆数、疲労亀裂伝播に対する材料の抵抗 dN/da (以下伝播抵抗と呼ぶことにする。)を取る方が妥当であろう。これは亀裂伝播経路に沿ったある位置での伝播抵抗はその点での亀裂伝播に対する材料強度そのものを表していると考えられるからである。すなわち、疲労亀裂伝播速度の変動の代わりに材料の伝播抵抗の変動を考えた方が、材料の強度の空間的分布を検討するという本旨に合っていると考えられる。そこで、(2)式を

$$\frac{dN}{da} = \frac{1}{C(x)(\Delta K)^m} \quad (3)$$

または、

$$\frac{1}{C(x)} = (\Delta K)^m \frac{dN}{da} \quad (4)$$

のように書き換える。

いま、 $1/C(x)$ を $Z(x)$ と書いて、

$$Z(x) = (\Delta K)^m \frac{dN}{da} \quad (5)$$

とする。以下、 $Z(x)$ 、即ち $1/C(x)$ を疲労亀裂伝播に対する材料の伝播抵抗係数(以下簡単に、伝播抵抗係数)と呼ぶことにする。

(5)式から分かるように、 $(\Delta K)^m$ を一定(m が一定との仮定の下で、 ΔK 制御疲労実験の場合に相当する)とすれ

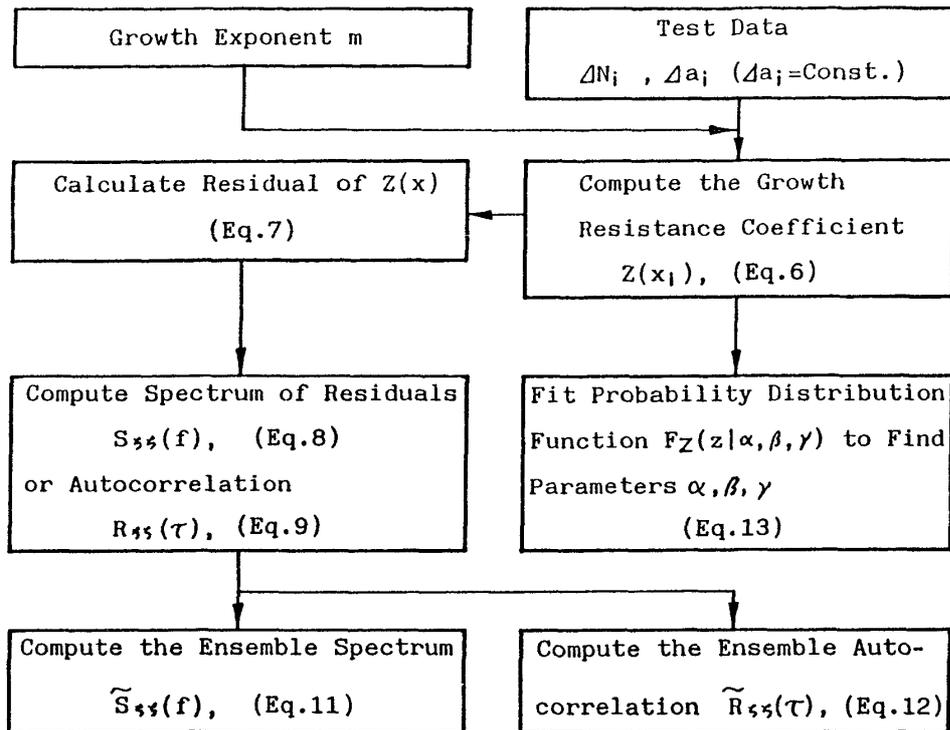


Fig.1 Outline of Statistical Analysis

ば、伝播抵抗係数 $Z(x)$ と dN/da の統計的性格は等価になる。したがって、そのような場合は確率過程 $Z(x)$ の特性は、疲労亀裂伝播速度の逆数を調べれば明らかとなる。

2.2 伝播抵抗係数 $Z(x)$ の統計的特性の解析方法

以下の伝播抵抗係数 $Z(x)$ の統計的特性の解析に際して、高速フーリエ変換を用いることとするので、亀裂長さ a が一定の長さ増すごとに(即ち、与えられた Δa ごとに)、繰返し数 N_i と亀裂長さ $a_i (i=1, 2, \dots)$ を記録する。亀裂長さ a_i における伝播抵抗係数 $Z(x_i)$ は

$$Z(x_i) = (\Delta K)^m \left(\frac{\Delta N}{\Delta a} \right)_i \\ = (\Delta K)^m \frac{(N_{i+1} - N_i)}{\Delta a} \quad (6)$$

として求める。ここに、 x_i は a_i の亀裂先端位置を表す。

$Z(x)$ の統計的特性の解析手順を Fig.1 に示す。各試験片ごとに、亀裂長さ a_i における伝播抵抗係数 $Z(x)$ の残差 ξ_i を、次式で求める。

$$\xi_i = Z(x_i) - (Z(x))_{i,\text{mean}} \quad (7)$$

ただし、 $(Z(x))_{i,\text{mean}}$ は各試験片ごとの $Z(x)$ の平均値、即ち local mean である。

ξ のパワースペクトル密度は次式で求まる。

$$S_{\xi\xi}(f) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \exp(-i2\pi f \frac{k}{n}) \right|^2 \quad (8)$$

ここに、 L は亀裂の伝播した距離、 f は空間周波数、 n は各試験片ごとのデータ数である。

残差 ξ の自己相関関数 $R_{\xi\xi}(\tau)$ は、次式で与えられる。

$$R_{\xi\xi}(\tau) = R_{\xi\xi}(j\Delta a)$$

$$= \frac{1}{(n-j)} \sum_{i=1}^{n-j} \xi_i \xi_{i+j} \quad (9)$$

ただし、 $\tau = j\Delta a$, j はラグ数である。

また、自己相関関数 $R_{\xi\xi}(\tau)$ は、 ξ のパワースペクトル密度関数 $S_{\xi\xi}(f)$ ((8)式) の逆フーリエ変換によっても求められる。

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} S_{\xi\xi}(f_k) \exp(i2\pi \tau \frac{k}{n}) \quad (10)$$

各試験片の解析から得た残差 ξ のパワースペクトル密度関数を平均して得られるアンサンブル (ensemble) パワースペクトル密度関数 $\tilde{S}_{\xi\xi}(f)$ として

$$\tilde{S}_{\xi\xi}(f) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [S_{\xi\xi}(f)]_i \quad (11)$$

を得る。ここに、 M は試験片本数である。

同様に全試験片による平均的自己相関関数 $\tilde{R}_{\xi\xi}(\tau)$ は、(11)式を(10)式に代入するか、あるいは次式より求める。

$$\tilde{R}_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [R_{\xi\xi}(\tau)]_i \quad (12)$$

さて、伝播抵抗係数 $Z(x)$ は、材料強度を表す一つのパラメータであるので、極値分布に従うと仮定するのは妥当であろう。ここでは、三母数のワイブル分布関数 $F_Z(z|\alpha, \beta, \gamma)$ を $Z(x)$ の確率分布関数として考える。即ち、

$$F_Z(z|\alpha, \beta, \gamma) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{z-\gamma}{\beta-\gamma}\right)^\alpha\right\} \quad (Z > \gamma) \quad (13)$$

とする。ここに、 α は形状母数、 β は尺度母数、 γ は位置母数である。これらの母数 α, β, γ は $Z(x)$ の全データを用いて直接探索 (Direct Search of Optimization) 法¹⁶⁾で定める。

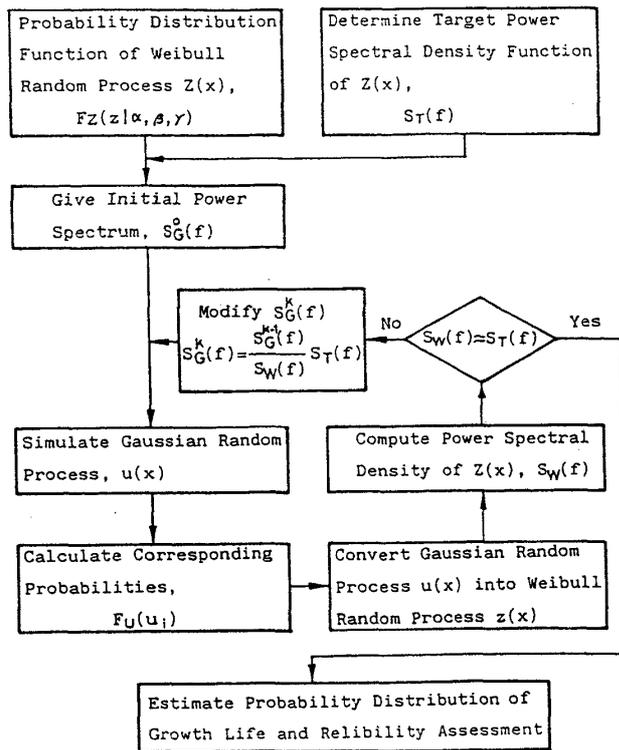


Fig.2 Flow Chart of Simulation of Resistance Coefficient

3. 伝播抵抗係数 $Z(x)$ のシミュレーション

統計的解析から得られたパワースペクトル密度関数を持ち、ワイブル分布に従う確率過程 $Z(x)$ のシミュレーションには、Shinozuka, Yamazaki らの方法⁹⁾を用いる。

以下に、そのシミュレーション法を簡単に述べる。Fig. 2に、伝播抵抗係数 $Z(x)$ のシミュレーションのアルゴリズムを示す。まず実験から得られたパワースペクトル $S(f)$ に基づいて目標 (target) パワースペクトル密度関数 $S_T(f)$ を決定する。適当なパワースペクトル $S_G(f)$ を使い、逆フーリエ変換によって正規確率過程 $u(x)$ を発生する。そのガウス分布 (分布関数を $F_u(u)$ とする。) に従うランダムデータ u を、次式によって、ワイブル分布 (分布関数 $F_z(z|\alpha, \beta, \gamma)$) に従うランダムデータ z に変換する (以下、これを分布変換と呼ぶことにする)。

$$z_i = F_z^{-1}\{F_u(u_i)\} \quad (i=1, 2, \dots, L) \quad (14)$$

ここに、 L は FFT の分割数である。

上式による変換は非線形変換であるので、変換によって得られた確率変数 z のパワースペクトル $S_w(f)$ は、目標パワースペクトル $S_T(f)$ とは必ずしも一致しない。目標パワースペクトルを得るために、 $S_G(f)$ を修正して同様の手順を反復する必要がある。この時、 $(k+1)$ 回目にガウス過程をシミュレートするのに用いるパワースペクトル密度 $S_G^{k+1}(f_i)$ ($i=1, 2, \dots, N$) を、次のように定める。

$$S_G^{k+1}(f_i) = \frac{S_G^k(f_i)}{S_w^k(f_i)} S_T(f_i) \quad (15)$$

ただし、 $S_G^k(f_i)$ は k 回目に用いたパワースペクトル密度、 $s_w^k(f_i)$ は k 回目に発生したワイブル分布に従うランダム変数 z から求めたパワースペクトル密度である。数回反復すれば、シミュレートしたワイブル分布に従う確率過程のスペクトルは、ほぼ目標スペクトルと一致するとされている。

4. 疲労亀裂伝播寿命分布の推定及び信頼性評価

シミュレーションから得られた確率変数 $Z(x)$ を使い、任意の亀裂長さ a に対する繰返し数 N を求めれば、 $a-N$ 関係が求められる。また、求めた $a-N$ 曲線から疲労亀裂伝播寿命分布の推定を行い、疲労亀裂伝播に対する構造物等の信頼性評価を行うことができる。

簡単のため、以下では、一定振幅の荷重下で、初期亀裂長さ a_0 から所定の亀裂長さ a_i まで伝播するのに要する期間を疲労亀裂伝播寿命とする。

4.1 疲労亀裂伝播寿命分布の推定

任意の亀裂長さ a_i ($i=1, 2, \dots, N$) に達する繰返し数 N_i は、シミュレートした確率過程 $Z(x)$ のデータ $Z(a_k)$ ($k=1, 2, \dots, i$) を使い、次式によって計算する。

$$N_i = \sum_{k=1}^i z(a_k) \frac{(\Delta a)_k}{\{\Delta K(a_k)\}^m} \quad (16)$$

ただし、 a_0 は初期亀裂長さ、 a_i は

$$a_i = a_0 + \sum_{k=1}^i (\Delta a)_k \quad (17)$$

である。

最終亀裂長さ a_i を適当に決め、確率過程 $Z(x)$ のシミュレーションを繰り返して、(16)式及び(17)式によって N と a を計算して、疲労亀裂伝播寿命分布の推定精度に応じて必要な数の $a-N$ 曲線を得る。

疲労亀裂伝播寿命分布の推定に際して、伝播抵抗係数 $Z(x)$ の確率分布特性を考慮して、三母数のワイブル分布関数 $F_N(n|\alpha', \beta', \gamma')$ を伝播寿命 N の確率分布関数とし、次式で示される。

$$F_N(n|\alpha', \beta', \gamma') = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{n-\gamma'}{\beta'-\gamma'}\right)^{\alpha'}\right\} \quad (n > \gamma') \quad (18)$$

ただし、 α' は形状母数、 β' は尺度母数、 γ' は位置母数である。母数 α', β', γ' の推定については、2.2 節の推定と同じように直接探索法を用いる。

4.2 信頼度と最小寿命

本研究では、構造物の使用期間 (n) 中に成長した亀裂長さ a が所定の亀裂長さ a_i より小さい確率を構造物の信頼度とする。信頼度 $R(n)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} R(n) &= P_r[a < a_i] \\ &= P_r[N > n] \\ &= 1 - F_N(n) \end{aligned} \quad (19)$$

ここに、 N は構造物の寿命である。

Table 1 Chemical Composition and Mechanical Properties

material	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	Al
A5086S-H1112	0.06	0.12	0.01	0.49	4.02	0.08	tr.	0.02	bal.
material	yield stress	tensile strength	elongation						
A5086S-H1112	100.0MPa	260.7MPa	31.0%						

Notch Detail

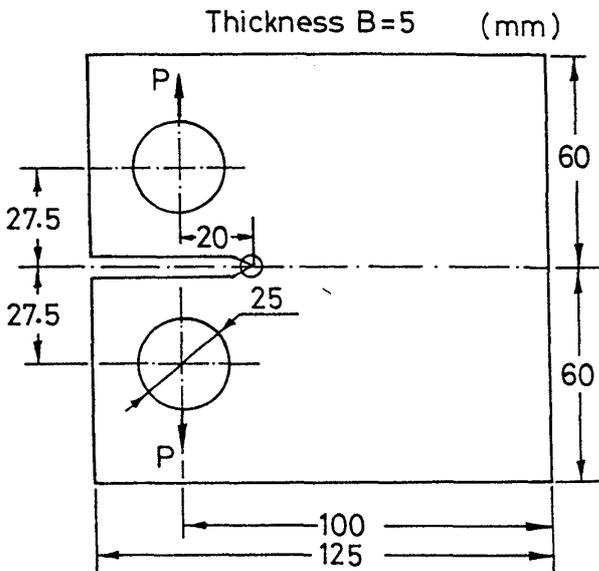
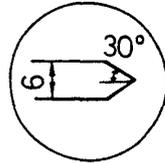


Fig. 3 Shape and Dimensions of Specimen

(18)式を(19)式に代入すると、信頼度は

$$R(n|\alpha', \beta', \gamma') = \exp\left\{-\left(\frac{n-\gamma'}{\beta'-\gamma'}\right)^\alpha\right\} \quad (n > \gamma') \quad (20)$$

である。上式により、構造物の所定信頼度 $R(n)$ に対する使用期間 n が得られる。

同式から明らかなように、もし γ' が存在すれば、 γ' は亀裂長さ a に達する時の伝播寿命の取りうる最小値 N_s であるから、 n がこの値以下であれば、象裂は決して長さ a に達し得ない。即ち、 $R(n)=100\%$ である。以下、 N_s を最小寿命と呼ぶことにする。

5. アルミニウム合金を用いた実験

以上に述べた方法の有効性を検証するために、本研究では、アルミニウム合金を使って疲労試験を行い、統計的解析を試みた。

5.1 試験方法

供試材料は、板厚 5 mm のアルミニウム合金材 A 5086 S-H1112 で、その化学成分と機械的性質を Table 1 に示す。試験片は、コンパクトテンション型(CT型)標準試験片で、

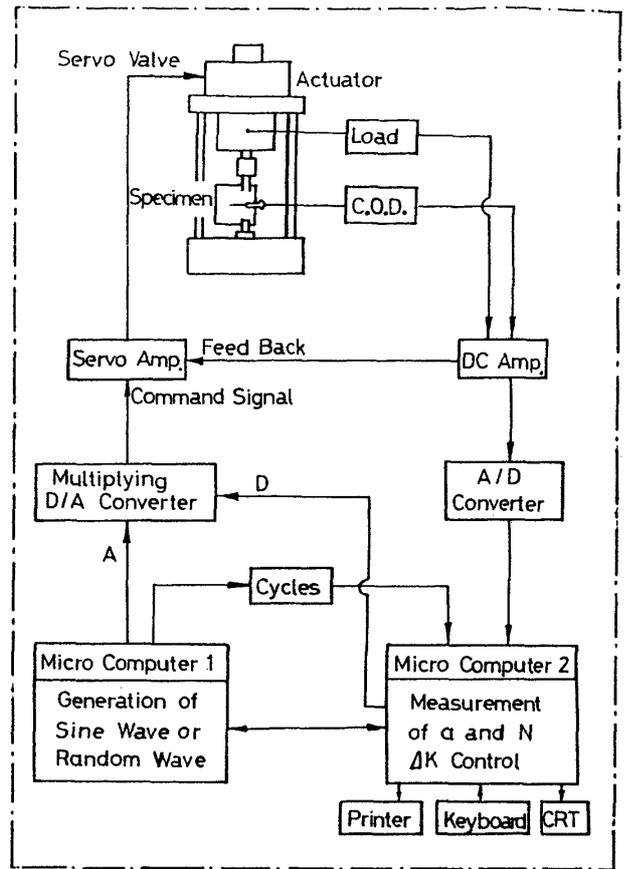


Fig. 4 Fatigue Test System

その形状及び寸法を Fig. 3 に示す。

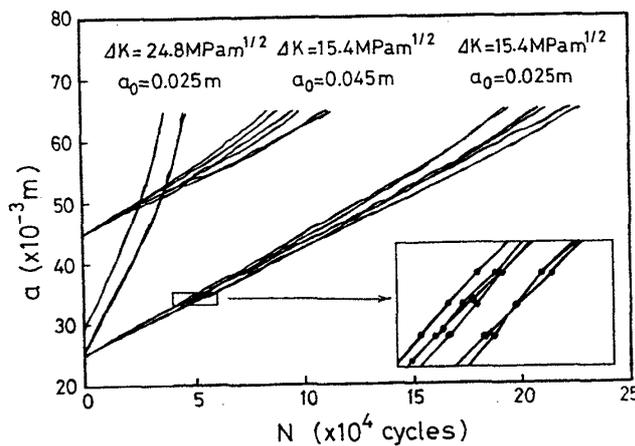
亀裂長さに依らず、疲労亀裂伝播速度あるいは材料の伝播抵抗に影響のある力学的条件を一定とし、かつ平均伝播抵抗あるいは平均伝播速度からの変動を同一条件下で調べるため、Fig. 4 に示す試験システムを構成し、 ΔK 値制御の疲労試験を行った¹⁷⁾。試験では、 ΔK 値をそれぞれ 15.4, 20.2, 25.3 MPa \sqrt{m} の三種とした。

試験システムは、電気油圧式サーボ疲労試験機と 2 台のマイクロコンピュータからなっている。1 台のマイクロコンピュータは荷重時刻歴を計算する。その荷重制御信号(アナログ信号)をもう 1 台のマイクロコンピュータ(以下、制御コンピュータと呼ぶことにする)中のマルチプライング D/A コンバータ(MDAC)に被乗数として入力する。MDAC への乗数は、制御コンピュータからの 12 ビットのデジタルデータであり、乗算結果の出力が、望みの ΔK レベルに対応する荷重を与えるように調節する(ΔK 制御)。また、亀裂開口変位は、COD ゲージによって計測する。COD 信号とロードセルの出力を、同時に AD 変換し、制御コンピュータに入力して、亀裂長さ、 ΔK 値の計算に用いる。

亀裂開口変位と荷重との関係 (V/P) より、亀裂長さ a を次式で求める¹⁸⁾。

Table 2 Test Condition and Results

Specimen No.	Crack Length ($\times 10^{-3}$ m)	thickness ($\times 10^{-3}$ m)	ΔK (MPa \sqrt{m})	mean da/dN ($\times 10^{-7}$ m/cycle)	C.O.V. (%)	1/C(a) ($\times 10^{10}$)
1	AL11	25-65	4.9	15.5	12.61	3.64
2	AL13	25-65	4.9	15.5	16.84	3.27
3	AL14	25-65	4.8	15.2	13.50	3.70
4	AL21	25-65	4.8	15.6	10.16	3.41
5	AL24	25-65	4.8	15.6	10.81	3.91
6	AL25	25-65	4.8	15.6	13.66	3.64
7	AL08	45-65	4.8	15.3	20.32	3.69
8	AL10	45-65	4.8	15.4	22.23	3.11
9	AL12	45-65	4.9	15.2	17.32	3.21
10	AL15	45-65	4.8	15.2	11.33	3.60
11	AL19	45-65	4.9	15.6	13.24	3.11
12	AL20	45-65	4.9	15.6	12.67	2.89
13	AL29	25-45	4.8	20.2	10.05	3.98
14	AL07	25-65	4.9	25.3	33.32	3.75
15	AL16	25-65	4.9	25.5	38.68	3.58
16	AL26	25-65	4.8	24.9	33.14	3.05

Fig. 5 $a \sim N$ Curves under Constant ΔK

$$\frac{a}{W} = C_0 + C_1 U_x + C_2 (U_x)^2 + C_3 (U_x)^3 + C_4 (U_x)^4 + C_5 (U_x)^5 \quad (21)$$

ただし,

$$C_0 = 1.0010, C_1 = -4.6695, C_2 = 18.460, \\ C_3 = -236.82, C_4 = 1214.9, C_5 = -2143.6,$$

$$U_x = \frac{1}{\left(\frac{BVE}{P}\right)^{1/2} + 1}$$

W は試験片の幅, B は板厚, E はヤング率, V は亀裂開口変位, P は荷重である。

また, 亀裂先端の応力拡大係数 K は次式によって求められる¹⁸⁾。

$$K = \frac{P \left(2 + \frac{a}{W}\right)}{B \sqrt{W} \left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}} \\ \left\{ C_0 + C_1 \frac{a}{W} + C_2 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + C_3 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + C_4 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right\}$$

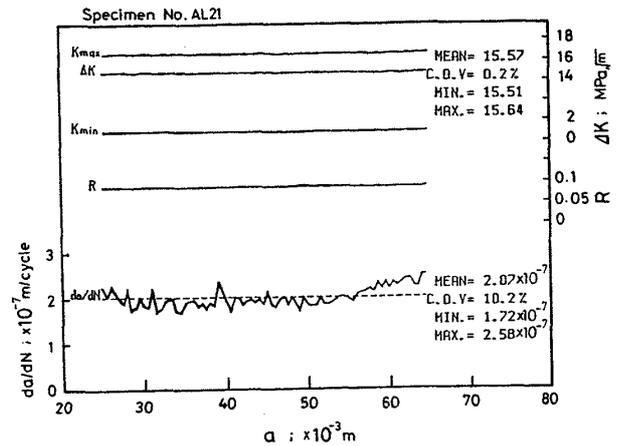


Fig. 6 Example of Test Results

ここに,

$$C_0 = 0.886, C_1 = 4.64, C_2 = -13.32, C_3 = 14.72, \\ C_4 = -5.6$$

である。

亀裂長さが 0.5 mm 増すごとに, 亀裂長さ a , 繰返し数 N , 亀裂開口変位 V , 最大, 最小荷重等のデータをファイルへ自動的に記録する。

5.2 試験結果と解析

試験条件と試験結果を Table 2 に示す。繰返し数 N に対して亀裂長さ a をプロットしたものを Fig. 5 に示す。同図から分かるように, $a \sim N$ 曲線はほぼ直線であるが, その傾きの相違から, 疲労亀裂伝播に対する材料の伝播抵抗の局部的平均値が試験片間で変動することが明らかである。また, 拡大図に示すように, $a \sim N$ 曲線が互いに交差していることがあるので, 試験片内にも材料の伝播抵抗の変動があることが分かる。これは, m が試験片ごとに変動するとも,

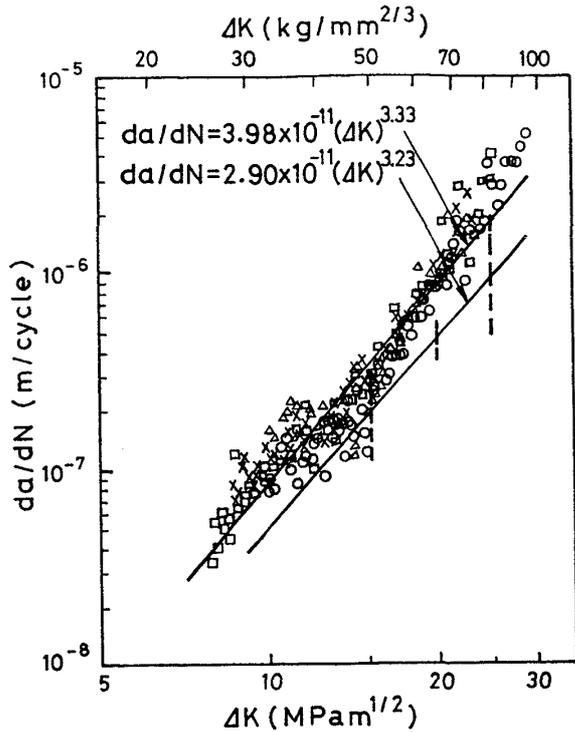
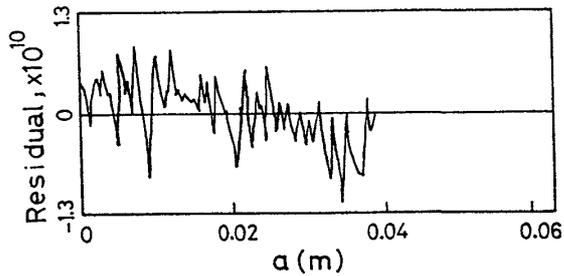
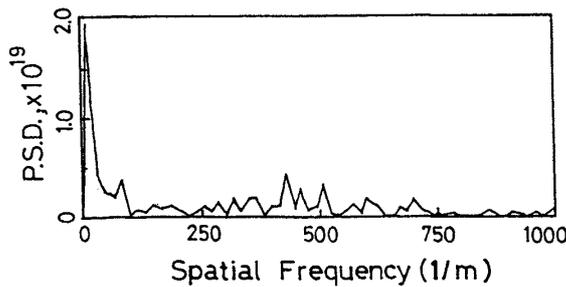


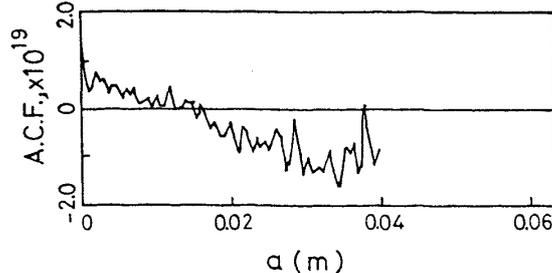
Fig. 7 Relation Between da/dN and ΔK



(a) Residual of $Z(x)$ for AL 21



(b) Power Spectral Density for AL 21



(c) Auto-correlation for AL 21

Fig. 8 Example of Analysis Results

また、 C が比較的ゆるやかな変動と、白色雑音の変動との両性格を有しているものとも考えられる。本研究におけるシミュレーションでは、 m を一定としているので、これらの変動は全て C に帰因するものとして扱う。

なお、試験片ごとの平均伝播抵抗は Table 2 に示すような試験片間の変動を示しているが、 $\Delta K = 15.4, 20.2, 25.3 \text{ MPa}\sqrt{m}$ の場合ではほぼ同様である。しかし、各試験片内の変動は $\Delta K = 25.3 \text{ MPa}\sqrt{m}$ の場合は $15.4 \text{ MPa}\sqrt{m}$ の場合に比べて甚だ大きい。亀裂経路の直線からのずれなども大きく、荷重が大き過ぎるようである。以下では、 $\Delta K = 15.4 \text{ MPa}\sqrt{m}$ のデータを主として利用して論ずることとする。

得られたデータの一例として、Fig. 6 に疲労亀裂伝播速度 da/dN を亀裂長さ a に対してプロットしてある。また、同図に応力拡大係数の最大値 K_{max} 及び最小値 K_{min} 、応力比 R 等もともに示す。図から分かるように、応力拡大係数の範囲 ΔK 値はよく制御されていて、その変動係数(C. O. V.)は 0.2% 程度である。それに比較すると、得られた伝播速度 da/dN の C. O. V. は 10.2% であり、大きく変動していることが分かる。なお、他のすべての試験で同様の図が得られている。

疲労亀裂伝播速度 da/dN と応力拡大係数範囲 ΔK の間の関係を Fig. 7 に示す。同図で、3本の垂直な短い点線は ΔK 値制御試験で得られた伝播速度の変動範囲を示し、荷重制御試験で得られたデータは試験片ごとに記号を替えてマークしてある。二つのデータグループの間には、多少の食い違いがあるが、その理由としては ΔK 値制御試験における荷重振幅低減によって、亀裂伝播に遅延効果が表れたと思われる。統計的解析とシミュレーションには、 ΔK 値制御試験から得られた伝播指数 m の値、3.23 を用いることとする。

試験データを用い 2.2 節で述べた解析を行った結果の一例として、疲労亀裂の伝播抵抗 $Z(x)$ の残差 ξ を亀裂長さ a に対してプロットしたものを Fig. 8(a) に示す。 ξ を FFT して得られたパワースペクトルと、 ξ の自己相関関数をそれぞれ Fig. 8(b) 及び(c) に示す。同様の結果が他の

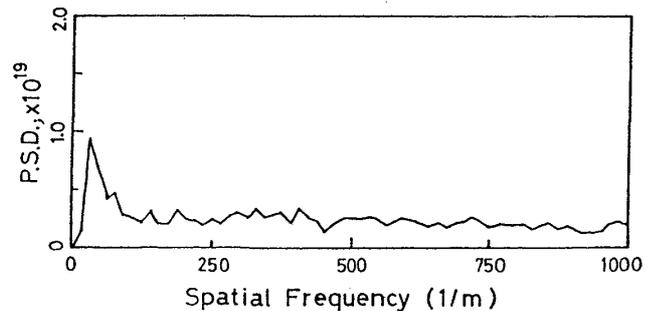


Fig. 9 Ensemble Power Spectral Density for $\Delta K = 15.4 \text{ MPa}\sqrt{m}$

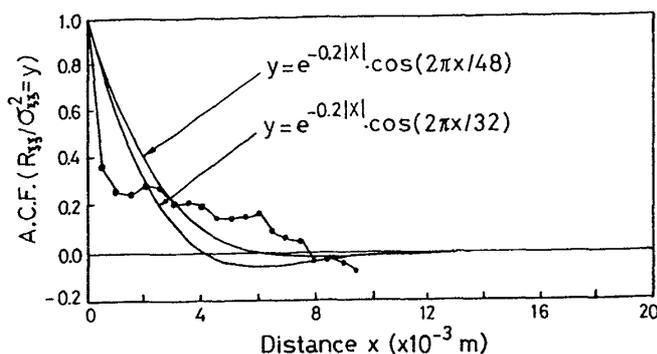


Fig. 10 Ensemble Auto-correlation Function for $\Delta K = 15.4 \text{ MPa} \sqrt{m}$

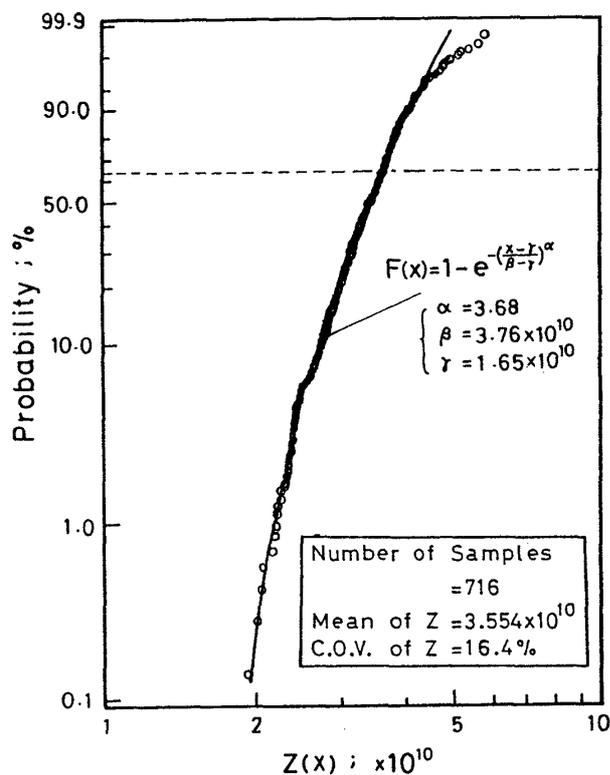


Fig. 11 Weibull Plot of $Z(x)$ for $\Delta K = 15.4 \text{ MPa} \sqrt{m}$

試験片についても得られている。

6枚の実験データ ($\Delta K = 15.4 \text{ MPa} \sqrt{m}$, $a_0 = 25 \text{ mm}$) から得られた平均パワースペクトルを Fig. 9 に示す。これは正弦波の上にホワイトノイズが乗っているような形をした波形のパワースペクトルと類似している。

自己相関関数についても、その結果を Fig. 10 に示す。自己相関関数が負になる部分があることと、Fig. 9 のパワースペクトル密度の形状とを考慮して、自己相関関数を指数余弦型の式で近似することとする。即ち、

$$R(\tau) = \exp\{-0.2|\tau|\} \cos(2\pi\tau f_0) \quad (23)$$

である。 f_0 を適当に定めた時の $R(\tau)$ の曲線を図中に示した。

伝播抵抗 $Z(x)$ の実験データをワイブル確率紙にプロットしたものを Fig. 11 に示す。同図からわかるように、実験

データは直線になっていない。これは、ワイブル確率分布関数の中に位置母数 (location parameter) γ を考慮しなければならないことを示している。

直接探索法を用い、実験データからワイブル確率分布関数 $F_z(z|\alpha, \beta, \gamma)$ ((13)式) の母数 α, β, γ を求めると、それぞれ 3.68, 3.76×10^{10} , 1.65×10^{10} となる。これらの数値を用いて、関数 $F_z(z|\alpha, \beta, \gamma)$ を計算し Fig. 11 に実線で示す。同図から分かるように、確率変数 $Z(x)$ はよくワイブル分布に従うといえよう。

6. シミュレーションの実行例と考察

シミュレーションの一例として、 $\Delta K = 15.4 \text{ MPa} \sqrt{m}$ の実験データから得られた確率分布関数 $F_z(z|\alpha, \beta, \gamma)$ と、パワースペクトル密度関数 $S_{ee}(f)$ を用い、3章に述べた方法で伝播抵抗係数 $Z(x)$ のシミュレーションを行った。また、シミュレーション結果による伝播寿命分布の推定と構造物の信頼性評価を行った。

6.1 入力データ

目標パワースペクトル密度関数 $S_r(f)$ を次式で与えられるとする。

$$S_r(f) = g \left\{ \frac{1}{g^2 + (2\pi(f+f_0))^2} + \frac{1}{g^2 + (2\pi(f-f_0))^2} \right\} \quad f \neq 0$$

$$= 0 \quad f = 0 \quad (24)$$

ここに、 $g = 0.2$, $f_0 = 1/32$ とする。

確率変数 $Z(x)$ の分布関数 $F_z(z|\alpha, \beta, \gamma)$ は、(13)式を用いた。母数 α, β, γ の数値は、それぞれ 3.68, 3.76×10^{10} , 1.65×10^{10} とした。

マイクロコンピュータのメモリサイズと演算速度を配慮し、FFT 時の分割数を 2048 とした。なお、亀裂長さ増分 Δa は 0.5 mm に固定する。従って、1回にシミュレートできる亀裂長さは 1024 mm である*1。

*1 疲労亀裂伝播寿命分布を推定するに際して、シミュレーションによる多数の $a-N$ 曲線を得るためには、伝播抵抗係数 $z(x_i)$ ($i=1, 2, \dots$) のシミュレーションを繰り返す必要がある。

シミュレーション長さが短いと、 $\Delta K, m$ と Δa が一定である場合、(16)式によって、

$$N(N_f) = \sum_{k=1}^{N_f} z(a_k) \frac{(\Delta a)_k}{\{\Delta K(a_k)\}^m}$$

$$= \frac{\Delta a N_f}{(\Delta K)^m} \sum_{k=1}^{N_f} \frac{Z(a_k)}{N_f}$$

$$= \frac{\Delta a N_f}{(\Delta K)^m} \bar{Z}(x)$$

のように得られる。ここに、 N_f は FFT の分割数である。

この場合の $a-N$ 曲線はジグザグな曲線であるが、 $\bar{Z}(x)$ は一定となるので、繰返し数 $N(N_f)$ も一定となり、寿命が変動しなくなり不都合である。従って、十分な長さのシミュレーションを行って、それを分割して $Z(x)$ のサンプル過程としなくてはならない。

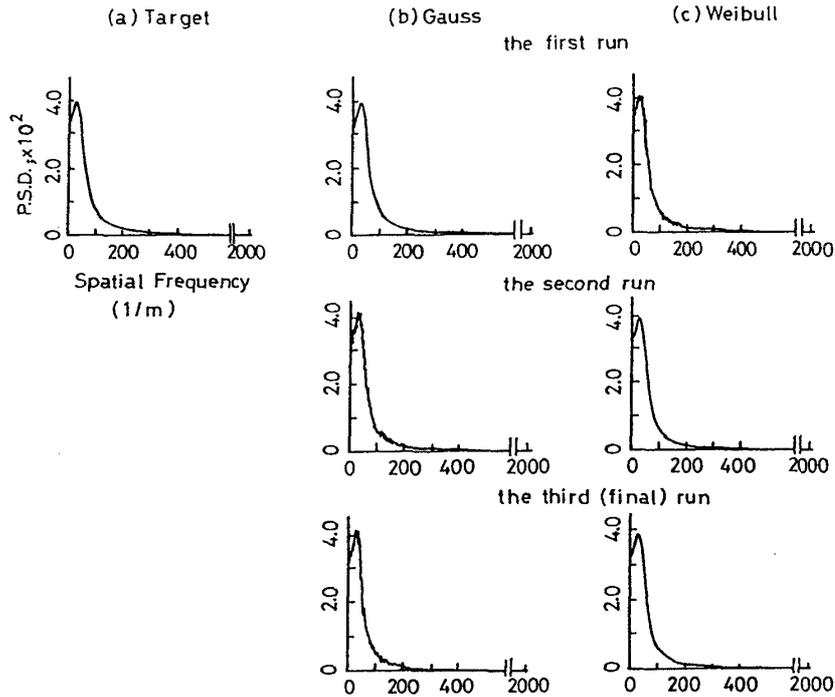


Fig. 12 Power Spectral Density Obtained by Simulation

- (a) Target Power Spectral Density
- (b) Power Spectral Density of Simulated Gaussian Process
- (c) Power Spectral Density of Simulated Weibull Process

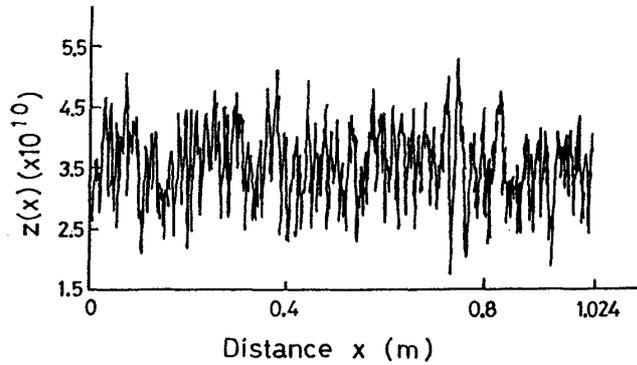


Fig. 13 Example of Simulated Weibull Process $Z(x)$

6.2 シミュレーション結果とその考察

シミュレートする確率過程 $Z(x)$ の目標パワースペクトル $S_r(f)$ を Fig. 12(a) に示す。また、同図(b), (c) に、それぞれガウス過程と、ワイブル分布に従う確率過程のパワースペクトルの収束状況を示す。図からわかるように、3回の分布変換をして得られたワイブル分布に従う確率過程のパワースペクトルは、ほぼ目標パワースペクトルと一致する。そこで、以後3回目に得られたワイブル分布に従うランダムデータを $Z(x)$ とする。シミュレートした $Z(x)$ の一例を Fig. 13 に示す。

シミュレーション結果を実験データと比較するため、シミュレートした $Z(x)$ のデータと、実験データから求めたワイブル分布関数とをワイブル確率紙上に一緒にプロットして示す(Fig. 14)。同図から分かるように、両者はよく一

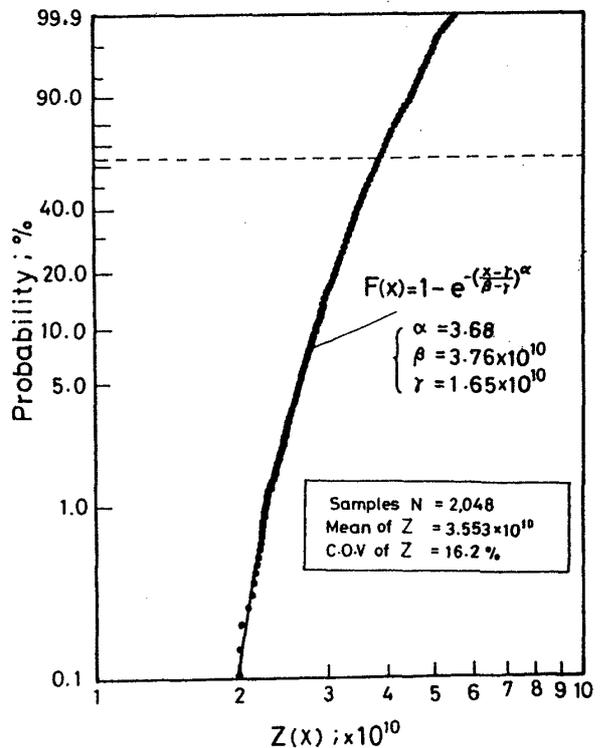


Fig. 14 Weibull Plot of Simulated $Z(x)$

致している。このことから、上述したシミュレーション方法は、非ガウス確率過程のシミュレーションに対してはかなり有効な手段であるといえよう。

シミュレートした $Z(x)$ のデータより、初期亀裂長さ a_0

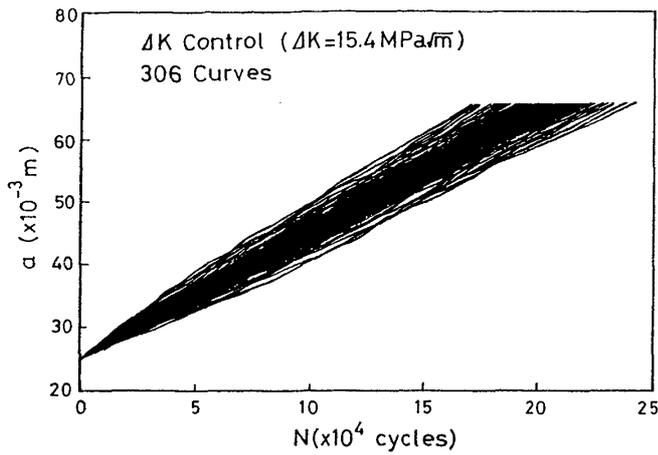


Fig. 15 $a \sim N$ Curves by Simulation under Constant ΔK

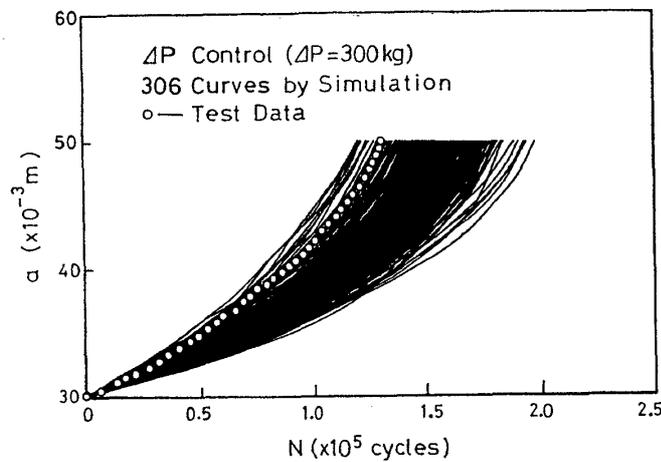


Fig. 16 $a \sim N$ Curves under Constant ΔP

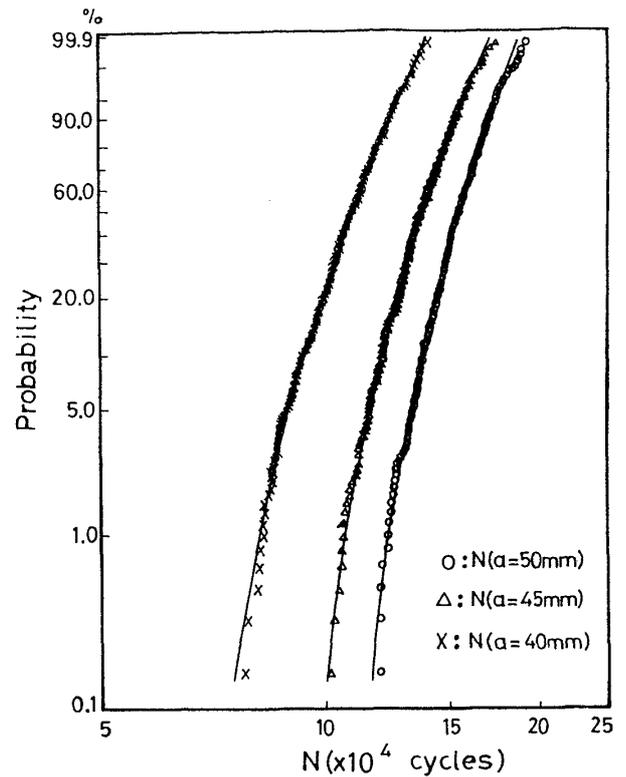


Fig. 17 Weibull Plot of Simulated Life

を与え、応力拡大係数範囲 ΔK を(22)式、亀裂長さ a を(17)式、繰返し数を(16)式によって求めて、 $a-N$ カープを得る。Fig. 15 に、 $a_0=25$ mm, $a_t=65$ mm, 306 標本の ΔK 制御 ($\Delta K=15.4$ MPa \sqrt{m}) における $a-N$ 曲線を示す。同図を Fig. 5 と比較すると、シミュレーションによる ΔK 制御の $a-N$ 曲線と実験データから直接プロットした $a-N$ 曲線とほぼ一致していることが分かる。また、初期亀裂長

Table 3 Reliability by simulation

crack length a ($\times 10^{-3}$ m)	distribution parameters			reliability R(n) (%)	fatigue life N_R ($\times 10^3$)	smallest life N_S ($\times 10^4$)
	α'	β ($\times 10^5$)	γ ($\times 10^4$)			
40	4.97	1.17	5.80	99.0	81	5.80 (5.53*)
				99.5	78	
				99.9	73	
				99.99	67	
				99.999	64	
45	4.65	1.47	8.44	99.0	108	8.44 (6.97*)
				99.5	104	
				99.9	99	
				99.99	93	
				99.999	90	
50	5.20	1.65	9.63	99.0	125	9.63 (7.88*)
				99.5	121	
				99.9	115	
				99.99	108	
				99.999	104	

* Calculated by eq.(25)

さ $a_0=30$ mm, 所定亀裂長さ $a_i=50$ mm, $\Delta P=300$ kg の荷重制御下の $a-N$ 曲線を実験データとともに Fig. 16 に示す。同図において, シミュレーションから得られた $a-N$ 曲線は実験データと少しずれが出ているが, これは 5.2 節に述べた ΔK 制御実験と荷重制御実験から得られたデータの食い違いのためであると思われる。

6.3 疲労亀裂伝播寿命の分布

上述したように, 疲労亀裂伝播に対する材料の伝播抵抗係数 $Z(x)$ のシミュレーションを繰返し, 荷重制御下の $a-N$ 関係を定める。得られた 306 本の $a-N$ 曲線 (Fig. 16) から, 所定亀裂長さ a_i がそれぞれ 40 mm, 45 mm, 50 mm に達した時の伝播寿命 $N(a)$ を求め, ワイブル確率紙上にプロットし (Fig. 17), (18) 式により 3 母数のワイブル分布関数 $F_N(n|\alpha', \beta', \gamma')$ で近似した。直接探索法を用い, 各分布関数の母数 α', β', γ' の数値を推定した結果を Table 3 に示す。所定の亀裂長さ a_i をパラメータとして, 関数 $F_N(n|\alpha', \beta', \gamma')$ を実線で Fig. 17 に示す。同図から分かるように, 疲労亀裂伝播寿命 $N(a)$ は 3 母数のワイブル分布 $F_N(n|\alpha', \beta', \gamma')$ に従うと考えられる。

6.4 構造物の信頼度と最小寿命

疲労亀裂伝播において構造物の要求信頼度 $R(n)$ を与えれば, 推定された疲労亀裂伝播寿命の分布関数 $F_N(n|\alpha', \beta', \gamma')$ を用い, (20) 式によって所定の信頼度 $R(n)$ に対応する伝播寿命 N_R が求められる。例として幾つかの計算値を Table 3 に示す。

4 章に述べたように, 所定の亀裂長さ a_i に達するのに必要な最小繰返し数 N_0 は, 推定された疲労亀裂伝播寿命の分布関数 $F_N(n|\alpha', \beta', \gamma')$ 中の γ' 値であるので, 初期亀裂長さ $a_0=30$ mm, 所定の亀裂長さ $a_i=40$ mm, 45 mm, 50 mm のに対して, この値を Table 3 中に示す。

また, 亀裂伝播経路に沿ったあらゆる場所において伝播抵抗係数 $Z(x)$ が最小値を取った時には, 最も亀裂伝播速度が最大となるので, その時の伝播寿命を N_0 とすれば, 寿命は N_0 を超えることはない。

$$N_0 = \sum_{k=1}^i \frac{\gamma \Delta a}{(\Delta K_k)^m} \quad (25)$$

従って, 理論上 $N_0=N_0$ となる。このように求めた寿命を, $a_0=30$ mm, $a_i=40, 45, 50$ mm の場合についても Table 3 に示す。

N_0 の値に比べれば, 上述のシミュレーションによって推定された最小寿命の数値, γ' の方が少し大きい, これは妥当である。このようなシミュレーション方法によって, 疲労亀裂伝播に関する構造物の最小寿命の予測が可能になるとと思われる。

7. 結 言

仮定した解析モデルのもとに, ワイブル分布に従う疲労亀裂伝播に対する材料の伝播抵抗係数 $Z(x)$ のシミュレ-

ーションによる信頼性評価法について検討し, アルミ合金を用いた ΔK 制御試験データから得た材料の統計的特性を用いた数値的実験に適用して得られた結果を要約すると以下のようになる。

(1) 伝播指数 m を亀裂伝播経路に沿ったあらゆる場所で一定とし, 伝播抵抗係数 $Z(x)$ を確率過程として取扱ひ, $Z(x)$ のシミュレーションによって疲労亀裂伝播寿命分布を推定する方法は, かなり有効な方法である。

(2) 統計的解析結果により, 疲労亀裂伝播に対する材料の伝播抵抗係数は 3 母数ワイブル分布に従う。

(3) 解析によって得られたデータは, 比較的長い疲労亀裂伝播のシミュレーションに用いる。

(4) この方法によれば少数の疲労試験のみで疲労亀裂伝播寿命分布を推定しうる。

(5) 最小寿命の推定が可能である。

(6) このような解析のためには ΔK 制御試験が適している。

なお, m が一定であるという仮定は, さらに検討すべき今後の課題である。

謝 辞

本研究に関し造船学会材料分科研究委員会 (主査東京大学町田 進教授) より貴重な御意見をいただいた。試験等において, 当時本学大学院生植木辰二君 (住友海上火災保険株式会社) らの協力を得た。また, この実験には軽合金構造協会の AK 委員会 (主査東京理科大藤田 譲教授) の御援助をいただいた。付記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 岡村弘之, 板垣 浩: 強度の統計的取扱ひ, 培風館, (1979).
- 北川英夫, 権 在度, ほか 2 名: 長期使用クロム・モリブデン鋼劣化材の疲労亀裂進展寿命予測 (第 1 報, 長期使用劣化材での疲労亀裂進展特性), 機論, 52-480 (昭和 61), 1749.
- 市川昌弘, 浜口光夫, 中村武夫: 疲労亀裂伝播法則 $da/dN=C(\Delta K)^m$ における m と C の確率特性, (2024-T 3 Al 合金), 材料, 33 (昭和 59), 8.
- 藤井 進, 中川隆夫, 橋本和彦: 疲労寿命推定へのベイズ論の応用, 機論, 45-393 (昭和 54), 516.
- Okamura, H., Watanabe, K. and Naito, Y.: Reliability Approach in Structural Engineering (A. M. Freudenthal et al. ed.), (1975), 243, Maruzen.
- 田中道七, 酒井達雄: 3 母数ワイブル分布の母数推定について (疲労寿命分布の母数推定に関連して), 材料, 28, (昭 54), 92.
- Paris, P. C. and Erdogan, F.: A Critical Analysis of Crack Growth Propagation, Trans, ASME J. Basic Eng. 85, (1963), 528.
- Itagaki, H. and Shinozuka, M., Application of the Monte Carlo Technique to Fatigue Failure Analysis under Random Loading, Special Technical Publication 511 ASTM, (1972), 168.

- 9) Yamazaki, F. and Shinozuka, M.: Digital Generation of Non-Gaussian Stochastic Fields, *Stochastic Mechanics*, 1, (1986), 211.
- 10) 例えば, 石川 浩, 鶴井 明: 進展抵抗の不規則性を考慮した疲労亀裂進展過程の確率モデル: 機論, 50-454, (昭和59), 1309.
- 11) Kozin, F. and Bogdanoff, J. L.: A Critical Analysis of Some Probabilistic models of Fatigue Crack Growth, *Eng. Fracture Mech.*, 14, (1981), 59.
- 12) Lin, Y. K. and Yang, J. N.: A Stochastic Theory of Fatigue Crack Propagation, *AIAA Journal*, 23-1 (1985), 117.
- 13) 木村雄二, 国尾 武: 疲労亀裂進展過程に表れる統計的変動の支配因子について, *材料*, 32, (昭和58), 1144.
- 14) Tanaka, S. Ickawa, M. and Akita, S.: Variability of m and C in the Fatigue Crack Propagation Law, *Int. J. Fracture*, 17, (1981), R121.
- 15) Ortiz, K. and Kiremidjian, A. S.: Time Series Analysis of Fatigue Crack Growth Rate Data, *Eng. Fract. Mech.*, 24-5, (1986), 657.
- 16) 武藤三郎, 杉江日出澄, 岡崎明彦, Fortran と数値計算法, 培風館, (昭和52).
- 17) Itagaki, H., Ishizuka, T., Huang, P. and Ueki, S.: Statistical Behavior of Fatigue Crack Growth in Aluminium Alloy, INALCO'88 Organizing Committee, Tokyo, (1988), 3-38.
- 18) Ashok Saxena, S. J. and Hudak, Jr.: Review and Extension of Compliance Information for Common Crack Growth Specimens, *Int. J. Fracture*, 14-5, (1978).
- 19) 板垣 浩, 石塚鉄夫, 関根 登, 持永圭一郎, ランダム荷重による疲労亀裂伝播, (第1報)小規模デジタルシステムによる試験, 日本造船学会論文集, 第159号, (昭和61), 385.
- 20) Spencer, B. F. and Tang, J.: Stochastic Modeling of Fatigue Crack Growth, *Probabilistic Methods In Civil Engineering*, ASCE 1852, New York, (1988).
- 21) Ortiz, K., Kung, C. J. and Perng, H-L.: Modeling Fatigue Crack Growth Resistance, dN/da , *Probabilistic Methods In Civil Engineering*, ASCE, 1852, New York, (1988).