(平成元年 11 月　日本造船学会秋季講演会において講演)

追波中の船の大振幅前後揺れと波乗り現象
(その 3　位相面解析による検討)

正員 菅　　信*

Surging of Large Amplitude and Surf-riding of Ships in Following Seas
(Part 3　Phase Plane Analysis)

by Makoto Kan, *Member*

Summary

In the previous papers, the surf-riding of a ship in the regular following waves was examined by the self-running model tests[5),6)] as well as the numerical simulations[7)]. It was clarified that the surf-riding occurs when the ship speed including the steady oscillatory component due to the surging motion, after the decay of the transitional motion, reaches the phase velocity of the wave. The numerical simulation showed that concerning the occurrence of the surf-riding there exist three ranges of the ship speed for the fixed wave condition. Under the critical speed V_{1cr}, the ship never makes the surf-riding but invariably makes the periodic surging motion. At the speed between V_{1cr} and another critical speed V_1, the ship sometimes makes the periodic surging motion and sometimes makes the surf-riding motion. Which motion occurs is dependent on the initial conditions of the ship position relative to the wave trough and the surging velocity of the ship. Over the critical speed V_1, the ship always drops into the surf-riding condition. It was also shown that for the low wave height, the critical speed V_{1cr} coincides with another critical speed V_1. It was not clarified how the critical speed V_1 appears.

In order to make clear totally the non-linear phenomenon like the surf-riding, it is not sufficient to repeat the numerical simulations for the various initial conditions. It is necessary to use the common method of a phase plane analysis for the non-linear ordinary differential equation which expresses the surf-riding motion. In the present paper, the author examines the mechanism of the surf-riding by means of the phase plane analysis and clarifies how the speed range is separated into three parts and how the wave parameter affects the separation. The method is presented to obtain the above critical speed V_1, which may be termed as the unconditional critical speed for the occurrence of the surf-riding. It is important to know the speed at which the ship can escape from dangerous surf-riding condition. The speed is named as the pull out speed following the analogy with the pull out torque of the synchronous motor, and the chart to obtain the pull out speed is also presented. Showing the analogy with other physical phenomena such as the Josephson effect in the superconductivity, the synchronous motor and the driven damped pendulum, the surf-riding is suggested to be one of the fundamental non-linear phenomenon in the physical science.

1. 緒　　　言

追波中の船の波乗りは，操縦不能から転覆にまで至る危険性のある，いわゆるブローチング現象と深い係わりがありその発生のための必要条件の一つと考えられている[1)~4)]。著者らは先に，この波乗り現象発生のメカニズムを模型実験により調べ，前後揺れによる速度変動を含む船の速度が波の位相速度に等しくなったときに波乗り状態になるらしいことを示した。また前後揺れ運動方程式の解析的な検討により，過渡状態を過ぎて定常状態になっている船の速度が波の位相速度に等しくなるようなときには前後方向の力の釣合条件が静的に満たされるようになるため，一旦この状態になるとその後はこの静的な釣合状態から変化できなくなることをもって波乗りの発生を説明できるとし

＊ 船舶技術研究所

た[5),6)]。しかしこの説明だけでは波乗りの発生や安定性を動的な過程を含めて明らかにする点で不十分である。そこで，前報[7)]では波乗り現象を適切に表していると考えられる運動方程式を導いて数値シミュレーションを実施し，波乗りの発生に関する上の条件が正しいことを確認するとともに，波乗りのメカニズムについての理解を深めることができたと考えている。

しかし波乗りの発生が初期条件によって左右される場合があるなどの新しい事実も明らかになり，波乗りが完全に解明されたといえる状況ではない。初期条件を種々に変えたシミュレーションを繰り返すだけでは非線形現象を大局的に明らかにする点で不充分であり，本報では，非線形振動を扱う一般的手法である位相面解析を波乗りの解析に応用することにより，そのメカニズムを更に明確にすることを試みたものである。また，前報でその存在が明らかになった無条件で波乗りが発生するようになる限界速度や，波乗り状態から脱出する限界の速度について検討し，それらを求めるための図表を示した。最後にジョセフソン効果のような他の物理現象との類似性を明らかにし，波乗り現象が非線形現象として基本的なものの一つであることを示した。

2. 波乗りの運動方程式

Fig. 1 に示すように空間固定座標系を $o\text{-}xyz$ とし，x 軸の正方向に進む波の波面 ζ を次のように表す。

$$\zeta=-\zeta_a\cos(kx-\omega t) \qquad (1)$$

ここに ζ_a は波の振幅，k は波数 ($=2\pi/\lambda$, λ は波長)，ω は波の円周波数である。x 軸の正方向に速度 V (あるプロペラ回転数に対応する船の平水中速度) で移動する座標系を $o'-\xi\eta\zeta$ とし，この座標系は $t=0$ で空間固定座標系 $o-xyz$ と一致しているものとする。船体固定座標系を $O-XYZ$ とし，動座標系 $o'-\xi\eta\zeta$ から見た ξ 軸方向の船の変位すなわち前後揺れの変位 $o'O$ を，$t=0$ で ξ_0 (初期変位)，$t=t$ で ξ とすると追波中の船に働く前後揺れの強制力 F と前後揺れの運動方程式はそれぞれ次式のように表される[7)]。

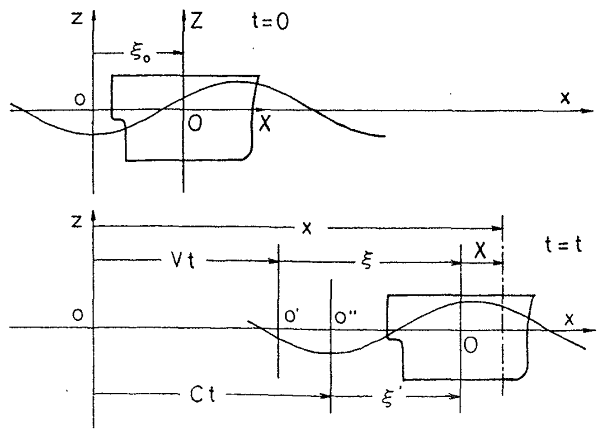

Fig. 1 Coordinate system

$$F=F_a\sin(\omega_0 t-k\xi) \qquad (2)$$

$$d\dot{\xi}/dt+A\dot{\xi}=E\sin(\omega_0 t-k\xi) \qquad (3)$$

ここに F_a は前後揺れ強制力の振幅であり，ω_0 は波の位相速度を C として

$$\omega_0=\omega(1-V/C) \qquad (4)$$

である。また船の時々刻々の速度を v とすると

$$v=V+\dot{\xi} \qquad (5)$$

で表されるが，船の推力 T, 抵抗 R を

$$T=T_0+T_1 v, \qquad R=R_0+R_1 v \qquad (6)$$

と表したとき

$$\left.\begin{aligned}&A=\{R_1-T_1\cdot(1-\tau)\}/M>0\\&E=F_a/M>0\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

である。なお，$T_0=T(v_0)-dT(v_0)/dv\cdot v_0$, $R_0=R(v_0)-dR(v_0)/dv\cdot v_0$, $T_1=dT(v_0)/dv$, $R_1=dR(v_0)/dv$ であり，$dT(v_0)/dv$ はプロペラ回転数を一定に保って速度だけを変えた場合の微分である。v_0 は考えているプロペラ回転数での平水中速度，あるいは波乗りを考えるのであれば波速とかを取ればよいであろう。また，$(1-\tau)$ は推力減少係数，M は船の質量である。

次に波速 C で x 軸の正方向に移動する動座標系 $o''-\xi'\eta'\zeta'$ を導入し，この座標系の原点すなわち波の谷から測った船の変位を ξ' とすると，

$$\xi=\xi'+(C-V)t \qquad (8)$$

の関係があるから (8) 式を (2) 式と (3) 式に代入して，前後揺れ強制力および前後揺れ運動方程式が

$$F=-F_a\sin k\xi' \qquad (9)$$

$$d\dot{\xi}'/dt+A\dot{\xi}'+E\sin k\xi'=A\cdot(V-C) \qquad (10)$$

の形で得られる。

(3) 式が t を陽に含む非自律系の表示であるのに対し，(10) 式は，t を陽には含まない自律系の表示に変換されているほか，(3) 式の強制力が (10) 式では復原力に相当する項に移り，(3) 式の減衰力項から (10) 式の右辺の直流強制力に相当する項が出てきていると見なすことができる。波乗りを考えるには (3) 式より (10) 式の表示式が適していることは前報[7)]で示した通りである。

なお以上の議論で強制力には船体による波の散乱等は無視したフルード・クリロフの仮定を用い，船のトリムや沈下等前後揺れ以外の運動は無視し，更に船型は前後対称を仮定するほか，波の波長は船の長さ L の 1/2 程度より長いものを考えている。

3. 波乗りの位相面解析

前報[7)]では，(10) 式で表されるような非線形常微分方程式を数値シミュレーションで解いて波乗りの挙動を調べた訳であるが，同一の波浪条件と航走条件にもかかわらず波乗りと周期的前後揺れという 2 つの安定状態が存在してそのどちらに落ち着くかは初期条件によって左右される場合

のあることが判った。しかし種々の初期条件のもとにタイムシミュレーションを繰り返すだけでは，この現象を全体として把握するのに適切な方法とは云えない。このような場合には非線形振動を調べる一般的な手法である位相面解析を行なうことによって，複数の安定解へ導く初期条件の吸引域を特定することを含め，この非線形現象の挙動を大局的に明らかにすることができる。

位相面解析については，非線形振動の教科書[8]に詳しいのでここではその説明は省略して，前回シミュレーションを実施した船について，同じ条件で位相面解析を行なった結果について示す。即ち，底曳網漁船の 1/12 模型について，$\lambda/L=1.5$, $h/\lambda=1/20$($h=2\zeta_a$, 波高) の場合の結果を Fig. 2～Fig.6 に示してある。この波浪条件の場合，平水中速度 $V<V_{lcr}(=1.683\ \mathrm{m/s})$ の範囲では絶対に波乗りは発生しないが，$V>V_l(=1.759\ \mathrm{m/s})$ の範囲では必ず波乗りになり，また $V_{lcr}\leqq V\leqq V_l$ の範囲では波乗りになるか周期的な前後揺れになるかが初期条件により左右されるということが前回のシミュレーション結果で判っている。

Fig. 2 は $V=1.40\ \mathrm{m/s}$ の場合の結果である。横軸は波速 C で移動する座標系で，波の谷から測った前後揺れの変位 ξ'/λ, 縦軸は前後揺れの速度 $\dot{\xi}'$ である。横軸は，$-0.5\leqq\xi'/\lambda\leqq0.5$ の 1 波長分の範囲を示せば良い筈であるが，3 波長分程度を示した方が判りやすいこともあると考えて，そのような表し方とした。図の四角の領域の周辺上の縦 15 等分，横 30 等分した各点を初期条件として(10)式を前報と同じ方法で数値的に解き，領域内に含まれる部分を解軌跡の曲線群として示したものである。この図の場合はどのような初期条件で出発しても，解軌跡は全て負の ξ'/λ の方向へ流れてゆき，最終的には黒く密集した正弦波状の解軌跡に吸引されていっており，波に追い越されての周期的前後揺れになっていることが判る。

Fig. 3 は $V=1.683\ \mathrm{m/s}$（＝低速側波乗り限界速度 V_{lcr}）の場合の結果である。波乗りの平衡点が $\xi'/\lambda=-0.25$ で安定平衡点（スパイラル，渦状点などと呼ぶ）と不安定平衡点（サドル，鞍部点）が一致している場合である。解軌跡の大部分は，負の ξ'/λ の方向へ流れてゆき，Fig. 2 と同様に波に追い越されての周期的前後揺れになっているが，初期条件が極く一部の吸引領域（点線で囲まれた領域）にあるときのみ，波乗りの安定平衡点に解軌跡が吸引されている。この吸引領域の境界（点線で示した曲続）はセパラトリックス（分離枝）と呼ばれるもので，通常サドルと呼ばれる不安定平衡点を通る複数の解軌跡の一部で構成されるものである。

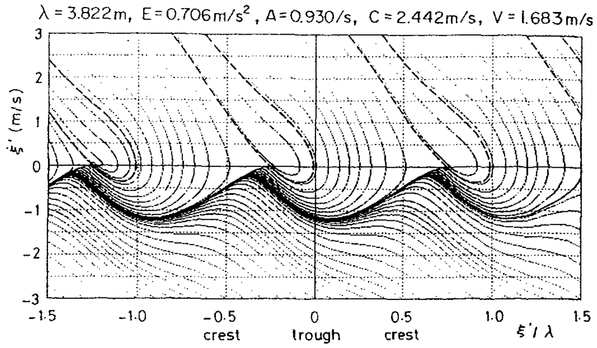

Fig. 3 Phase plane portrait ($V=1.683\ \mathrm{m/s}$)

前報のシミュレーションとの対応を考えて $V=1.683\ \mathrm{m/s}$ について示したが，実は上の説明は正確ではない部分がある。即ち，本例の場合 $C=2.442\ (\mathrm{m/s})$, $E=0.706\ (\mathrm{m/s^2})$, $A=0.930\ (1/\mathrm{s})$ であるから，V_{lcr} の値は厳密には $V_{lcr}=C-E/A=1.6828\cdots\mathrm{m/s}$ であって，Fig. 3 の例は正確には $V=V_{lcr}$ ではなく，$V>V_{lcr}$ の例である。もし正確に $V=V_{lcr}$ の場合を計算することができれば，その場合は安定平衡点と不安定平衡点が厳密に一致した場合で位相平面上の特異点はサドルやスパイラルではなくカスプ（尖点）と呼ばれるものとなり，安定平衡点に解軌跡を吸引する領域は存在しない筈である。Fig. 3 のように極く僅かな差で安定平衡点への吸引域が現れたことは，この現象の境界付近での微妙さを示していると云えよう。

Fig. 4 は $V=1.750\ \mathrm{m/s}$ の場合の結果である。$V<V_l$ の範囲であるから 2 つの安定解が存在する速度領域であるが，V_l にかなり近いことから，安定平衡点 $\xi'/\lambda=-0.183$ への吸引域が拡がり $\dot{\xi}'>0$ では周期的前後揺れに吸引される

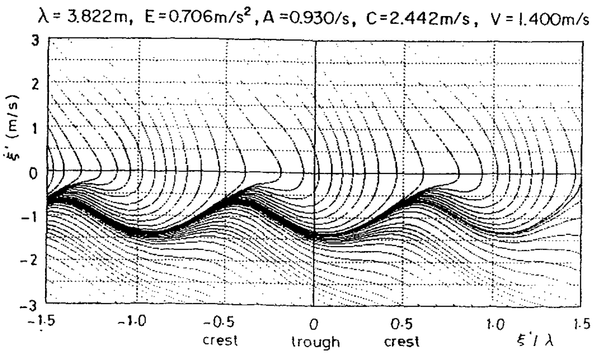

Fig. 2 Phase plane portrait ($V=1.400\ \mathrm{m/s}$)

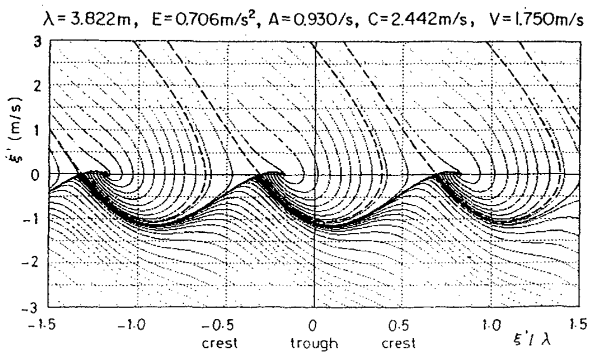

Fig. 4 Phase plane portrait ($V=1.750\ \mathrm{m/s}$)

領域はかなり狭くなっていることが判る。なお，セパラトリックスは不安定平衡点($\xi'/\lambda=-0.317$, $\dot{\xi}'=0$)の近傍を初期条件とし時間をさかのぼって($dt=-0.01$ secなどとする)，(10)式を解くことにより求めることができる。

位相平面上の波乗りの安定平衡点は，セパラトリックスで囲まれた領域内の解軌跡がすべてその点に吸引されるポイントアトラクターである。また過渡状態が減衰したあとの定常的な周期的前後揺れの解軌跡（図の$\dot{\xi}'<0$の半平面で解軌跡が密集して黒くなっている部分）は周期解がすべてそこへ吸引される周期的アトラクターであるが，一種のリミットサイクルと考えてよいものであろう。

Fig. 5は$V=1.905$ m/sの場合の結果である。$V>V_t$の範囲であるから，初期条件によらず必ず安定平衡点$\xi'/\lambda=-0.125$に吸引されることになる。不安定平衡点$\xi'/\lambda=-0.375$を通る解軌跡は，セパラトリックスであるが，この場合はFig. 3やFig. 4のような2つの安定解の吸引域の境界ではなく，前後の波を含めどの波で波乗りになるかを決める境界線になっている。

Fig. 6は$V=C(=2.442$ m/s)の場合の結果である。初期条件によらず必ず安定平衡点$\xi'/\lambda=0$で波乗りになる場合であり，安定解が1つだけである点でFig. 5の場合と本質的には違わないが，原点に関して180°の回転対称な解軌跡になっている。波乗り状態の船に前後方向の衝撃を与えると，1つ先または後ろの波まで移動してそこで再び安定した波乗りになるという現象をDu Cane等[9]は模型実験で観察しているが，Fig. 6からそのことは良く理解される。Fig. 5の場合も同じである。しかしFig. 4の場合には前進方向に与える衝撃に対してはかなり大きな衝撃を与えないと前の波には移らず，また後進方向に与える衝撃に対しては，比較的小さな衝撃でも波乗りを脱出して，周期的な前後揺れに変り易くなることが判る。

$V>C$の場合は上で示した$V<C$の場合の図で$|V-C|$が等しいものを，原点に関し180°回転させたものになる。

4. 無条件波乗り限界速度 V_t

$V_{tcr}\leqq V\leqq V_t$では上で見たように，2つの安定な解が存在し，どちらの解に落ち着くかは初期条件によって決まる。また$V>V_t$では初期条件によらず波乗りが発生するので，このV_tを無条件波乗り限界速度と呼ぶことにする。V_tの性質について調べた結果の例をFig. 7～Fig. 10に示す。なお，波強制力は波高に比例すると仮定している。

Fig. 7は$\lambda/L=1.5$の場合の例で，前報[7]からの再録であるが，初期条件により波乗りの発生が左右される領域IIが，$h/\lambda=1/30$程度のところから現れている。Fig. 8は$\lambda/L=2.0$の場合であるが，領域IIの現れ始める場所が$h/\lambda=1/20$程度のところまで高くなっている。Fig. 9は$\lambda/L=3.0$の場合であるが，一見領域IIがなくなっているように見える。しかしこれは領域IIの現れ始める場所が$h/\lambda=1/8$程度のところまで高くなって図の範囲からはみだしてしまっただけで，そのような波の存在とか強制力が波高に比例するかどうかは別問題として，やはり領域IIは波高の高い方で存在している。Fig. 10は$\lambda/L=1.5$であるが，水深$H=0.604$ m($H/d_a=2.0$, d_aは船の吃水）の場合の例で，Fig. 7の$H=\infty$の場合とは異なる結果であり，$h/\lambda=1/10$では平水中船速が零でも波乗りの発生がありうることも示している。

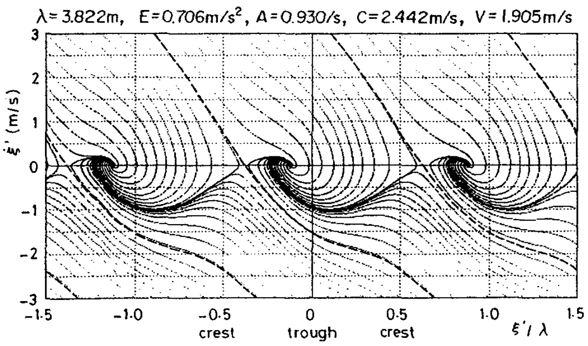

Fig. 5 Phase plase portrait ($V=1.905$ m/s)

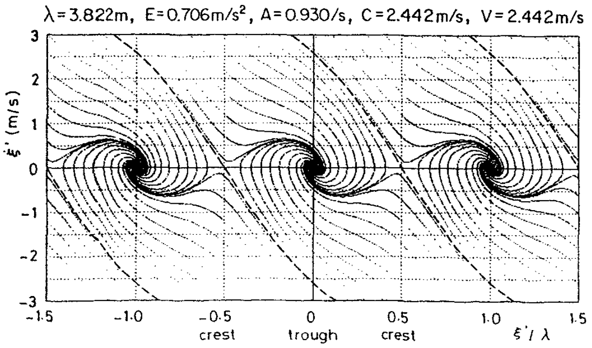

Fig. 6 Phase plane portrait ($V=2.442$ m/s)

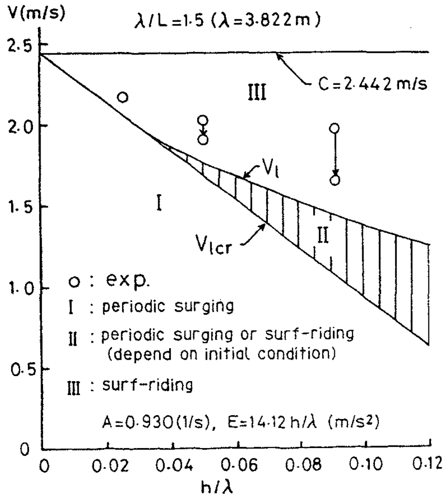

Fig. 7 Critical speed and wave height ($\lambda/L=1.5$, $H=\infty$)

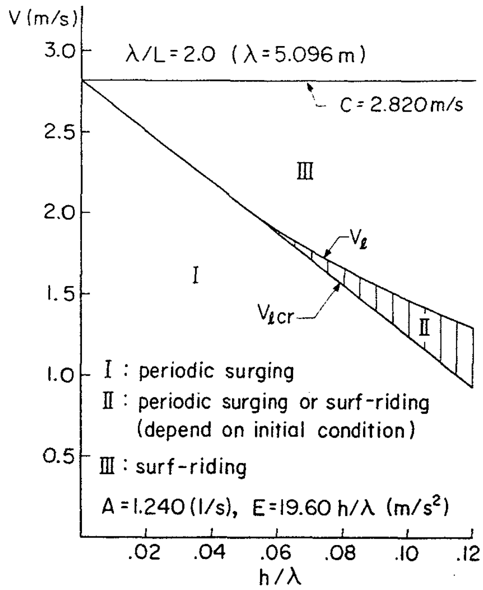

Fig. 8 Critical speed and wave height ($\lambda/L=2.0$, $H=\infty$)

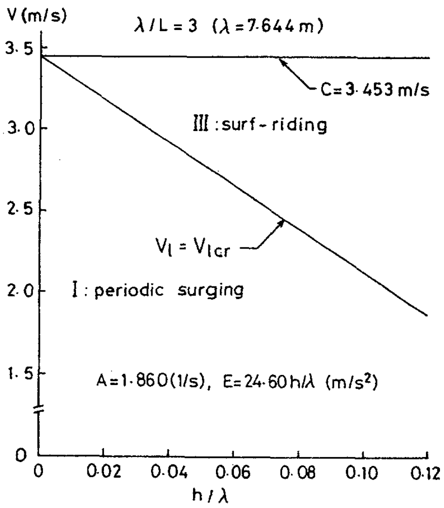

Fig. 9 Critical speed and wave height ($\lambda/L=3.0$, $H=\infty$)

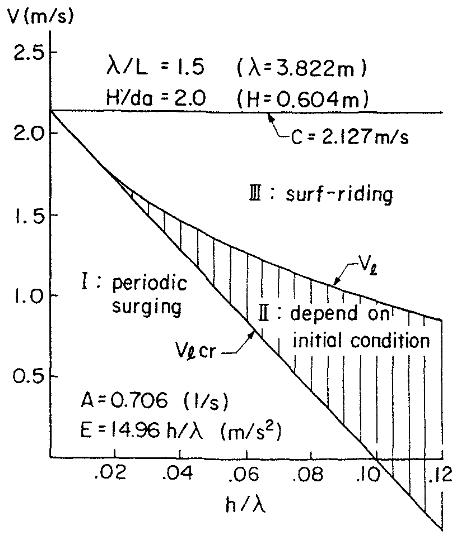

Fig. 10 Critical speed and wave height ($\lambda/L=1.5$, $H/d_a=2.0$)

なお，本文では特に断らない限りは水深無限大の場合を扱っているものとする。

以上はすべて，位相面解析を試行錯誤的に繰返して数値的に V_l を求めたものであるが，波長，波高，水深が変るたびに試行錯誤でこれを求めるのは煩雑である。もっと一般的に利用できる方法が可能であり，それを以下に述べる。

(10)式を解くためには，まず波長 λ を決めて，波数 k と波速 $C=(g\lambda/2\pi)^{1/2}$ を決め，次いで $A=0.156\,C^2$ により A の値を決める[7]。次に波高 h を決めると強制力 E が決まり，最後に V を与えるという手順で結局3つのパラメーターを与えていることになる。しかし次のような変数変換によりパラメータを2つに減らすことができる。即ち

$$k\xi'=\eta \tag{11}$$

$$t=s/(Ek)^{1/2} \tag{12}$$

により前後揺れの変位 ξ' を η に，また時間 t を s に変換すると，(10)式は結局

$$d^2\eta/ds^2+\beta\cdot d\eta/ds+\sin\eta=\alpha \tag{13}$$

となる。但し

$$\alpha=A\cdot(V-C)/E \tag{14}$$

$$\beta=A/(Ek)^{1/2} \tag{15}$$

である。

β を与えたときに波乗り状態の解に相当する1つの安定解しか存在しなくなる限界の α の値 α_l を，一度(13)式について上と同様の位相面解析で求めておけば，その β と α_l の関係は，どのような場合にも一般的に使える関係であり，利用価値は少なくないであろう。結果を，Fig. 11 に示しておく。$\alpha=-1$ が $V=V_{lcr}$ に，$\alpha=0$ が $V=C$ に対応していることは明らかであり，Fig. 7 等で示した領域に対応する領域を Fig. 11 にも書入れてある。長波長では A が大きくなって，k が小さくなるし，また低波高では E が小さくなり，いずれの場合も(15)式で β が大きくなる。Fig. 7〜Fig. 10 で低波高或いは長波長で領域IIがなくなったのは，Fig. 11 から明らかなように $\beta>1.2$ 程度では領域IIが消えてしまうことに対応していることが判る。

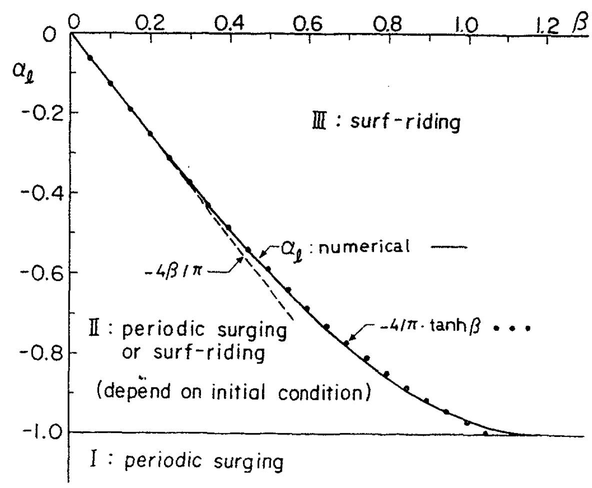

Fig. 11 Chart of $\alpha_l-\beta$

先の位相面解析結果の図，とくにFig.4の $V=1.750$ m/sの例をみると，これは $V_l(=1.759\ \mathrm{m/s})$ に近い場合であるが，初期条件によらず波乗りが発生するようになる限界は，位相面の周期的アトラクターの $\dot{\xi}'$ の最大値が $\dot{\xi}'=0$ に達するようになる場合であることが推定できる。またこの限界では，隣り合うセパラトリックス同志がつながって $\dot{\xi}'<0$ の下半面では無限に連結した鎖のようになること，またその鎖はその場合の周期的アトラクターに一致することが推定できる。そしてこの限界を少しでも越えると，セパラトリックスの鎖は切れてFig.5に示したように逆時間方向 $(\dot{\xi}'\to-\infty, \xi'/\lambda\to\infty)$ に無限に伸びるようになることが推定される。以上の推定が正しいことを確認するため，限界付近のセパラトリックスの挙動を表した例をFig.12に示す。

上で述べたことをまとめると限界の α_l を決める条件は「(13)式の周期解の終状態を表す周期的アトラクターがセパラトリックスになることである」と云って差し支えないであろう。この条件を，α, β が小さいときに摂動論的に適用することにより，次の近似が成り立つことを証明できる。

$$\alpha_l \sim (-4/\pi)\beta \tag{16}$$

この近似は $\beta\leqq0.2$ 程度で成り立つが，普通の波乗りを考える場合，β は0.5程度より小さくなることはなさそうで，1.0前後が一般的と考えられるのでもっと近似を高めた表示式を求める必要がある。(17)式はフィッティングによるものであるが，Fig.11に示すように β のほとんど全域にわたってかなり良い近似になっている。

$$\alpha_l \sim (-4/\pi)\tanh\beta \tag{17}$$

5. 波乗りからの脱出速度

波速より低速側からの波乗りのように，プロペラスリップが減って舵効きが悪くなっている波乗り状態を，危険な好ましくない状態と見なす立場からは，その状態から脱出する限界の平水中速度（またはこれに対応するプロペラ回転数）を求めることは，安全運航を確保する上から必要である。また低速側からの波乗り状態は，本来平水中で出せる速度より高い速度で走れる状態であるから，これを省エネ効果として有効利用しようとする立場からは，できるだけ低いプロペラ回転数で波乗りを続けられる限界，即ち脱出速度を知ることが必要である。一方，波速より高速側からの波乗りでは，高速船が波に捕捉されて速度が出ない状態になっている訳であるから，少しプロペラ回転数を上げてこの状態から脱出できれば，経済性の上から望ましいことであろう。いずれの場合も平水中速度 V を前述の V_{lcr} 以下に下げるか，前報[7]の $V_{ucr}(=C+E/A)$ 以上に上げるかすれば脱出できる訳であるが，一般には脱出できる限界速度（以下これを脱出速度，pull out speed と呼び V_p で表す）は V_{lcr} より高いところ，或いは V_{ucr} より低いところにある。

脱出速度 V_p は，低速側への脱出速度 V_{lp} と高速側への脱出速度 V_{up} があるが，これらは次のようにして求めることができる。即ち平水中速度 V（これを初期速度と呼ぶ）に対応するプロペラ回転数で波乗りをしているものとし，その状態からプロペラ回転数を平水中速度 V_p に相当する

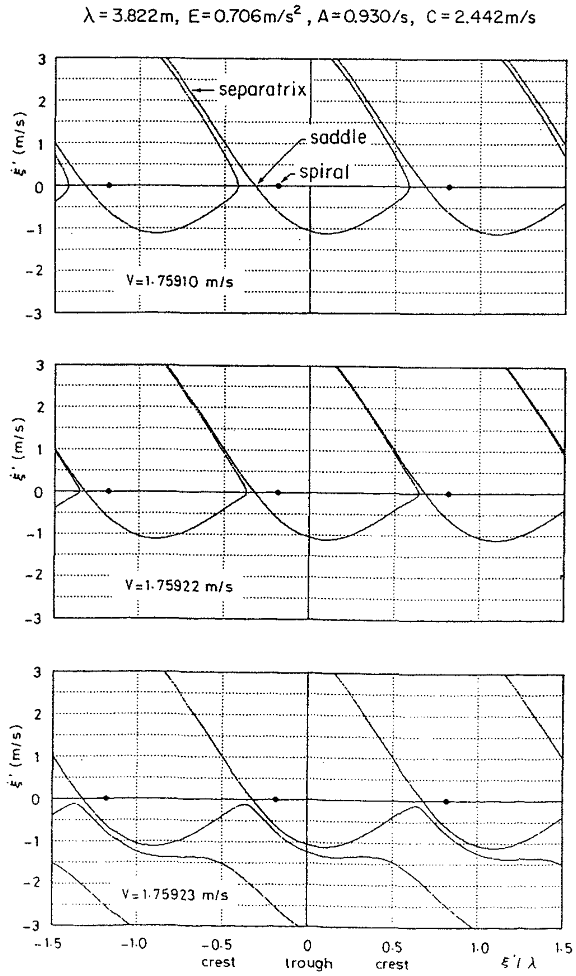

Fig. 12 Separatrix in critical region

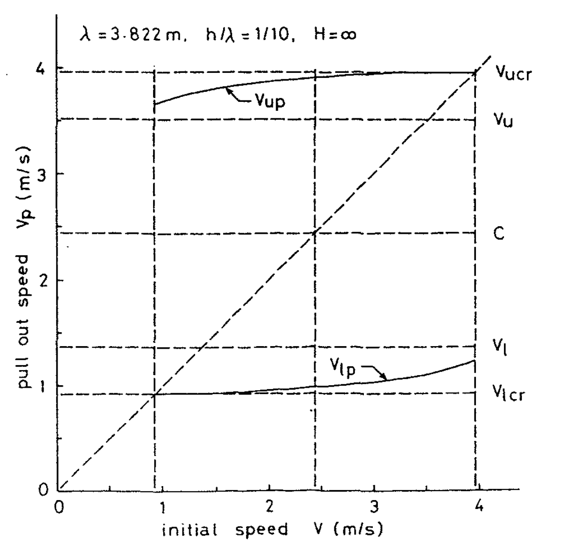

Fig. 13 Pull out speed ($\lambda/L=1.5$, $h/\lambda=1/10$, $H=\infty$)

ところまで下げて，または上げて脱出するものとする。

波乗りの安定平衡位置 $\xi_0'(-\lambda/2\leqq\xi_0'\leqq\lambda/2)$ は

$$\xi_0'/\lambda=(1/2\pi)\sin^{-1}\{(A(V-C)/E\} \tag{18}$$

であるから，これが変位の初期条件になる。速度の初期条件は

$$\dot{\xi}_0'=0 \tag{19}$$

である。初期条件(18)式と(19)式のもとに(10)式で V のかわりに V_p として適当な値を与えてタイムシミュレーション（或いは初期条件1点だけの位相面解析）を実行して，波乗りのままであるか，周期的前後揺れに移行するかを調べ，試行錯誤的に限界の V_p を求める。結果の一例を，Fig. 13 と Fig. 14 に示す。これらの図で V_u は高速側の無条件波乗り限界速度である。先に述べた領域IIの範囲では，$V_{lcr}\leqq V_{lp}\leqq V_l$,　$V_u\leqq V_{up}\leqq V_{ucr}$ であるが，領域IIの存在しない場合は $V_{lp}=V_{lcr}=V_l$,　$V_{up}=V_u=V_{ucr}$ である。

脱出速度を求める場合も，波長，波高，水深，初期速度の変る度に(10)式を解く必要はなく，パラメータを2つに落とした(13)式を上と同様な考え方で解いて，α と β を与えたときの脱出限界の α_p を求めておけば

$$\alpha_p=A\cdot(V_p-C)/E \tag{20}$$

の関係から脱出速度を容易に求めることができる。結果を Fig. 15 に示す。この図も Fig. 11 と同様に，波乗り以外の場合にも一般的に利用できるものである。

この問題（α と β を与えて α_p を求める問題）を解く場合は，初期条件が1つに与えられるから位相面解析を行なう必要はないが，Fig. 16 のような位相平面で考えるとこれは初期条件 $\eta_0=\sin^{-1}\alpha(-\pi/2\leqq\eta_0\leqq\pi/2)$ および $\dot{\eta}_0=0$ を与えた時の

$$d^2\eta/ds^2+\beta\cdot d\eta/ds+\sin\eta=\alpha_p \tag{21}$$

の解軌跡がセパラトリックスになるような α_p を求める問題に帰着する。これをまともに解こうとすれば，やはり α_p をいろいろ変えて試行錯誤を繰り返すことになるが，逆に α_p を与えたとき η_p がサドルになる，即ち $\sin\eta_p=\alpha_p(-\pi\leqq\eta_p\leqq-\pi/2$ または $\pi/2\leqq\eta_p\leqq\pi)$ になるようにして，この η_p と $\dot{\eta}_p=0$ を初期条件とする逆時間の解軌跡が再び $\dot{\eta}=0$ になるときの $\eta(=\eta_0)$ を求め，これから $\alpha=\sin\eta_0$ により α を求めるという逆解法も考えられている[12)]。

$\beta=0$ の時は上述の逆解法ではなく正攻法で解くことができる。この時は $\alpha=\sin\eta_0(-\pi/2\leqq\eta_0\leqq\pi/2)$ を与えて

$$\eta_p\cdot\sin\eta_p+\cos\eta_p=\eta_0\cdot\sin\eta_p+\cos\eta_0 \tag{22}$$

を満足する $\eta_p(-\pi\leqq\eta_p\leqq-\pi/2$ または $\pi/2\leqq\eta_p\leqq\pi)$ を数値的に求めてから $\alpha_p=\sin\eta_p$ により α_p を求めればよい。

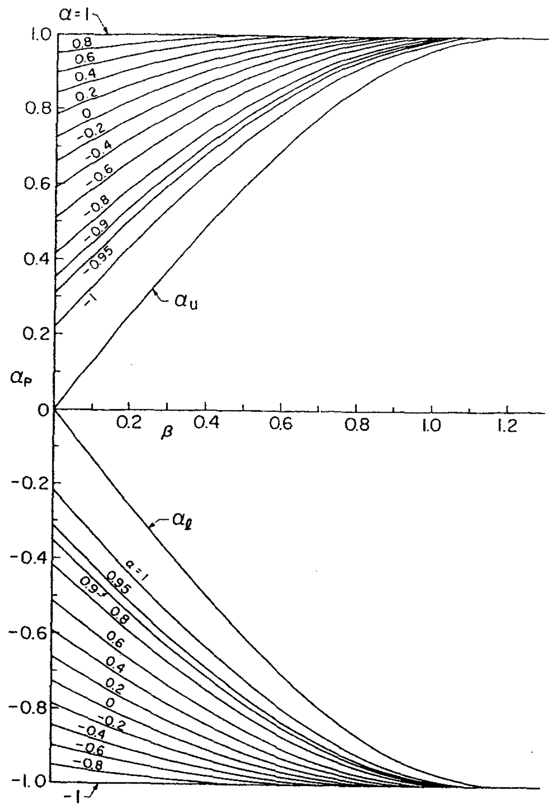

Fig. 15　Chart of $\alpha_p-\beta$ with parameter α

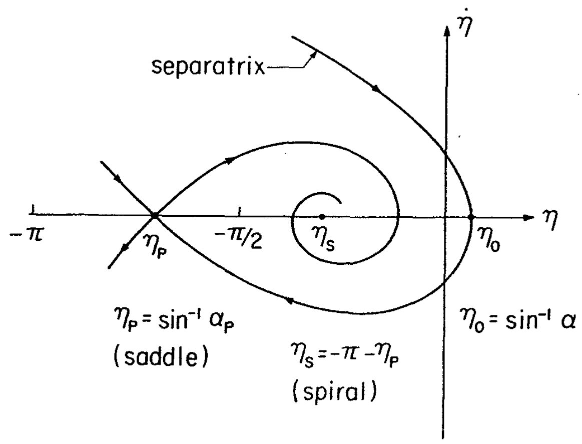

Fig. 16　Relation between α and α_p on phase plane

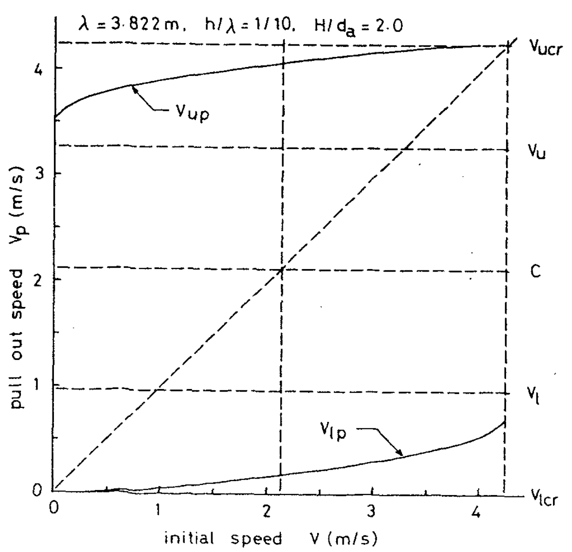

Fig. 14　Pull out speed ($\lambda/L=1.5$, $h/\lambda=1/10$, $H/d_a=2.0$)

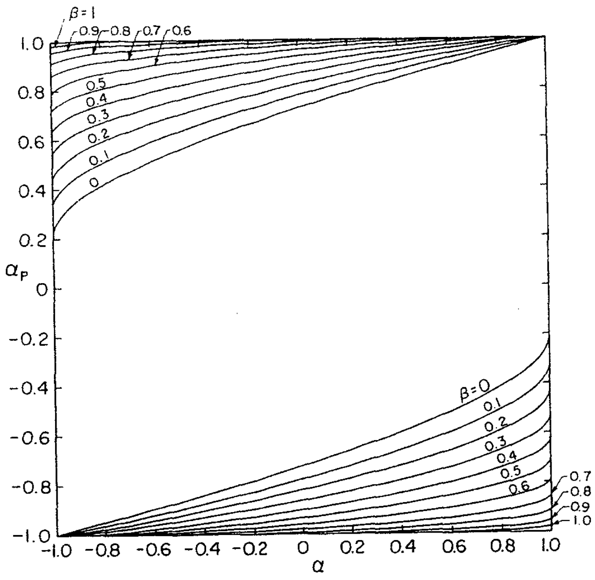

Fig. 17　Chart of $\alpha_p-\alpha$ with parameter β

Fig. 15 の $\beta=0$ の時の α_p はそのようにして求めた値であるが，$\beta\neq0$ の時の解との滑らかな接続から両方の計算結果が正しいことが確認できる。

Fig. 17 は Fig. 15 を別の表示方法にしたものであるが，Fig. 13, Fig. 14 はこの図と相似な形をしている。

6. 他の物理現象との類似性

6.1 直流駆動減衰振り子

Fig. 18 のように一定トルクで駆動される減衰振り子の大振幅振動の運動方程式は次のように表される[10)]。

$$l^2m\cdot d^2\theta/dt^2+b\cdot d\theta/dt+mgl\cdot\sin\theta=e \tag{23}$$

但し，m は振り子の質量，l は振り子の長さ，e は一定トルク，θ が振り子の振れ角，b は空気抵抗や摩擦による減衰の係数である。

(23)式は3つのパラメーターの運動方程式と見なせるが，波乗りの場合と同様に2つのパラメーターの式に変換できる。すなわち

$$t=(l/g)^{1/2}s \tag{24}$$

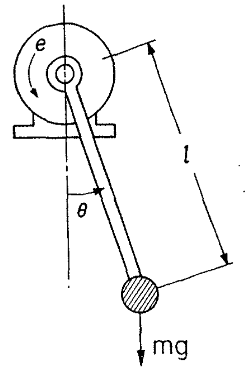

Fig. 18　Driven damped pendulum

の関係で時間 t を s に変換すると(22)式は結局次のようになる。

$$d^2\theta/ds^2+\beta d\theta/ds+\sin\theta=\alpha \tag{25}$$

但し

$$\alpha=e/lmg \tag{26}$$

$$\beta=b/\{ml(gl)^{1/2}\} \tag{27}$$

である。混同の恐れはないものとし，α, β は(14)，(15)と同じ記号を使うが，以下においても同様である。

(25)式が波乗りを表す(13)式と同じものであることは明瞭である。振り子の場合の $\theta>0$ の方向への回転運動は，船の場合には波を追い越しながらの前後揺れ運動に相当し，ある θ の正の値でトルクと復元力が釣り合って止まっている状態は，船では波速より高速側からの波乗りに相当する。$\theta<0$ の方向への回転運動は，船の場合には波に追い越されながらの前後揺れ運動に相当し，ある θ の負の値でトルクと復元力が釣り合って止まっている状態が，波速より低速側からの通常の波乗りに相当する。安定平衡点が $-\pi/2<\theta<\pi/2$ の範囲に存在し，この範囲を外れた所での平衡点は不安定であることなども，波乗りの安定性の場合と同様である。

波乗りと振り子との類似性については，(13)式と(25)式のような明確な対応は示されていないが，Grim[11)]によっても指摘されていたものである。

6.2 同期電動機，リニアモーターカー

同期電動機は，回転子の磁極が電機子の作る回転磁界に引かれて回転するものであり (Fig. 19 参照)，その運動方程式は次のように表される[12)]。

$$I\cdot d^2\phi/dt^2+c\cdot d\phi/dt+\kappa\cdot\sin\phi=Q \tag{28}$$

ここに，ϕ は回転磁界の回転速度(同期速度)で回転する座標系から測った回転磁界と回転子磁極の間の磁界の相差角(負荷角) を表し，I は電機子の慣性モーメント，c は始動および乱調防止のための制動巻線による減衰係数，κ は負荷角 ϕ の正弦に比例する発生トルクの係数，Q は電動機にかかる負荷トルクである。(28)式は次のように変換される。

$$d^2\phi/ds^2+\beta\cdot d\phi/ds+\sin\phi=\alpha \tag{29}$$

但し

$$t=(I/\kappa)^{1/2}s \tag{30}$$

$$\alpha=Q/\kappa \tag{31}$$

$$\beta=c/(I\kappa)^{1/2} \tag{32}$$

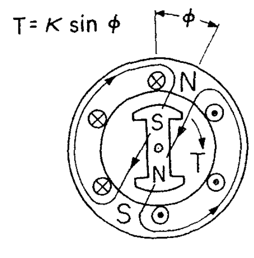

Fig. 19　Synchronous motor

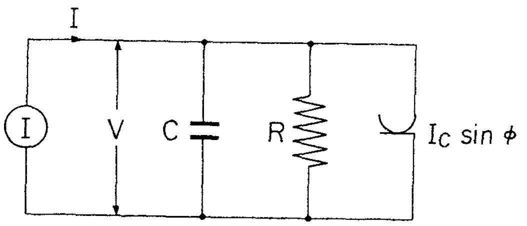

Fig. 20 RSJ model of Josephson junction

である。これが，波乗りと同じ現象であることは云うまでもない。回転子が同期速度で回転している同期運転の状態は船の波乗り状態に対応するし，同期が外れた状態は船の周期的前後揺れの状態に対応する。また同期運転中の周期的な変動である乱調と呼ばれる状態は，前報[5),7)]で述べた波乗り中の短周期前後揺れに対応するものである。第5章で述べた脱出速度の問題は，同期電動機の同期外れが起こる限界の負荷トルク（脱出トルク，pull out torque）からの類推によるものであり，用語もこれにならっている。

リニアモーターカーは同期電動機を直線状にしたものであるから，同じような問題が考えられる。

6.3 ジョセフソン効果

現代物理学の分野では，超伝導分野のジョセフソン効果や，プラズマ物理の分野の荷電密度波の問題などに類似性が存在するようであるが，ここでは前者について述べる。

2つの超伝導体を薄い絶縁膜をはさんで弱く結合したジョセフソン接合には，種々の特異な現象が見出されているが，これの数学モデルがRSJモデル（Resistively Shunted Junction）として考えられている。その電気回路はFig. 20に示すようなものであり，式で表すと次のようになる[13)]。

$$(hC/4\pi e)d^2\phi/dt^2+(h/4\pi eR)d\phi/dt+I_c\cdot\sin\phi=I \tag{33}$$

ここに ϕ は2つの超伝導体の巨視的な波動函数の位相の差を表すものであり，h はプランクの定数（$=6.6\times10^{-34}$ ジュール・秒），e は電子の電荷の絶対値（$=1.6\times10^{-19}$ クーロン），C は接合キャパシタンス，R は接合抵抗，I_c はジョセフソンの臨界電流，I は全接合電流である。(33)式は(29)式と全く同じ式に変換される。但し

$$t=(hC/4\pi eI_c)^{1/2}s \tag{34}$$

$$\alpha=I/I_c \tag{35}$$

$$\beta=(h/4\pi eI_cCR^2)^{1/2} \tag{36}$$

である。

Fig. 20の回路に接合電圧 V がなくても，直流超電流 $I_c\sin\phi$ が流れるいわゆるジョセフソン直流効果は，(33)式で $I_c\cdot\sin\phi=I$ が静的に成り立っている状態であり，これは船の波乗り状態に対応する。また $I<I_c$ となり外部からは直流しか流していないにもかかわらず交流超電流が流れるようになる，いわゆるジョセフソン交流効果は，船の場合の周期的な前後揺れの状態に対応している。交流効果の場合は接合電圧 V が存在し，ゴルゴフ・ジョセフソンの関係式と呼ばれる次の関係がある。

$$d\phi/dt=(4\pi e/h)V \tag{37}$$

ジョセフソン接合の電流・電圧特性の模式図をFig. 21に，追波中の船の速度変動特性の実験結果の一例をFig. 22に示す。電圧を速度に電流をプロペラ回転数（対応する平水中速度と考えた方がよい）に対応させれば両者の類似性は明らかである。Fig. 22で20.5 rpsのところに点線で示した実験点は，300航走以上の実験点のうちただ1つ不可解な実験点であったが[6)]，ジョセフソン接合の電流・電圧特性におけるヒステリシスに対応するものと考えると納得できる。なお，ジョセフソン効果との類似性については別の機会にもう少し詳しい報告をする予定である[14)]。

以上いくつかの例で示したように，波乗り現象は船体運動以外の他の分野にも少なからぬ類似現象を見ることができる。それらの現象に比較的共通していると思われる点は，ある波動現象の位相速度が他の何等かの運動の速度に接近し，両者の位相が比較できる範囲内に入ってきた時に生じる現象のように見える事である。このことはこの現象がかなり基本的な非線形現象の1つであることを示しているも

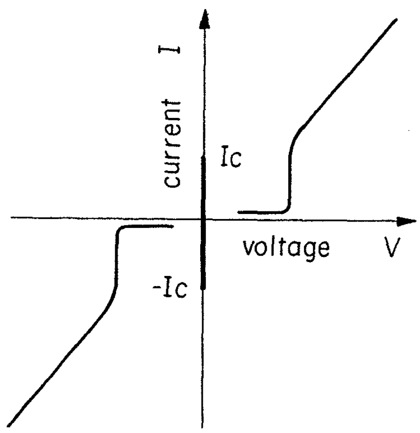

Fig. 21 Current-voltage characteristic of Josephson junction

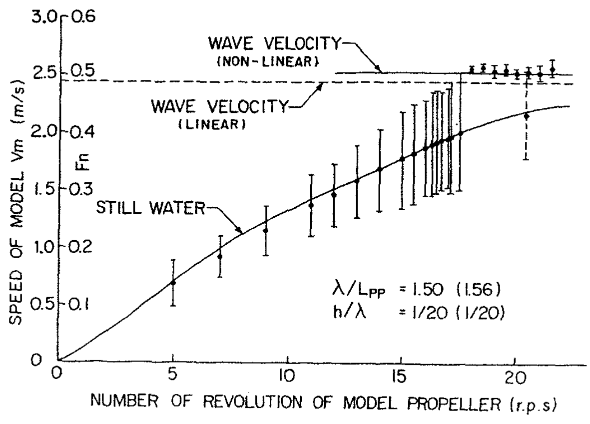

Fig. 22 Variation of model speed ($\lambda/L=1.5$, $h/\lambda=1/20$, $H=\infty$)

のと考えられ，ここに示した以外にも類似な現象が存在する可能性が考えられる。

7. 結　　言

前報までに，模型実験と数値シミュレーションにより波乗り現象のメカニズムについて，ある程度明らかにしてきたが，今回の位相面解析により，一層これが明確になってきたと考えている。また，無条件波乗り限界速度や波乗りからの脱出速度について検討し，それらを容易に求めることのできる図表を示したが，これは波乗り以外の問題でも一般的に利用できるものである。更に他の物理現象との類似性を明らかにすることにより，波乗りが基本的な非線形現象の一つであることを示した。

波乗りの発生が初期条件によって左右される場合のあることについての物理的な説明は今回もできていない。非線形現象では複数の安定解が存在することは珍しいことではないが，その物理的な説明については今後の課題としたい。

これまでは，波乗りの運動方程式において正弦函数で表される復原力項以外の非線形性は無視してきたが，減衰力項の非線形性を考慮した時の取扱いは精密化の観点から必要であろう。また直流強制力による駆動だけではなく正弦的な強制力による交流駆動を考える場合は，周期分岐やカオスの発生等のより複雑な現象も推測されるが，船の問題との関連が明らかになればそれらについての検討も必要になろう。工学的な応用面の問題としては，波乗りの有効利用の可能性を検討することも考えられる。

参 考 文 献

1) 元良誠三，藤野正隆，小柳雅志郎，石田茂資，島田和彦，牧岳彦：ブローチング現象発生機構に関する考察，造船学会論文集，第150号(1981. 12).

2) 不破健，吉野泰平，山本徳太郎，菅井和夫：小型船のブローチングに関する実験的研究，造船学会論文集，第150号(1981. 12).

3) M. R. Renilson：An investigation into the Factors Affecting the Likelihood of Broaching-to in Following Seas, 2nd International Conference on Stability of Ships and Ocean Vehecles, Tokyo (1982. 10).

4) 梅田直哉：船の波乗り現象について，造船学会論文集，第152号(1983. 1).

5) 菅信，猿田俊彦，安野三樹雄，山越康行，鈴木四郎：追波中の船の大振幅前後揺れと波乗り現象，造船学会論文集，第162号(1987. 12).

6) 菅信，猿田俊彦，安野三樹雄，山越康行，鈴木四郎：追波中の漁船の波乗りに関する模型実験，船研報告，第25巻，第3号(1988. 5).

7) 菅信，猿田俊彦，安野三樹雄：追波中の船の大振幅前後揺れと波乗り現象(その2，シミュレーションによる検討)，造船学会論文集，第165号(1989. 6).

8) 椹木義一：非線形振動論，初版，共立出版，1965, p. 25.

9) P. Du Cane and G. J. Goodrich：The Following Sea, Broaching and Surging, RINA, vol. 104, No. 2(1962. 4).

10) 佐藤力：非線形振動論，6版，朝倉書店，1977, p. 38.

11) O. Grim：Das Schiff in von achtern anlaufender See, JSTG, Vol. 45(1951).
(英訳：DTMB Translation 313, 1965. 2).

12) J. J. Stoker：Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, Interscience Publishers, 1950, p. 66.

13) 後藤憲一他編：物理学の最先端常識 I，初版，共立出版，1987. 12, p. 159.

14) 菅信：船の波乗り現象と超伝導ジョセフソン効果の類似性について，第54回船舶技術研究所研究発表会講演集，1989. 12(予定).