

Articulated Column の波浪中の挙動解析(第2報)

— 分数調波振動の発生に対する非線形流体抗力の効果 —

正員 藤野正隆* 正員 相樂希美**

An Analysis of Dynamic Behaviour of an Articulated Column in Waves (2nd Report)

— Effects of Nonlinear Hydrodynamic Drag Force on the Occurrence of Subharmonic Oscillation —

by Masataka Fujino, Member Nozomi Sagara, Member

Summary

The hawser used to moor a floating structure to an articulated column generates nonlinear restoring force for the angular displacement of articulated column. The nonlinear restoring force causes an oscillation with a period of several times the period of oscillatory exciting force, that is to say, a subharmonic oscillation. The present report deals with the conditions necessary for the subharmonic oscillation to occur when an articulated column placed in regular waves is provided with nonlinear restoring force. As the result of numerical analysis, it is clarified that the magnitude of nonlinear hydrodynamic drag force coefficient as well as wave period, wave amplitude and nonlinear spring constant are deeply associated with the occurrence of subharmonic oscillation.

In particular, the role of drag force coefficient is important; as the drag force coefficient increases, the possibility of occurrence of subharmonic oscillation is reduced. Besides, the subharmonic oscillation does not occur in waves of an arbitrary period, but does occur in a particular range of wave period which is determined by the oscillatory characteristics of an articulated column.

1. 緒 言

ホーザーを介して貯油船などの浮体が Articulated Column に係留される場合、カラムの傾斜の方向によってホーザーの形状変化による係留力の大きさは異なる。この係留力をカラムに働く復原力の一部であると考えると、冒頭に述べた浮体付きカラムの動揺問題は、非対称復原力の下での非線形振動問題となる。著者らは第一報¹⁾においてカラム単体の規則波中動揺を取扱ったが、その際、補足的に非対称復原力が作用するときのカラムの挙動を実験的に調べたところ、典型的な 1/3 次および 1/4 次分数調波振動が散見された。そこで前報以降、著者らはこのような分数調波振動の解析的な解法を検討してきた。

非線形復原力の下での質量・ダッシュポット・ばねの簡単な振動系において生ずる分数調波振動については、すでに電気、機械等の他の工学の分野では十分な検討がなされ

ている^{2,3)}。一方、本論文で取扱う Articulated Column では動揺に対する非線形抗力の影響は無視できない。このような非線形抗力が作用する場合の分数調波振動については、必ずしも十分な検討は行われていないようである。そこで、本報では主として Articulated Column における分数調波振動の発生に及ぼす非線形抗力の影響を論ずることとした。本報に述べた検討によれば、非線形抗力の作用の下で顕著な分数調波振動が発生するためには、抗力係数の値、波周波数範囲、非線形ばね定数の値が重要であることが判明したので、その結果を報告する。ここに展開した分数調波振動の解法の有効性については、詳細な実験等も行って、次報以降で検証することとした。

2. 分数調波振動の解析

2.1 定式化

Fig. 1 に示した海底部に関節を有するカラムを考える。以下の定式化に用いた記号は必要に応じ説明するが、極力、前報と同一としたので、詳しくはそちらを参照されたい。D, I, W をカラムの直径、慣性モーメント、重量とし、N を

* 東京大学工学部

** 通産省機械情報産業局

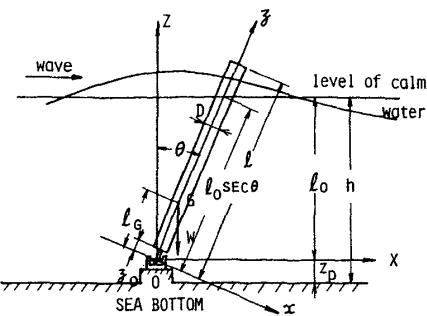


Fig. 1 Coordinate system and geometry of an articulated column

線形減衰係数, l_G を重心高さ, C_M , C_D を質量力係数, 抗力係数とすれば, 傾斜角 θ によって決まる復原モーメント $R(\theta)$ が付加されたときのカラムの動揺は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & \left(I + \int_{z_0}^{l_0 \sec \theta} \rho \frac{\pi}{4} D^2 z^2 dz \right) \ddot{\theta} + N \dot{\theta} \\ & + \left(\int_{z_0}^{l_0 \sec \theta} \rho g \frac{\pi}{4} D^2 z dz - W \cdot l_G \right) \theta + R(\theta) \\ & = \int_{z_0}^{l_0 \sec \theta} C_M \cdot \rho \frac{\pi}{4} D^2 \dot{V}_w z dz \\ & + \int_{z_0}^{l_0 \sec \theta} C_D \cdot \rho \frac{D}{2} (V_w - z \dot{\theta}) |V_w - z \dot{\theta}| z dz \quad (1) \end{aligned}$$

付加的な復原モーメント $R(\theta)$ は非対称であるとし, 次式で表わされるとする。

$$R(\theta) = k_1 \theta + k_2 \theta^2 + k_3 \theta^3 + k_4 \theta^4 \quad (2)$$

ここで, k_1, k_2, k_3, k_4 は定数である。

以下に述べる解析を進めるにあたり, 次の仮定を設ける。

- (i) 具体的な解析は前報に示した大カラムについて行うが, このカラムが実際に遭遇するであろう海上の波周期帯よりも数倍大きい周期を固有周期として持つようにカラムの寸法, 重量等を設定したので, 予備的実験で散見された分数調波振動は 1/3 次ないし 1/4 次分数調波振動であった。よって本報でも専ら, これらについて考察する。その際, 1/3 次および 1/4 次分数調波振動は独立に生ずることとした。
- (ii) カラムの動揺角は十分小さく, $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ としてよいとする。
- (iii) (1)式の右辺で波浪強制力を評価する際, 波の粒子速度, 粒子加速度は動揺しないカラムの軸心上で評価してよいとする¹⁾。すなわち, (1)式中の V_w, \dot{V}_w は水平方向の波粒子速度および加速度とする。このような仮定の下では, 入射波を振幅 a の余弦波

$$\eta = a \cos \omega_w t \quad (\omega_w: \text{波周波数}) \quad (3)$$

とすると, (1)式の右辺第一項は次のように表わせる。

$$\frac{\pi}{4} \rho D^2 \int_{z_0}^{l_0} C_M \dot{V}_w z dz \equiv F_w \sin \omega_w t \quad (4)$$

ここで, F_w は

$$\begin{aligned} F_w = & -\frac{\rho \pi D^2 C_M a \omega_w^2}{4 k^2 \sinh kh} [k l_0 \sinh k(z_p + l_0) \\ & - k z_0 \sinh k(z_p + z_0) - \cosh k(z_p + l_0) \\ & + \cosh k(z_p + z_0)] \quad (5) \end{aligned}$$

ここで k は波数で, 他の記号 z_0, z_p, l_0, h 等について Fig. 1 を参照されたい。

(iv) (1)式の右辺第 2 項はカラムの動揺速度と波粒子速度の相対速度に起因する項であるが, 強制力としての寄与は小さいので, 運動に対する非線形抗力としてのみ寄与するものとする。すなわち,

$$V_w - z \dot{\theta} \approx -z \dot{\theta} \quad (6)$$

と考えてよいものとする。したがって,

$$\int_{z_0}^{l_0} \frac{1}{2} \rho D C_D (V_w - z \dot{\theta}) |V_w - z \dot{\theta}| z dz \equiv F_D \dot{\theta} |\dot{\theta}| \quad (7)$$

と考える。ここで, F_D は

$$F_D = -\frac{1}{8} \rho D C_D (l_0^4 - z_0^4) \quad (8)$$

である。 \tilde{I} と C で(1)式左辺第 1 項および第 3 項の $\dot{\theta}$ と θ の係数を表わすことにすれば, 前述の仮定の下では(1)式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \tilde{I} \ddot{\theta} + N \dot{\theta} + C \theta + k_1 \theta + k_2 \theta^2 + k_3 \theta^3 + k_4 \theta^4 \\ & = F_w \sin \omega_w t + F_D \dot{\theta} |\dot{\theta}| \quad (9) \end{aligned}$$

2.2 分数調波振動の解析解

前節の仮定(i)に述べたように 1/3 次および 1/4 次分数調波振動は独立に生ずるとしたので, 解析法についてもそれぞれ個別に述べる。

2.2.1 1/3 次分数調波振動

このときのカラムの動揺角 θ を次式で表わす。

$$\theta = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + a_3 \sin 3\omega t + b_3 \cos 3\omega t \quad (10)$$

右辺の最初の 2 項が 1/3 次分数調波振動で, 後の 2 項が波周波数の動揺である。(10)式を(9)式に代入して整理する前に, (9)式の右辺第 2 項の非線形抗力項の取扱いについて, 次のような仮定を設ける。すなわち, $\dot{\theta}$ には波周波数成分とその 1/3 の周波数成分が同時に存在するが, 抗力としてはそれぞれの成分に対する抗力の和として表わせるとする。ただし, このように短周期と長周期の動揺が併存するときの抗力係数 C_D は双方の動揺に対して異なることが予想されるので^{4,5)}, それぞれ, C_{D1}, C_{D3} と表わすこととする。この仮定と等価線形近似を使えば非線形抗力項は,

$$\begin{aligned} F_D \dot{\theta} |\dot{\theta}| = & \frac{8}{3\pi} F_{D1} A_1 \omega^2 (a_1 \cos \omega t - b_1 \sin \omega t) \\ & + \frac{24}{\pi} F_{D3} A_3 \omega^2 (a_3 \cos 3\omega t - b_3 \sin 3\omega t) \quad (11) \end{aligned}$$

ここで

$$A_1^2 = a_1^2 + b_1^2, \quad A_3^2 = a_3^2 + b_3^2 \quad (12)$$

$$F_{D1} = -\frac{1}{8} \rho D C_{D1} (l_0^4 - z_0^4) \quad (13)$$

$$F_{D3} = -\frac{1}{8}\rho DC_{D3}(l_0^4 - z_0^4) \quad (14)$$

と表わせる。(10)式を(9)式に代入して, $\sin \omega t, \cos \omega t, \sin 3\omega t, \cos 3\omega t$ の係数を左右両辺で等置すれば,

$$(K - \tilde{I}\omega^2)a_1 - N\omega b_1 + k_3 \left[\frac{3}{4}a_1(a_1^2 + b_1^2) + \frac{3}{2}a_1(a_3^2 + b_3^2) - \frac{3}{4}a_3(a_1^2 - b_1^2) - \frac{3}{2}a_1b_1b_3 \right] = -\frac{8}{3\pi}F_{D1}A_1\omega^2b_1 \quad (15)$$

$$N\omega a_1 + (K - \tilde{I}\omega^2)b_1 + k_3 \left[\frac{3}{4}b_1(a_1^2 + b_1^2) + \frac{3}{2}b_1(a_3^2 + b_3^2) - \frac{3}{4}b_3(a_1^2 - b_1^2) + \frac{3}{2}a_1b_1a_3 \right] = \frac{8}{3\pi}F_{D1}A_1\omega^2a_1 \quad (16)$$

$$(K - 9\tilde{I}\omega^2)a_3 - 3N\omega b_3 - \frac{1}{4}k_3[a_1(a_1^2 - 3b_1^2) - 6a_3(a_1^2 + b_1^2) - 3a_3(a_3^2 + b_3^2)] = F_w - \frac{24}{\pi}F_{D3}A_3\omega^2b_3 \quad (17)$$

$$3N\omega a_3 + (K - 9\tilde{I}\omega^2)b_3 - \frac{1}{4}k_3[b_1(3a_1^2 - b_1^2) - 6b_3(a_1^2 + b_1^2) - 3b_3(a_3^2 + b_3^2)] = \frac{24}{\pi}F_{D3}A_3\omega^2a_3 \quad (18)$$

となる。ただし, $K = C + k_1$ とした。これらを解けば a_1, b_1, a_3, b_3 が求まるが、動揺角の大きさが興味の対象であるときは、カラムの動揺角 θ を(10)式の代りに

$$\theta = A_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + A_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) \quad (19)$$

と表わしておく方が便利である。この場合は(15)式から(18)式に相当する諸式は次のようになる。

$$(K - \tilde{I}\omega^2)A_1 + \frac{3}{4}k_3A_1[A_1^2 - A_1A_3 \cos(3\varphi_1 - \varphi_3) + 2A_3^2] = 0 \quad (20)$$

$$N\omega A_1 - \frac{3}{4}k_3A_1^2A_3 \sin(3\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{8}{3\pi}F_{D1}A_1^2\omega^2 \quad (21)$$

$$(K - 9\tilde{I}\omega^2)A_3 + \frac{1}{4}k_3[-A_1^3 \cos(3\varphi_1 - \varphi_3) + 6A_1^2A_3 + 3A_3^3] = F_w \cos \varphi_3 \quad (22)$$

$$3N\omega A_3 + \frac{1}{4}k_3A_1^3 \sin(3\varphi_1 - \varphi_3) = F_w \sin \varphi_3 + \frac{24}{\pi}F_{D3}A_3^2\omega^2 \quad (23)$$

これら 4 式から φ_1, φ_3 を消去すれば、分数調波振動の振幅 A_1 と波周波数の動揺振幅 A_3 を決める式が求められる。すなわち、(20)式と(21)式からは,

$$\frac{9}{16}k_3^2A_1^4 + \frac{27}{16}k_3^2A_1^2A_3^2 + \frac{9}{4}k_3^2A_3^4 + \left[\frac{3}{2}k_3(K - \tilde{I}\omega^2) + \frac{64}{9\pi^2}F_{D1}^2\omega^4 \right]A_1^2 + 3k_3(K - \tilde{I}\omega^2)A_3^2 - \frac{16}{3\pi}F_{D1}N\omega^3A_1 + (K - \tilde{I}\omega^2)^2 + N^2\omega^2 = 0 \quad (24)$$

を得る。一方、(22)式と(23)式から次の A_3 の 8 次式を得る。

$$\alpha_0A_3^8 + \alpha_1A_3^7 + \alpha_2A_3^6 + \alpha_3A_3^5 + \alpha_4A_3^4 + \alpha_5A_3^3$$

$$+ \alpha_6A_3^2 + \alpha_7A_3 + \alpha_8 = 0 \quad (25)$$

ここで、係数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ は次のとおりである。

$$\alpha_0 = \frac{9}{16}k_3^2 \quad (26)$$

$$\alpha_1 = 0 \quad (27)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2}k_3(K - 9\tilde{I}\omega^2) + \frac{3}{2}k_3^2A_1^2 + \frac{576}{\pi^2}F_{D1}^2\omega^4 \quad (28)$$

$$\alpha_3 = -\frac{144}{\pi}N\omega^3F_{D3} \quad (29)$$

$$\alpha_4 = (K - 9\tilde{I}\omega^2)^2 + 9N^2\omega^2 + \frac{5}{8}k_3^2A_1^4 + 2k_3(K - 9\tilde{I}\omega^2)A_1^2 - \frac{1}{2}k_3(K - \tilde{I}\omega^2)A_1^2 \quad (30)$$

$$\alpha_5 = \frac{128}{3\pi^2}F_{D1}F_{D3}\omega^4A_1^3 - \frac{16}{\pi}N\omega^3F_{D3}A_1^2 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \alpha_6 &= -F_w^2 - \frac{1}{2}k_3^2A_1^6 - \frac{2}{3}k_3(K - \tilde{I}\omega^2)A_1^4 - \frac{1}{2}k_3(K - 9\tilde{I}\omega^2)A_1^4 \\ &\quad - \frac{16}{3\pi}N\omega^3F_{D1}A_1^5 - \frac{2}{3}(K - 9\tilde{I}\omega^2)(K - \tilde{I}\omega^2)A_1^2 + 2N^2\omega^2A_1^2 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\alpha_7 = 0 \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \alpha_8 &= \frac{1}{16}k_3^2A_1^8 + \frac{1}{6}k_3(K - \tilde{I}\omega^2)A_1^6 + \frac{64}{81\pi^2}F_{D1}^2\omega^4A_1^6 \\ &\quad - \frac{16}{27\pi}N\omega^3F_{D1}A_1^5 + \frac{1}{9}[(K - \tilde{I}\omega^2)^2 + N^2\omega^2]A_1^4 \end{aligned} \quad (34)$$

すなわち、 A_1, A_3 は(24)式と(25)式とから求まる。

2.2.2 1/4 次分数調波振動

この場合も前項に述べたと同様の手順に従えばよい。まず、カラムの動揺角を次式で表わす。

$$\theta = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t + a_4 \sin 4\omega t + b_4 \cos 4\omega t \quad (35)$$

右辺の最初の 2 項が 1/4 次分数調波振動を、後の 2 項が波周波数の動揺を表わす。すなわち、 $\omega_w = 4\omega$ である。非線形抗力の取扱いも先と同様とする。

$$\begin{aligned} F_D \dot{\theta} |\dot{\theta}| &= \frac{8}{3\pi}F_{D1}A_1\omega^2(a_1 \cos \omega t - b_1 \sin \omega t) \\ &\quad + \frac{128}{3\pi}F_{D4}A_4\omega^2(a_4 \cos 4\omega t - b_4 \sin 4\omega t) \end{aligned} \quad (36)$$

ただし,

$$F_{D4} = -\frac{1}{8}\rho DC_{D4}(l_0^4 - z_0^4) \quad (37)$$

$$A_4^2 = a_4^2 + b_4^2 \quad (38)$$

とする。(35)式を(9)式に代入し、 $\sin \omega t, \cos \omega t, \sin 4\omega t, \cos 4\omega t$ の係数を左右両辺で等置すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} (K - \tilde{I}\omega^2)a_1 - N\omega b_1 + \frac{3}{4}k_3a_1\{a_1^2 + b_1^2 + 2(a_4^2 + b_4^2)\} \\ + \frac{1}{2}k_4(a_1^3b_4 - 3a_1^2b_1a_4 - 3a_1b_1^2b_4 + b_1^3a_4) \end{aligned}$$

$$= -\frac{8}{3\pi} F_{D1} \omega^2 A_1 b_1 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} N\omega a_1 + (K - \tilde{I}\omega^2) b_1 + \frac{3}{4} k_3 b_1 \{a_1^2 + b_1^2 + 2(a_1^2 + b_1^2)\} \\ + \frac{1}{2} k_4 (-a_1^3 a_4 - 3a_1^2 b_1 b_4 + 3a_1 b_1^2 a_4 + b_1^3 b_4) \end{aligned}$$

$$= -\frac{8}{3\pi} F_{D1} \omega^2 A_1 a_1 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} (K - 16\tilde{I}\omega^2) a_4 - 4N\omega b_4 + \frac{3}{4} k_3 a_4 \{2(a_1^2 + b_1^2) + a_4^2 + b_4^2\} \\ - \frac{1}{2} k_4 a_1 b_1 (a_1^2 - b_1^2) \end{aligned}$$

$$= F_w - \frac{128}{3\pi} F_{D4} \omega^2 A_4 b_4 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} 4N\omega a_4 + (K - 16\tilde{I}\omega^2) b_4 + \frac{3}{4} k_3 b_4 \{2(a_1^2 + b_1^2) + a_4^2 + b_4^2\} \\ + \frac{1}{8} k_4 (a_1^4 - 6a_1^2 b_1^2 + b_1^4) = \frac{128}{3\pi} F_{D4} \omega^2 A_4 a_4 \quad (42) \end{aligned}$$

カラムの動揺を(35)式の代りに

$$\theta = A_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + A_4 \sin(4\omega t - \varphi_4) \quad (43)$$

と表わせば、(39)式から(42)式に相当する次式を得る。

$$\begin{aligned} (K - \tilde{I}\omega^2) A_1 + \frac{3}{4} k_3 A_1 (A_1^2 + 2A_4^2) \\ - \frac{1}{2} k_4 A_1^3 A_4 \sin(\varphi_4 - 4\varphi_1) = 0 \quad (44) \end{aligned}$$

$$N\omega A_1 - \frac{1}{2} k_4 A_1^3 A_4 \cos(\varphi_4 - 4\varphi_1) = \frac{8}{3\pi} F_{D1} A_1^2 \omega^2 \quad (45)$$

$$\begin{aligned} (K - 16\tilde{I}\omega^2) A_4 + \frac{3}{4} k_3 A_4 (2A_1^2 + A_4^2) \\ - \frac{1}{8} k_4 A_1^4 \sin(\varphi_4 - 4\varphi_1) \\ = F_w \cos \varphi_4 \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4N\omega A_4 + \frac{1}{8} k_4 A_1^4 \cos(\varphi_4 - 4\varphi_1) \\ = F_w \sin \varphi_4 + \frac{128}{3\pi} F_{D4} A_4^2 \omega^2 \quad (47) \end{aligned}$$

このように 1/4 次分数調波振動には、非線形復原力項のうち θ に関する 3 次と 4 次の項がともに関係することが判る。(44)式から(47)式までの式から φ_1, φ_4 を消去すれば、 A_1 および A_4 を決める式を得る。まず、(44)および(45)式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{16} k_3^2 - \frac{1}{4} k_4^2 A_4^2 \right) A_1^4 + \frac{9}{4} k_3^2 A_1^2 A_4^2 + \frac{9}{4} k_3^2 A_4^4 \\ + \left[\frac{3}{2} k_3 (K - \tilde{I}\omega^2) + \frac{64}{9\pi^2} F_{D1}^2 \omega^4 \right] A_1^2 \\ + 3k_3 (K - \tilde{I}\omega^2) A_4^2 - \frac{16}{3\pi} N\omega^3 F_{D1} A_1 \\ + (K - \tilde{I}\omega^2)^2 + N^2 \omega^2 = 0 \quad (48) \end{aligned}$$

を得る。1/3 次分数調波振動の場合と比較して特徴的な相違は $\tilde{I}\omega^2$ を付した A_1^4 の係数で、 k_3 および k_4 の両係数が関与するとともに、波周波数の動揺振幅 A_4 が関係していることである。

一方、(46)および(47)式からは次式を得る。

$$\begin{aligned} \alpha_0 A_4^8 + \alpha_1 A_4^7 + \alpha_2 A_4^6 + \alpha_3 A_4^5 + \alpha_4 A_4^4 + \alpha_5 A_4^3 \\ + \alpha_6 A_4^2 + \alpha_7 A_4 + \alpha_8 = 0 \quad (49) \end{aligned}$$

ここで、係数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ は次のとおりである。

$$\alpha_0 = \frac{9}{16} k_3^2 \quad (50)$$

$$\alpha_1 = 0 \quad (51)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} k_3 (K - 16\tilde{I}\omega^2) + \frac{27}{16} k_3^2 A_1^2 + \frac{16384}{9\pi^2} F_{D1}^2 \omega^4 \quad (52)$$

$$\alpha_3 = -\frac{1024}{3\pi} N\omega^3 F_{D1} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = (K - 16\tilde{I}\omega^2)^2 + 16N^2 \omega^2 + \frac{63}{64} k_3^2 A_1^4 \\ + \frac{9}{4} k_3 (K - 16\tilde{I}\omega^2) A_1^2 - \frac{3}{8} k_3 (K - \tilde{I}\omega^2) A_1^2 \quad (54) \end{aligned}$$

$$\alpha_5 = \frac{512}{9\pi^2} F_{D1} F_{D4} \omega^4 A_1^3 - \frac{64}{3\pi} N\omega^3 F_{D1} A_1^2 \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \alpha_6 = -F_w^2 - \frac{27}{64} k_3^2 A_1^6 - \frac{9}{16} k_3 (K - \tilde{I}\omega^2) A_1^4 \\ - \frac{3}{8} k_3 (K - 16\tilde{I}\omega^2) A_1^4 - \frac{16}{3\pi} N\omega^3 F_{D1} A_1^3 \quad (56) \end{aligned}$$

$$\alpha_7 = 0 \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \alpha_8 = \frac{9}{256} k_3^2 A_1^8 + \frac{3}{32} k_3 (K - \tilde{I}\omega^2) A_1^6 + \frac{4}{9\pi^2} F_{D1}^2 \omega^4 A_1^6 \\ - \frac{1}{3\pi} N\omega^3 F_{D1} A_1^5 \\ + \frac{1}{16} [(K - \tilde{I}\omega^2)^2 + N^2 \omega^2] A_1^4 \quad (58) \end{aligned}$$

すなわち、 A_1, A_4 は(48)および(49)式を解けば定まる。

3. 分数調波振動の発生に関する検討

前章で展開した分数調波振動振幅の解析法に基づいて、分数調波振動の発生に対する抗力係数 C_{DL} 、波周波数、ばね定数 k_3 および k_4 の影響を検討する。ただし、緒言にも述べた予備的な水槽実験で散見されたのは、主として 1/3 次分数調波振動であるので、1/4 次分数調波振動については簡単な検討のみに止める。

3.1 1/3 次分数調波振動の発生

1/3 分数調波振動の振幅 A_1 は(24)式と(25)式から求まるが、高次の多項式を強引に解くのではどのような条件の下で解が存在するのかが見にくい。そこで、(24)式および(25)式が $A_1^2 \sim A_4^2$ 平面上でどのような曲線を表わしているかを示し、本章冒頭に述べた諸パラメータの値がこれら 2 曲線が交じわる、すなわち解を持つことにどのように影響するかを示す。

3.1.1 抗力係数 C_{DL} の影響

非線形抗力項が存在しない場合、すなわち(24)式で $F_{D1} = 0$ とした場合の(24)式は非線形復原力として 3 次の項のみが存在する質量・ダッシュポット・ばね力学系の 1/3 次分数振動の解析法と等値であることは式の構成から明らか

である。このような場合の(24)式(ただし、 $F_{D1}=0$ とする)は $A_1^2 \sim A_3^2$ 平面上で橿円を表わすことが知られている³⁾。しかし、 $F_{D1} \neq 0$ の場合には(24)式は A_1^2 および A_3^2 の2次曲線にはならないが、一般には F_{D1} の項は小さいので、曲線を描くとすれば橿円に近い軌道を描くと推測できる。そこで、Articulated Columnの性状を表わす諸量に具体的な数値を与えて、(24)式が表わす軌道を描いてみる。

計算に用いたカラムの寸法、形状等は前報¹⁾のTable 1に示した大カラムの場合で、見掛けの慣性モーメント \tilde{I} 、線形減衰係数 N 、線形のばね定数 K は次のとおりである。 $\tilde{I}=58.23 \text{ kgf}\cdot\text{m}\cdot\text{sec}^2$ 、 $N=0.82 \text{ kgf}\cdot\text{m}\cdot\text{sec}$ 、 $K=24.48 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ で、波振幅 a はとくに断わらないかぎり、 $a=0.04 \text{ m}$ とした。

Fig. 2 に示したのは、波周期 2.17 sec で非線形ばね定数が $k_3=57.72 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ のときに C_{DL} の値を 0 から少しづつ増加させた場合の(24)式の軌道である。前述の予備的実験では、カラムの動搖方向によって異なるばね定数をもつ線形ばねを組合せた非対称ばねをカラムの頂部に取り付けた。この非対称ばねを(2)式で近似したときの k_3 の値が $k_3=57.72 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ である。

前述のように、 $C_{DL}=0$ の場合の閉軌道は橿円である。 C_{DL} の値を徐々に増加させてゆくと、(24)式の描く閉軌道は $C_{DL}=0$ の場合の橿円の内側に縮退してゆく。しかも、 C_{DL} がある値以上になると軌道は存在しなくなる。たとえば、Fig. 2 の場合、 $C_{DL}=0.3$ では軌道は存在しない。

また、とくに注目すべきは、閉軌道が $C_{DL}=0$ での橿円の内側に縮退してゆくとき、閉軌道の右下の部分、すなわち横軸に近い部分が C_{DL} の値の増加とともに急速に横軸から離れてゆくことである。この事は、後述する(25)式の軌道と交じわる可能性を小さくすることを意味することが、次に述べる(25)式の描く軌道からすぐに判る。

(25)式は A_3 に関する8次式であるが、各項の大きさを具体的に計算してみると、 A_1^4, A_3^2, A_3^8 の3項以外の項は、これらの項に較べて無視できるほどの大きさであるので(25)式は次のように近似できる。

$$a_4 A_3^4 + a_6 A_3^2 + a_8 = 0 \quad (59)$$

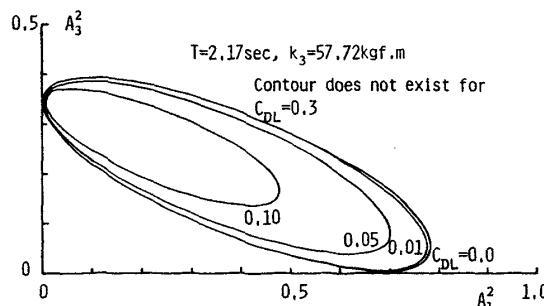


Fig. 2 Effects of drag coefficient C_{DL} on equation (24) (wave period $T=2.17 \text{ sec}$, wave amplitude $a=0.04 \text{ m}$, spring constant $k_3=57.72 \text{ kgf}\cdot\text{m}$)

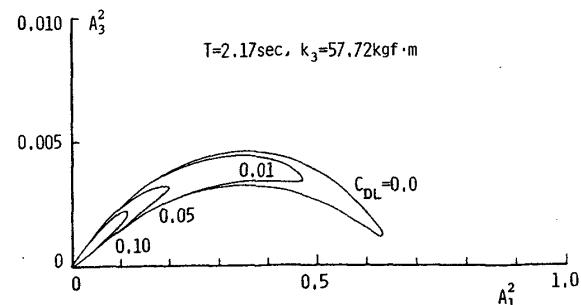


Fig. 3 Effects of drag coefficient C_{DL} on equation (59) ($T=2.17 \text{ sec}$, $a=0.04 \text{ m}$, $k_3=57.72 \text{ kgf}\cdot\text{m}$)

(59)式の軌道を Fig. 2 と同一の場合について描いたのが Fig. 3 である。ただし、 A_3^2 の値が非常に小さく、Fig. 2 のように横軸と縦軸のスケールを同一にして描くと、軌道は横軸に非常に接近した曲線となるので、縦軸方向に拡大して示した。 $C_{DL}=0$ の場合が最も大きい軌道を描き、 $C_{DL} \neq 0$ でその値を増加させてゆくと、 $C_{DL}=0$ の軌道の内側に縮退し、かつ、軌道の右端が縦軸に近づく。しかし、(24)式の閉軌道とは異なり、ある C_{DL} の値で軌道が消滅してしまうことはない。(59)式の軌道が縦軸と交じわる点は $A_1^2=0$ とおくことにより、

$$[(K-9\tilde{I}\omega^2)^2+9N^2\omega^2]A_3^2-F_w^2]A_3^2=0 \quad (60)$$

を満足する。すなわち、縦軸では原点 $A_1^2=A_3^2=0$ と、

$$A_3^2=\frac{F_w^2}{(K-9\tilde{I}\omega^2)^2+9N^2\omega^2} \quad (61)$$

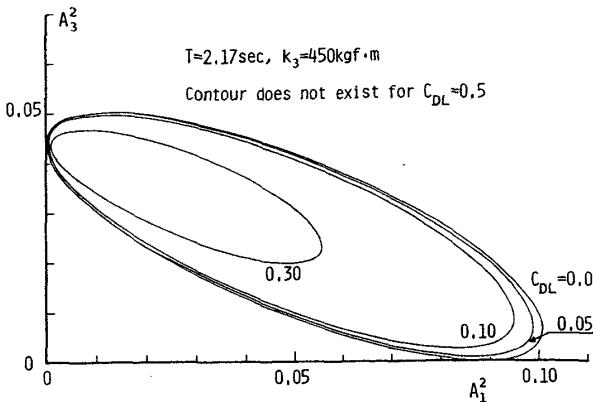
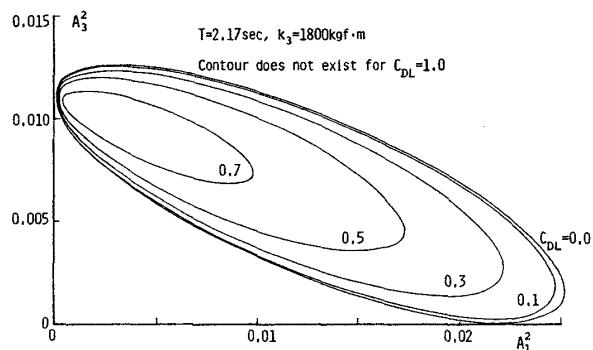
の 2 点で交じわる。(61)式は(9)式において非線形抗力項と非線形復原力を考慮しないときの振幅 F_w の波傾斜モーメントによる波周波数成分($\omega_w=3\omega$)の動搖角に相当する。

(24)式と(25)式の軌道の交点として、波周波数成分の動搖 A_3 と分数調波振動 A_1 が決まるが、Figs. 2, 3 に示した例では両軌道は交点をもたない。すなわち、分数調波振動は生じない。しかし、抗力係数 C_{DL} 、ばね定数 k_3 、波周波数 ω_w および波振幅 a を適当に設定すると両軌道は交点を持つようになる。

このように両軌道が交点を持つためには、 C_{DL} 、 k_3 、 ω_w 、 a の値の選定(ただし、 C_{DL} の値は物理的に決まるもので任意に選べるものではない)が重要であるが、Figs. 2, 3 から明らかなように、 C_{DL} の値が或る値以上になると(24)式の閉軌道が実軌道としては存在しなくなるので、 C_{DL} の値が分数調波振動の発生にとくに重要である。

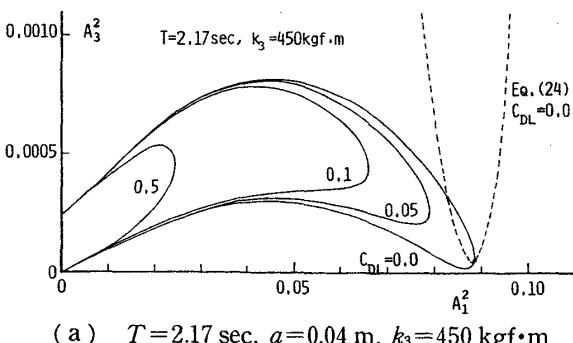
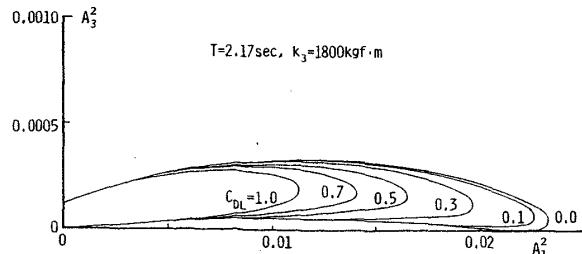
3.1.2 非線形ばね定数 k_3 の影響

前述の場合と同一の波周期 $T=2.17 \text{ sec}$ における(24)式の閉軌道を $k_3=450, 1800 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ について描いたのがFig. 4(a), (b)である。いずれの場合も閉軌道が C_{DL} の値とともに変化する定性的傾向は、先の Fig. 2 に示した場合と変わらない。しかし、 C_{DL} の値が同一であるとすると、 k_3 の値

(a) $T=2.17 \text{ sec}, \alpha=0.04 \text{ m}, k_3=450 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ (b) $T=2.17 \text{ sec}, \alpha=0.04 \text{ m}, k_3=1800 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ Fig. 4 Effects of drag coefficient C_{DL} on equation (24)

の増加とともに閉軌道の大きさが減じるとともに、横軸との最接近部が益々横軸に近くなるので、(59)式の軌道と交点をもつ可能性が増える。

C_{DL} 値の増大に伴い、閉軌道は内側に縮退してゆくが、閉軌道が消滅する C_{DL} の値は、 k_3 の値の増加とともに大きくなる。

(a) $T=2.17 \text{ sec}, \alpha=0.04 \text{ m}, k_3=450 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ (b) $T=2.17 \text{ sec}, \alpha=0.04 \text{ m}, k_3=1800 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ Fig. 5 Effects of drag coefficient C_{DL} on equation (59)

なる。たとえば、 $k_3=1800 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ の場合、 $C_{DL}=0.7$ では閉軌道は存在するが $C_{DL}=1.0$ では存在しない。

Fig. 5(a), (b) には、Fig. 4(a), (b) に相当する(59)式の軌道を描いた。 k_3 の値の増加に伴い、軌道が存在する A_1^2 の範囲が狭くなり原点側に寄ってくることは、(24)式の閉軌道の場合と同様である。また、 k_3 の値の増大とともに(59)式の軌道は横軸に近づくが、(24)式の閉軌道が横軸に近づく割合が大きいので、(24)式と(59)式の両軌道が交点をもつ可能性が増加する。ちなみに、Fig. 5(a) では $C_D=0.0$ の場合に両軌道が交点をもつ。しかし、交点を持つことが直ちに分数調波振動が発生することを意味しない。両軌道の交点が安定した周期解として持続するか否かは次章に述べる周期解の安定性の検討が必要である。

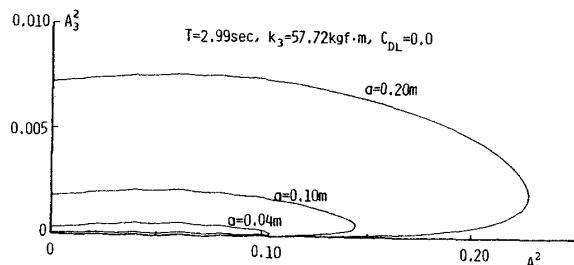
3.1.3 波振幅の影響

(24)式の閉軌道の大きさや閉軌道が実曲線として存在するか否かには波振幅の大きさが関係しないことは、式より明らかである。一方、(59)式の軌道には波振幅が直接関係する。波振幅とともに波傾斜モーメント F_w が増加するので、 $A_1^2 \sim A_3^2$ 平面上の軌道は上方に脹らみ、かつ軌道の存在範囲も A_1^2 の大きい方に伸びる。波振幅を変えたときの(59)式の軌道の変化の一例を Fig. 6 に示す。この例からも明らかなように、波振幅が大きくなれば(24)式の閉軌道と交点を有する可能性が増加する。

3.1.4 波周波数の影響

$k_3=57.72 \text{ kgf}\cdot\text{m}$ 、 $C_{DL}=0.0$ の場合について、波周期 T を種々変えたときの(24)式の閉軌道と(59)式の軌道を Fig. 7(a), (b) に示した。Fig. 7(a) の閉軌道は $C_{DL}=0.0$ であるから、いずれの閉軌道も楕円である。波周期 T を減ずると楕円軌道は大きくなり、図の原点から遠ざかる。一方、(59)式の軌道は横軸に非常に接近した軌道となるため、Fig. 7(b) では縦軸のスケールを横軸のスケールの 50 倍に拡大して、(59)式の軌道を描いている。波周期が短くなると(59)式の軌道が存在する A_1^2 の範囲が拡がり、 A_3^2 の値も大きくなる。しかし、同時に(24)式の閉軌道も前述のように急速に大きくなるとともに、図の原点より遠ざかるので、結果的には両軌道が交点をもつ可能性は減ずる。

逆に波周期が長くなるにしたがい、(24)式の閉軌道と(59)式の軌道が存在する A_1^2 軸の範囲はほぼ等しくなり、

Fig. 6 Effects of wave amplitude a on equation (59)
($T=2.99 \text{ sec}, k_3=57.72 \text{ kgf}\cdot\text{m}, C_{DL}=0.0$)

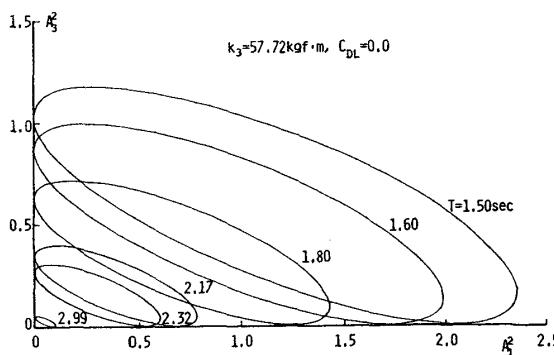


Fig. 7 (a) Effects of wave period T on equation (24) in cases of $C_{DL}=0.0$ ($a=0.04$ m, $k_3=57.72$ kgf·m)

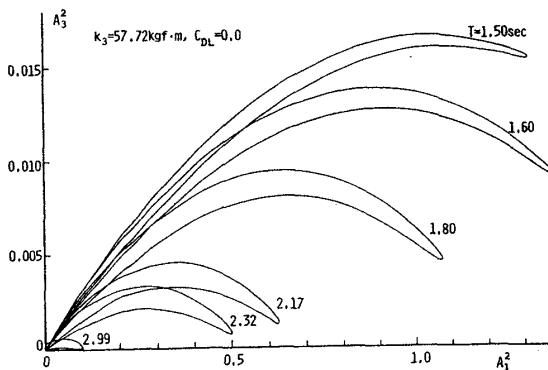


Fig. 7 (b) Effects of wave period T on equation (59) in cases of $C_{DL}=0.0$ ($a=0.04$ m, $k_3=57.72$ kgf·m)

かつ、閉軌道が横軸の A_1^2 軸に最接近する近傍での閉軌道が(59)式の軌道に近づき、交点を持ちやすくなる。しかし、波周期が長くなりすぎると、(24)式の閉軌道に較べて、(59)式の軌道が極端に小さくなりすぎ、再び両軌道が交点を有する可能性は小さくなる。

k_3 の値は Fig. 7 (a), (b) と同一であるが C_{DL} を 0.1 としたときの両軌道を Fig. 8 (a), (b) に示した。(24)式の閉軌道は波周期の減少とともに急速に横軸から離れてゆく (Fig. 8 (a))。一方、Fig. 8 (b) 示した(59)式の軌道は、波周期の減少とともに横軸から離れて立ってくるが、ある程度以上波周期が短くなると軌道そのものも小さくなり、軌道の先端はむしろ原点に近づいてくる。したがって、波周期がある限度を越えて短くなりすぎると、両軌道は交点を持たなくなる。反対に、波周期が長くなりすぎると(24)式の閉軌道は存在しなくなる。たとえば、Fig. 8 (a) では $T=2.99$ sec では閉軌道は消滅する。

このことから、Fig. 7 および Fig. 8 に示したいずれの場合も(24)式と(59)式の両軌道が交点を有するには、波周期に上限と下限があることがわかる。非線形抗力項が存在しない場合については同様の結論が樋木によっても述べられているが³⁾、非線形抗力が作用する場合は(24)式の閉軌道が実曲線としては存在しなくなることによって、分数調波

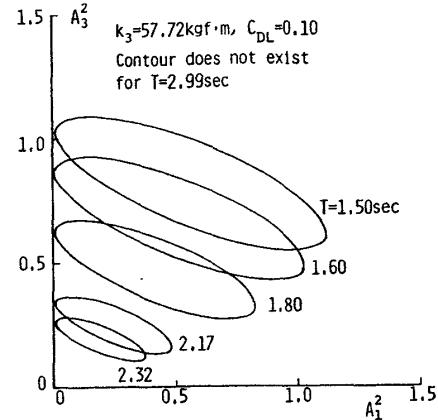


Fig. 8 (a) Effects of wave period T on equation (24) in cases of $C_{DL}=0.10$ ($a=0.04$ m, $k_3=57.72$ kgf·m)

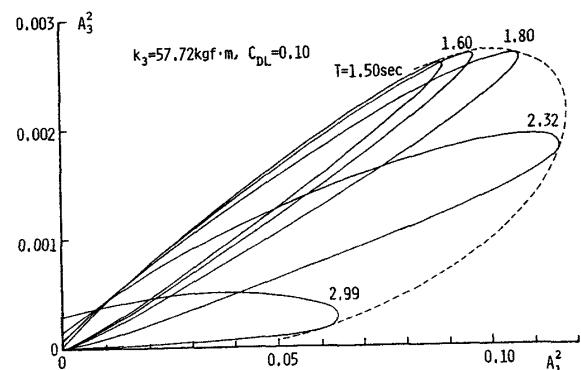


Fig. 8 (b) Effects of wave period T on equation (59) in cases of $C_{DL}=0.10$ ($a=0.04$ m, $k_3=57.72$ kgf·m)

振動の発生に波周期の上限があることが特徴的である。

以上、本節では 1/3 次分数調波振動が発生するには、抗力係数 C_{DL} の値が第一義的に重要であることを示したが、その他、ばね定数 k_3 の値、波周期帯、波振幅も分数調波振動の発生に深く関連していることが判明した。

3.2 1/4 次分数調波振動の発生

本章冒頭に述べた理由から、簡単な検討のみに止める。

Fig. 9 は $k_3=57.72$ kgf·m, $k_4=449.9$ kgf·m, $T=2.17$ sec の場合の(48)式の軌道を示したものである。(48)式は(24)式と異なり、 $A_1^2 \sim A_4^2$ 平面上での閉軌道とはならない。しかし、抗力係数 C_{DL} を増大させると、(48)式の軌道は横軸および縦軸から益々離れた曲線となる。

一方、(49)式の構成は 1/3 次分数調波振動の場合の対応する(25)式と酷似している。(49)式の左辺各項の大きさを概算してみると、1/3 次分数調波振動の場合と同様、 $\alpha_4 A_1^4$, $\alpha_6 A_1^2$, α_8 の 3 項が他の項よりもはるかに卓越しているので、(49)式は次式で近似できる。

$$\alpha_4 A_1^4 + \alpha_6 A_1^2 + \alpha_8 = 0 \quad (62)$$

波周期を $T=2.17$ sec、波振幅を $a=0.04$ m とし、抗力係数 C_{DL} を種々変えたときの(62)式の軌道を描いたが Fig. 10 である。Fig. 9, 10 の例では C_{DL} が 0 の場合でも(48)式と

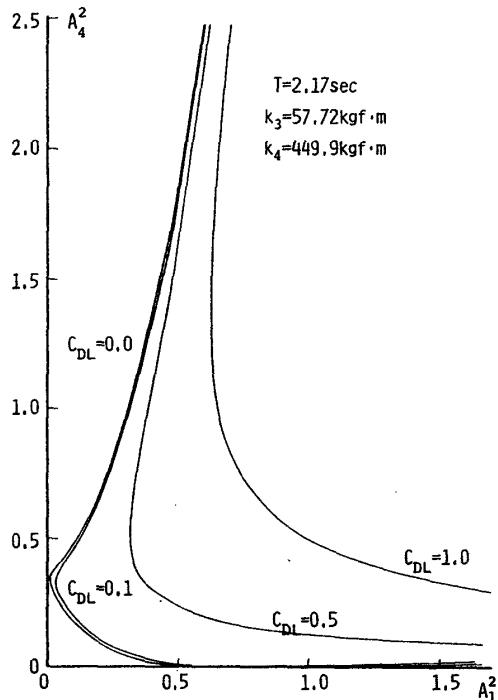


Fig. 9 Effects of drag coefficient C_{DL} on equation (48) ($T = 2.17 \text{ sec}$, $a = 0.04 \text{ m}$, $k_3 = 57.72 \text{ kgf}\cdot\text{m}$, $k_4 = 449.9 \text{ kgf}\cdot\text{m}$)

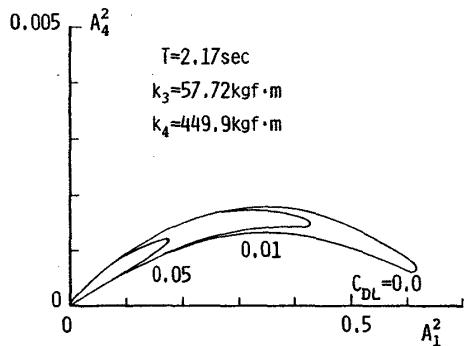


Fig. 10 Effects of drag coefficient C_{DL} on equation (62) ($T = 2.17 \text{ sec}$, $a = 0.04 \text{ m}$, $k_3 = 57.72 \text{ kgf}\cdot\text{m}$, $k_4 = 449.9 \text{ kgf}\cdot\text{m}$)

(62)式は交点をもたない。しかし、 C_{DL} の値が1/4次分数調波振動の発生に及ぼす影響の大略は判る。Fig. 10に示した(62)式の軌道は C_{DL} が0から増加するにしたがい、 $C_{DL}=0.0$ の軌道の内側に縮退してゆくので、Fig. 9の図と合せて判断すると、他の条件が同一ならば、 C_{DL} の値が大きくなると1/4次分数調波振動が発生しにくくなるといえる。

4. 分数調波振動解の安定性

前章までに述べたように、分数調波振動が2本の軌道の交点として求まるときとすると、一般には複数個の解が存在する。これらの交点に対応する振動解がすべて物理的に実現可能な振動解であるとは限らない。本章では、このような観点から振動解の安定性を論ずる。

4.1 1/3次分数調波振動解の安定性

非線形抗力の作用しない質量・ダッシュポット・ばねの振動系については、すでに詳しい解析が示されている³⁾。ここでも、そのような事例にならう次の仮定を設けて(10)式で表わした振動解の安定性を検討する。

(i) a_1, b_1 は時間とともに変化するが、その時間的変化は緩やかであるので、 a_1 と b_1 の時間に関する2階微分は十分小さく無視できる。

(ii) a_3, b_3 は時間によらず一定とする。これらの仮定に基づき、 a_1 および b_1 を時間によらない項 a_{10}, b_{10} と緩やかに変化する項 $\xi(t), \eta(t)$ の和として表す。すなわち、

$$a_1(t) = a_{10} + \xi(t) \quad (63)$$

$$b_1(t) = b_{10} + \eta(t) \quad (64)$$

とする。前述の仮定より、 a_{10}, b_{10}, a_3, b_3 は、(15)式から(18)式において a_1, b_1 の代わりに a_{10}, b_{10} を置いた関係を満足する。また a_1, b_1, a_3, b_3 を前述の仮定の下で(9)式に代入すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} N\ddot{a}_1 - 2\tilde{I}\omega\dot{b}_1 + a_1 & \left[K - \tilde{I}\omega^2 \right. \\ & \left. + \frac{3}{4}k_3\{a_1^2 + b_1^2 + 2(a_3^2 + b_3^2)\} \right] \\ & - \frac{3}{4}k_3[a_3(a_1^2 - b_1^2) + 2a_1b_1b_3] - N\omega b_1 \\ & = -\frac{8}{3\pi}F_{D1}A_1\omega^2b_1 \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{I}\omega\dot{a}_1 + N\dot{b}_1 + N\omega a_1 + b_1 & \left[K - \tilde{I}\omega^2 \right. \\ & \left. + \frac{3}{4}k_3\{a_1^2 + b_1^2 + 2(a_3^2 + b_3^2)\} \right] \\ & - \frac{3}{4}k_3[b_3(a_1^2 - b_1^2) - 2a_1b_1a_3] = \frac{8}{3\pi}F_{D1}A_1\omega^2a_1 \end{aligned} \quad (66)$$

これらの式に(63)、(64)式を代入し、 $\xi(t), \eta(t)$ に関する高次の微小量を省略すれば、次式を得る。

$$N\dot{\xi} - 2\tilde{I}\omega\dot{\eta} + E\cdot\xi + F\cdot\eta = 0 \quad (67)$$

$$2\tilde{I}\omega\dot{\xi} + N\dot{\eta} + G\cdot\xi + H\cdot\eta = 0 \quad (68)$$

ただし、 E, F, G, H は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E & = K - \tilde{I}\omega^2 + \frac{3}{4}k_3\{3a_{10}^2 + b_{10}^2 + 2(a_3^2 + b_3^2)\} \\ & - \frac{3}{2}k_3(a_{10}a_3 + b_{10}b_3) + \frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2\frac{a_{10}b_{10}}{A_{10}} \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} F & = \frac{3}{2}k_3(a_{10}b_{10} + a_3b_{10} - a_{10}b_3) - N\omega \\ & + \frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2\frac{a_{10}^2 + b_{10}^2}{A_{10}} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} G & = N\omega + \frac{3}{2}k_3(a_{10}b_{10} + a_3b_{10} - a_{10}b_3) \\ & - \frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2\frac{2a_{10}^2 + b_{10}^2}{A_{10}} \end{aligned} \quad (71)$$

$$H = K - \tilde{I}\omega^2 + \frac{3}{4}k_3\{a_{10}^2 + 3b_{10}^2 + 2(a_3^2 + b_3^2)\}$$

$$+\frac{3}{2}k_3(a_{10}a_3+b_{10}b_3)-\frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2\frac{a_{10}b_{10}}{A_{10}} \quad (72)$$

ここで, A_{10} は

$$A_{10}^2=a_{10}^2+b_{10}^2 \quad (73)$$

である。(67) および(68)式を整理すると

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{(2\tilde{I}\omega\cdot E-N\cdot G)\xi+(2\tilde{I}\omega\cdot F-N\cdot H)\eta}{-(2\tilde{I}\omega\cdot G+N\cdot E)\xi-(2\tilde{I}\omega\cdot H+N\cdot F)\eta} \quad (74)$$

となる。一階の常微分方程式の理論によれば、(74)式の特異点(平衡点) $\xi=\eta=0$ が安定であるための必要十分条件は³⁾,

$$(4\tilde{I}^2\omega^2+N^2)(EH-FG)>0 \quad (75)$$

$$N(E+H)-2\tilde{I}\omega(F-G)>0 \quad (76)$$

となる。このうち、後者の条件は(69)式から(72)式の関係を用いれば直ちに、

$$2N\left\{K+\tilde{I}\omega^2+\frac{3}{2}k_3(A_{10}^2+A_3^2)\right\}-\frac{16}{\pi}\tilde{I}\omega^3F_{D1}A_{10}>0 \quad (77)$$

となる。非線形抗力が存在しない場合は、この条件は、

$$2N\left\{K+\tilde{I}\omega^2+\frac{3}{2}k_3(A_{10}^2+A_3^2)\right\}>0 \quad (78)$$

であり、通常の力学系では \tilde{I}, N, K はすべて正であるので、 k_3 が正であれば常に成り立つ。一方、非線形抗力が作用する場合も(13)式より明らかのように $F_{D1}<0$ であるので、 k_3 が正であれば(77)式は常に成り立つ。また、仮りに $k_3<0$ の場合でも(77)式、(78)式が成り立てば安定になります。ところで、非線形抗力が作用する場合は、正の項である $-16\tilde{I}\omega^3F_{D1}A_{10}/\pi$ の項が(78)式の左辺に付加されたことになっているので、式のうえでは、非線形抗力が作用しない場合に較べ安定条件を満足するのに許される k_3 の値に自由度がふえていることが判る。

次に(75)式の条件を検討する。(69)式から(72)式の関係を用いて、 $EH-FG$ を計算する際、 A_{10} および A_3 の間には(24)式の関係があることを利用すると、(75)式は次式となる。

$$\frac{9}{2}k_3A_{10}^2(K-\tilde{I}\omega^2)+\frac{27}{8}k_3^2A_{10}^4+\frac{81}{16}k_3^2A_{10}^2A_3^2-\frac{8}{\pi}N\omega^3F_{D1}A_{10}+\frac{64}{3\pi^2}\omega^4F_{D1}^2A_{10}^4>0 \quad (79)$$

これを非線形抗力が存在しない場合の条件((79)式でアンダーラインを施した2項がない条件)と比較すると、(79)式中のアンダーラインを施した項は常に正であるので、非線形抗力が作用する場合の方が非線形抗力が作用しない場合より安定条件を満足させやすくなる。このように、(75)、(76)の両条件とも式の形のうえから、非線形抗力が存在する方が安定条件が満たされやすいことが判る。ただし、同一の外力条件の下でも非線形抗力が存在する場合と存在しない場合では A_1, A_3 の値は異なることに注意が必要である。

4.2 1/4次分数調波振動解の安定性

この場合も前節で述べたのと同様の方法で安定条件を求めることができる。そこで、以下では 4.1 との重複を極力避けて記述することにする。前節に述べた仮定(i), (ii)の下では、(35)式の a_1, b_1 は次式を満足する。

$$N\dot{a}_1-2\tilde{I}\omega\dot{b}_1+a_1\left[K-\tilde{I}\omega^2+\frac{3}{4}k_3(a_1^2+b_1^2+2(a_1^2+b_1^2))\right]+\frac{1}{2}k_4(a_1^3b_4-3a_1^2b_1a_4-3a_1b_1^2b_4+a_1^3a_4)-N\omega b_1=-\frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2A_1b_1 \quad (80)$$

$$2\tilde{I}\omega\dot{a}_1+N\dot{b}_1+N\omega a_1+b_1\left[K-\tilde{I}\omega^2+\frac{3}{4}k_3(a_1^2+b_1^2+2(a_1^2+b_1^2))\right]+\frac{1}{2}k_4(-a_1^3a_4-3a_1^2b_1b_4+3a_1b_1^2a_4+b_1^3b_4)=-\frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2A_1a_1 \quad (81)$$

ここで、 $a_1(t), b_1(t)$ を(63)式、(64)式で表わせば、 $\xi(t), \eta(t)$ は(67)および(68)式の形に整理できる。ただし、 E, F, G, H は次式で与えられる。

$$E=K-\tilde{I}\omega^2+\frac{3}{4}k_3(3a_{10}^2+b_{10}^2+2(a_4^2+b_4^2)) +\frac{1}{2}k_4(3a_{10}^2b_4-6a_{10}b_{10}a_4-3b_{10}^2b_4) +\frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2\frac{a_{10}b_{10}}{A_{10}} \quad (82)$$

$$F=\frac{3}{2}k_3a_{10}b_{10}+\frac{1}{2}k_4(-3a_{10}^2a_4-6a_{10}b_{10}b_4+3b_{10}^2a_4) -N\omega+\frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2\left(A_{10}+\frac{b_{10}^2}{A_{10}}\right) \quad (83)$$

$$G=\frac{3}{2}k_3a_{10}b_{10}+\frac{1}{2}k_4(-3a_{10}^2a_4-6a_{10}b_{10}b_4+3b_{10}^2a_4) +N\omega-\frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2\left(A_{10}+\frac{a_{10}^2}{A_{10}}\right) \quad (84)$$

$$H=K-\tilde{I}\omega^2+\frac{3}{4}k_3(a_{10}^2+3b_{10}^2+2(a_4^2+b_4^2))+\frac{1}{2}k_4 \times(-3a_{10}^2b_4+6a_{10}b_{10}a_4+3b_{10}^2b_4)-\frac{8}{3\pi}F_{D1}\omega^2\frac{a_{10}b_{10}}{A_{10}} \quad (85)$$

$\xi(t)$ および $\eta(t)$ が満たすべき式は(67)および(68)式で、4.1の場合と同形であるから、特異点(平衡点)の安定条件も(75), (76)式と同一である。

(76)式の条件は、

$$2N\left\{K+\tilde{I}\omega^2+\frac{3}{2}k_3(A_{10}^2+A_3^2)\right\}-\frac{16}{\pi}\tilde{I}\omega^3F_{D1}A_{10}>0 \quad (86)$$

となり、(77)式において A_3^2 の代りに A_4^2 としたものとなる。

一方、(75)式の条件も前節 4.1 と同様の演算をすれば、最終的に次式となる。

$$\begin{aligned}
 & 6k_3A_{10}^2(K - \tilde{I}\omega^2) + \frac{9}{2}k_3^2A_{10}^2(A_{10}^2 + 2A_4^2) - 2k_4^2A_{10}^4A_4^2 \\
 & - \frac{32}{3\pi}N\omega^3F_{D1}A_{10} + \frac{256}{9\pi^2}\omega^4F_{D1}^2A_4^2 > 0
 \end{aligned} \tag{87}$$

この場合も安定条件を表わす式の形のうえからは、非線形抗力が作用しない場合の条件 ((87)式でアンダーラインを施した項を除いた条件) と較べて、非線形抗力が作用する場合の方が非線形抗力が作用しない場合よりも、安定条件を満足させやすくなる。ただし、非線形抗力が作用する場合と作用しない場合の A_1, A_4 の値は同一の外力条件下でも相違があることに注意する必要がある。

5. 結 言

本報では、非線形復原力が付加的に作用する Articulated Column の分数調波振動の発生に及ぼす非線形抗力、波周波数、非線形ばね定数、波振幅の影響を検討した。その結果、得られた主な結論は次のとおりである。ただし、詳細な検討を行ったのは 1/3 次分数調波振動の場合であるので、以下に述べる事柄は 1/3 次分数調波振動を念頭に置いたものであることを断っておく。

(1) 分数調波振動の発生には、非線形抗力係数 C_{DL} の値、入射する規則波の波周期 T 、波振幅 a 、非線形ばね定数 k_3 の値のいずれもが深く関係する。

(2) とくに、抗力係数 C_{DL} の値が分数調波振動の発生に大きな影響を持つ。分数調波振動と波周波数の動揺の振幅を決める(24)式および(59)式の描く軌道のうち、(24)式の閉軌道が実曲線として存在するか否かに C_{DL} の値が著しく影響する。 C_{DL} が 0 の場合は橢円軌道であるが、0 から C_{DL} が増加するにつれて閉軌道は橢円の内側に縮退し、ついには消滅する。このような場合には、分数調波振動が発生する可能性はなくなる。

(3) また、分数調波振動が発生するには、波周期に上限値と下限値があり、波周期がある範囲内にあるときにのみ分数調波振動が生ずる。

(4) 波振幅 a が大きくなるほど、波の傾斜モーメントが大きくなり、分数調波振動の生ずる可能性が大きくなる。

(2) に関連して、さらに具体的に述べれば、通常の動揺問題でよく用いられる $C_{DL} \approx 1.0$ 前後の値では、概して分数調波振動は生じにくく、 C_{DL} が 0 に近いほど発生の可能性が高くなるといえる。本報の数値解析例に用いた全高 3.326 m、直径 0.2 m の Articulated Column の場合、 C_{DL} がどの位の値になるかを調べるために、規則波中で波周期の 3 倍ないし 4 倍の周期でカラムを強制動揺させる実験を行った⁶⁾。その結果、文献(4)におけると同様、長周期の動揺に対する抗力係数 C_{DL} は、平水中で单一の周期運動のみを行せた場合の数分の 1 程度に減少しうることを確かめている。今後、さらに詳細な実験を積み重ね、長周期と短周期の動揺が共存するときの各動揺に対する流体力係数がどのように相違するかを明らかにし、その結果を用いて本報に展開した分数調波振動の解析法の妥当性を検証する予定である。

最後に本報を纏めるにあたり、貴重なご討論をいただいた東京大学影本浩氏ならびに SPM 研究会の諸氏に深甚なる謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 藤野正隆、深沢塔一、相樂希美、永山慶一：
Articulated Column の波浪中の挙動解析(第1報)、
日本造船学会論文集、第 162 号 (1987) p. 259~269
- 2) Hayashi, C.: Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill (1964)。
- 3) 植木義一：非線型振動論、応用力学講座 8、共立出版 (1958)。
- 4) 小寺山亘、中村昌彦、小林正典：波浪中で長周期動揺する鉛直円柱に加わる粘性減衰力について、日本造船学会論文集、第 159 号 (1986)、p. 139~148。
- 5) 藤原章博：長周期動揺する柱体に働く粘性減衰力、
大阪府立大学卒業論文 (1987)。
- 6) 相樂希美：Articulated Column の非線形係留力下での挙動に関する研究、東京大学修士論文 (1989)