

# 振動方程式の特性行列の同定に関する研究

(その1, 解析法と解析例)

正員 道本 順一\* 村中 一意\*

Identification of Characteristic Matrices in Vibration Equation  
(1st Report, Proposition of a New Method and Example of Calculation)

by Jun-ichi Michimoto, *Member* Kazuoki Muranaka

## Summary

The mass, the damping and the stiffness matrices in the equation of vibration are called as the characteristic matrices of a vibration system. In this paper, a new method to identify the characteristic matrices from the response of the vibration system (transfer function) is proposed. In this method, the initial value of characteristic matrices are estimated by the 1st report of Ookuma and Nagamatsu, and modified so as to minimize the error between the actual and the estimated transfer function. This modification is iterated, and stopped when the error becomes minimum or the curve fit of the transfer function is sufficient.

In order to confirm the accuracy of the proposed method, the transfer function is calculated using the given characteristic matrices, and from its transfer function the characteristic matrices are again identified. The identified characteristic matrices are compared with the original ones, and a good agreement can be seen between them when the transfer function contains sufficient information about the vibration system. When the transfer function containing insufficient information about the vibration system is used for identification, the fitness of transfer function is found to be good. However the identified characteristic matrices are considerably different from true matrices.

## 1. 緒 言

構造物の振動応答を決定するところの特性を求めることを振動系の同定という。そして、振動系の同定法には、理論的同定法と実験的同定法の2つが考えられている。有限要素法のように構造物を離散化して、その構造の剛性行列あるいは質量行列を求めることは振動特性の理論的同定法の1つになるが、この方法の難点は減衰特性が今のところ理論的に求めるまでに至っていないところにある。一方、実験的同定法も、求めようとする特性の違いに応じて次のような2つに大別される<sup>1)</sup>。1つは固有振動数、固有モード、モード減衰比、モード質量、モード剛性などのモード特性の同定であり、いま1つは剛性行列、質量行列、減衰行列などで代表される物理モデルの同定である。

実験的なモード特性の同定は、振動実験で計測された伝達関数(振動応答/起振力)の周波数スペクトルや時刻歴応

答曲線に適合するモード特性を求めることから曲線適合とも呼ばれている。この方法は我国では長松らにより体系化され<sup>2,3)</sup>、研究段階からすでに実用段階に入り、ミニコンピュータあるいはパーソナルコンピュータ用のモード解析用のソフトウェアが市販されている。また、FFTアナライザに簡単なモード特性が求められるソフトウェアが組み込まれているものもある。同定されたモード特性からモードアニメーションなどが可能であるので、振動現象を表現するには都合がよいが、モード特性が構造物の物理特性を直接的に表すものでないためにその利用に当たっては制限を受ける。

実験的な物理モデルの同定法にもいくつかの方法があり、その中の1つに特性行列(剛性行列、質量行列、減衰行列)の同定法がある。この方法に関しては大熊・長松の一連の研究<sup>4-8)</sup>があるが、誤差を含む実験結果から真の特性を算出することが困難であることから研究も少なく、まだ実用の段階に至っていない。特性行列が実験的に同定できると、有限要素法などの理論的同定法と組み合わせると、

\* 広島大学工学部

それぞれの利点を生かした興味ある解析が可能になると考えられる。たとえば、一部の構造を有限要素法などの離散的な手法で解析して、残りの構造に対しては実験的に特性行列を同定し、それらを結合して全体構造の振動特性を求めることも可能である。また、特性行列が得られれば構造変更と振動応答の関連についても調べることができる。

機械工学の分野では、対象物が比較的小さく振動実験に費用と時間をあまり必要としないこと、あるいは数個のモジュールを組み合わせる1つの製品にする場合など多いため、モード特性の実験的同定や、構造全体を数個のブロックに分割して各々のブロックのモード特性を実験的あるいは理論的に同定して、それらを合成して全体の振動特性を求める、いわゆるモード合成法が広く普及しており、その結果は設計に取り入れられるようになっている。一方、造船の分野では香川ら<sup>9,10)</sup>の主船体と上部構造のモード合成法に関する研究などがあるが、必ずしも研究例は多いとは言えない。これは、研究の対象にする船舶が巨大で詳細な振動実験に費用と時間がかかるとともに、単品生産であるために1隻にのみ費用と時間を集中できないことが原因していると考えられる。しかしながら、将来、付加価値の高い低振動船の開発を具体的に考えて行くに際しては、これまでのように固有振動数と固有モードのみにとどまらず、より詳細なデータの蓄積が必要である。

本研究は、実験で計測した起振力および振動応答から振動方程式の特性行列（剛性行列、質量行列、減衰行列）を同定する方法について検討する第1段階として、繰り返し計算で特性行列を同定する一方法を提案する。また、提案した方法の精度を検討するために、対象にする構造物の特性行列を与えて起振力が作用したときの振動応答を計算し、その起振力と振動応答を用いて特性行列を同定する。そして、先に振動応答の計算に用いた特性行列と比較するとともに同定された特性行列の性質についても調べる。

## 2. 計 算 法

有限要素法などの離散化手法を適用して構造物の振動を計算するときの振動方程式は、一般粘性減衰を仮定すると次のような多自由度系の振動方程式になる。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (1)$$

ここで、 $\{\delta\}$ ：応答変位ベクトル、 $\{F\}$ ：起振力ベクトル、 $[K]$ ：剛性行列、 $[M]$ ：質量行列、 $[C]$ ：減衰行列。

(1)式の中の剛性行列、質量行列および減衰行列を振動方程式の特性行列という。いま、円振動数 $\omega_i$ の周期的な起振力

$$\{F\} = \{F\}_i e^{j\omega_i t} \quad (2)$$

で起振したときの振動応答を

$$\{\delta\} = \{\delta\}_i e^{j\omega_i t} \quad (3)$$

と表す。ここで、 $j = \sqrt{-1}$ であり、 $t$ は時間である。(2)、

(3)式を(1)式に代入すると、(1)式は次のように表される。

$$[[K] - \omega_i^2[M] + j\omega_i[C]]\{\delta\}_i = \{F\}_i \quad (4)$$

(1)式のように減衰が存在する振動を取り扱う場合には、起振力と振動応答との間には任意の位相差が生じるので、起振力と振動応答ともに次のような複素数で表しておくのが一般的である。

$$\{\delta\}_i = \{\delta_R\}_i + j\{\delta_I\}_i, \{F\}_i = \{F_R\}_i + j\{F_I\}_i \quad (5)$$

ここで $\{\delta_R\}_i, \{F_R\}_i$ は振動応答および起振力の実数部であり、 $\{\delta_I\}_i, \{F_I\}_i$ は虚数部である。通常の振動実験では起振力を基準として応答を整理する場合が多い。そのような場合には $\{F_R\}_i \neq 0$ であるが $\{F_I\}_i = 0$ になる。(5)式を(4)式に代入して、実数部および虚数部を取り出してまとめて表すと次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega_i^2[M] & -\omega_i[C] \\ \omega_i[C] & [K] - \omega_i^2[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_R\}_i \\ \{\delta_I\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_R\}_i \\ \{F_I\}_i \end{Bmatrix} \quad (6)$$

(6)式は円振動数 $\omega_i$ の起振力で起振したときの関係式である。

衝撃加振あるいはランダム波加振実験で計測した起振力と応答変位（一般には応答加速度を計測する場合が多い）を2チャンネルのFFTアナライザで解析して求めた伝達関数の周波数スペクトルは（変位/力）の次元すなわちコンプライアンスで表されている。そして、その伝達関数の値は、実験計測において誤差がまったく含まれないと仮定したときには、(6)式で起振力ベクトルの起振点に対応した所の実数部のみを1にしてそれ以外を零としたときの振動応答に一致する。通常のFFT解析では一定の周波数間隔で伝達関数が得られるので、それらの周波数に応じて(6)式の関係が得られることになる。

実験で計測した起振力 $\{F_R\}_i, \{F_I\}_i$ と振動応答 $\{\delta_R\}_i, \{\delta_I\}_i$ から(6)式の中の特性行列 $[K], [M]$ および $[C]$ を同定する方法を検討する。振動実験で起振力 $\{F_R\}_i, \{F_I\}_i$ は計測されているので、特性行列を何らかの方法で推定できると、その特性行列に対応した振動応答が(6)式から計算できる。なお、特性行列の推定値は以下の計算の初期値になるものであり、必ずしも実際の現象を正確に表す必要はなく適当に与えて差し支えない。いま、このような特性行列の初期値を $[\bar{K}], [\bar{M}], [\bar{C}]$ として、これらを用いて計算される応答を $\{\bar{\delta}_R\}_i, \{\bar{\delta}_I\}_i$ とすると、それらの間には次の関係が成り立っている。

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}] - \omega_i^2[\bar{M}] & -\omega_i[\bar{C}] \\ \omega_i[\bar{C}] & [\bar{K}] - \omega_i^2[\bar{M}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\delta}_R\}_i \\ \{\bar{\delta}_I\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_R\}_i \\ \{F_I\}_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

先にも述べたが、特性行列の初期値は実際の現象を表す必要がないので、それを用いて計算した応答は実験で計測された応答とは一致しないのが一般的である。そこで、実験で計測された応答に良く一致するように特性行列の初期値を修正することにする。いま、特性行列の修正量を $[\Delta K], [\Delta M], [\Delta C]$ とし、このような修正を考慮して計算した応

答は実験値に等しくなるものとする、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] & -\omega_i [\bar{C}] \\ \omega_i [\bar{C}] & [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] & -\omega_i [\Delta C] \\ \omega_i [\Delta C] & [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{Bmatrix} \delta_R \\ \delta_I \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} F_R \\ F_I \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (8)$$

(7)式と(8)式の起振力ベクトルは等しいので、差をとると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] & -\omega_i [\bar{C}] \\ \omega_i [\bar{C}] & [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \delta_R \\ \delta_I \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_R \\ \bar{\delta}_I \end{Bmatrix}_i \right\} \\ & + \begin{bmatrix} [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] & -\omega_i [\Delta C] \\ \omega_i [\Delta C] & [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_R \\ \delta_I \end{Bmatrix}_i = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ようになり、これより

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta_R \\ \delta_I \end{Bmatrix}_i &= \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_R \\ \bar{\delta}_I \end{Bmatrix}_i - \begin{bmatrix} [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] & -\omega_i [\bar{C}] \\ \omega_i [\bar{C}] & [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] \end{bmatrix}^{-1} \\ & \cdot \begin{bmatrix} [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] & -\omega_i [\Delta C] \\ \omega_i [\Delta C] & [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_R \\ \delta_I \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (10)$$

の関係が得られる。(10)式で特性行列の修正量 $[\Delta K]$ , $[\Delta M]$ , $[\Delta C]$ が適切であり、しかも実験で計測された応答 $\{\delta_R\}_i$ , $\{\delta_I\}_i$ に誤差が含まれていないときには左辺と右辺は等しくなるが、実験で計測される起振力および変位(一般に加速度で計測される場合が多い)には次に述べる系統的誤差<sup>4)</sup>が含まれているので、左辺と右辺を等しくさせることは通常できない。ここで、系統的誤差とは、センサーの校正値のずれや増幅器の不調などが原因の誤差である。一方、偶然誤差とは何らかの外乱による誤差であり、たとえば計測点の近くで工事が行われている場合とか、計測点の近くを人が歩いたときに振動が変化して混入する誤差である。系統的誤差は十分な調整などを事前に行っておけば混入を防ぐことができるが偶然誤差を完全に除くことは不可能であるので、実験による計測値には何らかの誤差が含まれていると考えなければならない。

実験で計測される応答に誤差が含まれているときには(10)式の左辺と右辺は等しくならないので、その差を次のように表し、

$$\begin{aligned} \{\epsilon\}_i &= \begin{Bmatrix} \delta_R \\ \delta_I \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_R \\ \bar{\delta}_I \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] & -\omega_i [\bar{C}] \\ \omega_i [\bar{C}] & [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] \end{bmatrix}^{-1} \\ & \cdot \begin{bmatrix} [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] & -\omega_i [\Delta C] \\ \omega_i [\Delta C] & [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_R \\ \delta_I \end{Bmatrix}_i \end{aligned} \quad (11)$$

この誤差を最小にするように特性行列の修正量 $[\Delta K]$ , $[\Delta M]$ , $[\Delta C]$ を決める。(11)式で特性行列の修正量は未知量であるので、これを分離して次のように表す。

$$\{\epsilon\}_i = \{B\}_i + [A]_i \{D\} \quad (12)$$

ここで、全自由度を $n$ とすると、

$$\{B\}_i = \begin{Bmatrix} \delta_R \\ \delta_I \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_R \\ \bar{\delta}_I \end{Bmatrix}_i \quad (13)$$

$$\{D\}^T = [\Delta K_{11} \Delta K_{12} \cdots \Delta M_{11} \Delta M_{12} \cdots \Delta C_{11} \cdots \Delta C_{nn}] \quad (14)$$

である。 $\Delta K_{ij}$ , $\Delta M_{ij}$ , $\Delta C_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ ) は $[\Delta K]$ , $[\Delta M]$ , $[\Delta C]$ の成分であり、未知量の総数は特性行列が対称行列のとき $3n(n+1)/2$ 個に、対称行列でない場合に $3n^2$ 個になる。したがって、(11)式の右辺第3項から(14)式の未知量を抜き出して得られる行列 $[A]_i$ は、特性行列が対称行列であるとする $2n \times 3n(n+1)/2$ 、また対称行列でないとする $2n \times 3n^2$ の大きさになる。

(12)式で表される誤差を最小にする特性行列の修正量を最小2乗法を適用して求めるためには、未知量の数より条件式の数多くしなければならない。そこで、 $m$ 個の周波数点について(12)式の関係を求め、それらを結合して

$$\{\epsilon\} = \{B\} + [A]\{D\} \quad (15)$$

と表す。ここで、 $\{\epsilon\}$ , $\{B\}$ は各周波数点での $\{\epsilon\}_i$ , $\{B\}_i$ を縦に並べてできる $m \times 2n$ 行の列ベクトルである。また $[A]$ も $[A]_i$ を縦に並べてできる行列であり、特性行列が対称行列であるとしたときには $m \times 2n$ 行、 $3n(n+1)/2$ 列の行列になる。したがって、このときには $m \times 2n \geq 3n(n+1)/2$ になるように解析周波数点をとれば、次のような手順により最小2乗法を適用して未知である特性行列の修正量が求められる。すなわち、誤差ベクトルが(15)式で表されるので、重み関数行列 $[W]$ を導入して誤差の2乗和を求めると、

$$\lambda = [\{B\} + [A]\{D\}]^T [W] [\{B\} + [A]\{D\}] \quad (16)$$

のようになり、誤差の2乗和を最小にする $\Delta K_{ij}$ , $\Delta M_{ij}$ , $\Delta C_{ij}$ は

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \Delta K_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \Delta M_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \Delta C_{ij}} = 0 \quad (17)$$

を満たす必要がある。この関係より特性行列の修正量に対する連立1次方程式が得られ、それを解いて特性行列の修正量が決定できる。そして、先に仮定した特性行列の初期値にこのようにして得られた修正値を加えて、

$$\begin{aligned} [K] &= [\bar{K}] + [\Delta K] \\ [M] &= [\bar{M}] + [\Delta M] \\ [C] &= [\bar{C}] + [\Delta C] \end{aligned} \quad (18)$$

により、実験結果をより良く表すことができる特性行列が同定できる。しかし、1回の計算では不十分であるので、(18)式で得られた特性行列を新たな初期値として以上の計算を繰り返し、誤差の2乗和の変化および(18)式の特性行列を用いて計算される振動応答と実験で計測した振動応答の一致の状態を見ながら適当なところで終了させる。

ここで提案した方法と、大熊・長松の第1報<sup>4)</sup>および第2報<sup>5)</sup>の方法を比較すると、大熊・長松の第1報の方法は繰り返し計算を必要とせず計算のアルゴリズムも本方法と同程度に簡単であるが、実験誤差が含まれている応答に対しては対応できないことが第2報で確かめられている。また、第2報の方法は、統計解析の概念を導入して実験誤差を含

む応答から繰り返し計算で特性行列を同定する方法であり、計算のアルゴリズムは第1報の方法に比べてかなり複雑で、計算に要する時間も長くなる。一方、ここで提案した方法は、実際の計算過程において全周波数点に対する(15)式の関係を求める必要はなく、各周波数点で(12)式から2乗誤差を定義して(17)式の計算をして、順次周波数点を変えて行けば良いので計算に要する容量も小さくてすみ、計算のアルゴリズムも非常に簡単である。しかし、各周波数点で(11)式中の逆行列の計算をしなければならないので計算時間はあまり短縮できない。

### 3. 解析例と精度

先に示した、起振力と振動応答から振動方程式の特性行列を同定する方法の精度を検討する第一段階として、数値実験により得られた起振力と振動応答を用いて特性行列を同定した。すなわち、解析対象にした構造物の多自由度系の振動方程式を算出して周期的起振力に対する振動応答を計算し、その起振力と振動応答を用いて特性行列を同定した。そして、得られた特性行列と先に振動応答の計算に用いた特性行列とを比較するとともに、同定された特性行列を用いて計算した振動応答と同定の計算に用いた振動応答を比較検討した。なお、振動応答の比較に当たっては、振動応答変位を起振力で割って得られる伝達関数（コンプライアンス）を用いた。線形な振動系においては起振力と振動応答は比例関係にあるので伝達関数により起振点と応答計測点の間の関係が決められ、また伝達関数の大きさは単位の起振力で起振したときの振動応答に一致している。

振動方程式の特性行列の同定計算に使用した起振力と振動応答は数値実験で得られたものであり、通常の実験で計測されたものと違い、それらの中には系統的誤差も偶然誤差も含まれていないので計算が妥当であれば同定された特性行列は振動応答の計算に用いた特性行列に一致しなければならない。

本論文で提案した解析法では、何らかの方法で特性行列の初期値を推定しなければならないが、ここでは大熊・長松の第1報の方法により初期値を求めた。先にも述べたが、大熊・長松の第1報の方法は、特性行列の同定計算に用いる起振力および振動応答に誤差が含まれていないときには比較的精度良く特性行列が求められるので、計算された特性行列に適当な定数を掛けた特性行列を初期値とした。また、(16)式の重み関数行列としては、応答振幅の2乗の逆数を行列の対角に用いた。

#### 3.1 解析対象

Fig. 1(a)の片持ち梁のたわみ振動を例に解析を行った。これは、幅40 mm、厚さ7.3 mm、長さ400 mmの軟鋼製の梁であり、これをFig. 1(b)に示すように4個の質点と質量のない4本の梁からなる振動モデルにモデル化して、4自由度の振動として取り扱った。なお、4個の質点

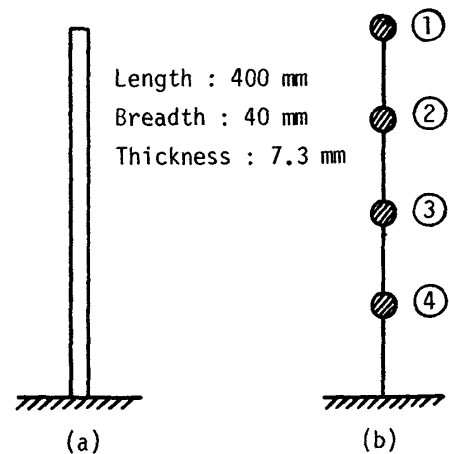


Fig. 1 Cantilever beam model

には自由端から順番に Fig. 1(b)に示すように番号を付ける。このようにモデル化したときの剛性行列および質量行列は Table 1 のように表される。また、減衰行列は解析的に決めることができないので、質量行列に比例した粘性減衰を考慮して Table 1 のように仮定した。4個のそれぞれの質点に0~1000 Hzの周期的起振力を作用させたときの4個の点での振動応答を求めて同定計算に用いた。

#### 3.2 1点を起振して求めた振動応答を用いた解析

Fig. 1(b)に示す計算モデルの自由端の質点①に周期的起振力を作用させたときの①~④点の振動応答を計算し、その起振力と振動応答から振動方程式の特性行列を同定することを試みた。まず、大熊・長松の第1報の方法により同定した特性行列を Table 2 に示す。なお、同定計算には

Table 1 Characteristic matrices used to calculate original response

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.4292 \times 10^3 & -0.9739 \times 10^3 & 0.6933 \times 10^3 & -0.1981 \times 10^3 \\ -0.9739 \times 10^3 & 0.2641 \times 10^3 & -0.2559 \times 10^3 & 0.1189 \times 10^4 \\ 0.6933 \times 10^3 & -0.2559 \times 10^4 & 0.3830 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 \\ -0.1981 \times 10^3 & 0.1189 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 & 0.5018 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.1146 \times 10^{-3} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2292 \times 10^{-3} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2292 \times 10^{-3} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2292 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.1000 \times 10^{-4} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2000 \times 10^{-4} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2000 \times 10^{-4} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2000 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Table 2 Characteristic matrices identified by 1st report of Ookuma and Nagamatsu

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.4292 \times 10^3 & -0.9739 \times 10^3 & 0.6932 \times 10^3 & -0.1980 \times 10^3 \\ 0.9739 \times 10^3 & 0.2641 \times 10^4 & -0.2558 \times 10^4 & 0.1188 \times 10^4 \\ 0.6932 \times 10^3 & 0.2558 \times 10^4 & 0.3829 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 \\ -0.1980 \times 10^3 & 0.1188 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 & 0.5108 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.1146 \times 10^{-3} & -0.1875 \times 10^{-9} & 0.1484 \times 10^{-9} & 0.4562 \times 10^{-8} \\ -0.1875 \times 10^{-9} & 0.2292 \times 10^{-3} & 0.4098 \times 10^{-8} & -0.1220 \times 10^{-7} \\ 0.1484 \times 10^{-9} & 0.4098 \times 10^{-8} & 0.2292 \times 10^{-3} & 0.9102 \times 10^{-8} \\ 0.4562 \times 10^{-8} & -0.1220 \times 10^{-7} & 0.9102 \times 10^{-8} & 0.2292 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.1001 \times 10^{-4} & 0.2508 \times 10^{-8} & -0.2269 \times 10^{-7} & 0.5464 \times 10^{-7} \\ 0.2508 \times 10^{-8} & 0.2000 \times 10^{-4} & -0.4663 \times 10^{-7} & 0.7643 \times 10^{-7} \\ -0.2269 \times 10^{-7} & -0.4663 \times 10^{-7} & 0.1995 \times 10^{-4} & 0.4931 \times 10^{-7} \\ 0.5464 \times 10^{-7} & 0.7643 \times 10^{-7} & 0.4931 \times 10^{-7} & 0.2003 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

20 Hz から 1000 Hz までの等間隔の 50 個の周波数点における起振力と振動応答を用いている。Table 2 に示される特性行列の同定結果は、同定計算に使用する振動応答を計算した Table 1 の特性行列に良く一致している。このことから、大熊・長松の第 1 報の方法は、同定計算に用いる起振力と振動応答に誤差が含まれていない場合には比較的精度良く特性行列を同定できることが確かめられた。

本方法では、大熊・長松の第 1 報の方法により計算した特性行列を初期値にして繰り返し計算をしてより精度の良い特性行列を同定するようにしている。しかし、大熊・長松の第 1 報の方法により同定した特性行列は振動応答の計算に用いた特性行列に良く一致していたので、その特性行列を初期値にして計算を実行したのでは本方法の精度は検討できないと考えられる。そこで、大熊・長松の第 1 報の方法で計算した Table 2 の特性行列のうち、剛性行列  $[K]$  を 10 倍、質量行列  $[M]$  を 0.1 倍、そして減衰行列  $[C]$  を 0.1 倍にした特性行列を初期値にして計算を行った。なお、ここで用いた乗数は特に意味のあるものではなく、単に同定計算に用いる振動応答と関連のない特性行列の初期値を得る目的のために採用したものである。このようにして決めた特性行列の初期値を用いて計算した振動応答と Table 1 に示す特性行列から計算した振動応答を比較した 1 例を Fig. 2 に示す。この図は、①点に作用させた起振力で①点における振動応答変位を割って求めた伝達関数を表している。この図より初期値とした特性行列から計算される伝達関数は同定計算に用いた振動応答の伝達関数と全く異なっていることがわかる。

以上のような方法で決めた特性行列を初期値にして、特性行列の対称性を考慮せずに同定計算を行った。先に示した方法を 2 回繰り返した後の特性行列の計算結果を Table 3 に示す。また、同定した特性行列から計算した伝達関数とその特性行列の同定計算に用いた振動応答の伝達関数を比較した結果を Fig. 3-6 に示す。計算に当たっては 1000 Hz まで等間隔に 100 個の周波数点における起振力と振動応答を用いた。この解析周波数範囲には 4 個の固有振

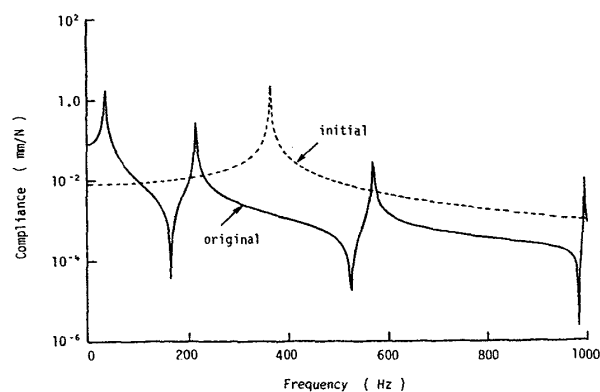


Fig. 2 Comparison between original and initial transfer function at point ① excited on point ①

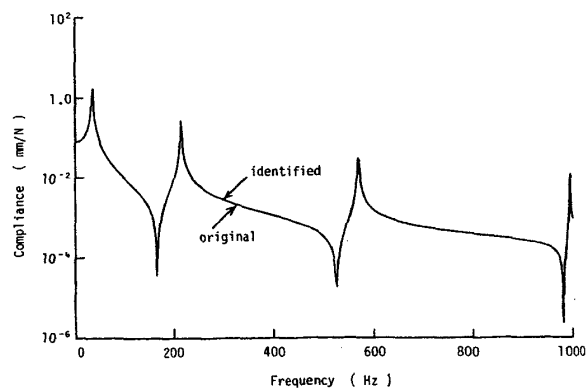


Fig. 3 Comparison between original and identified transfer function at point ① excited on point ①

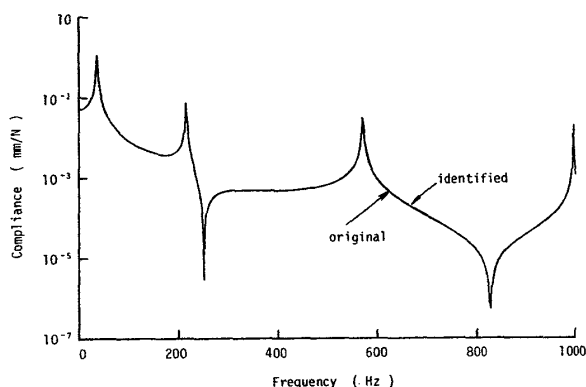


Fig. 4 Comparison between original and identified transfer function at point ② excited on point ①

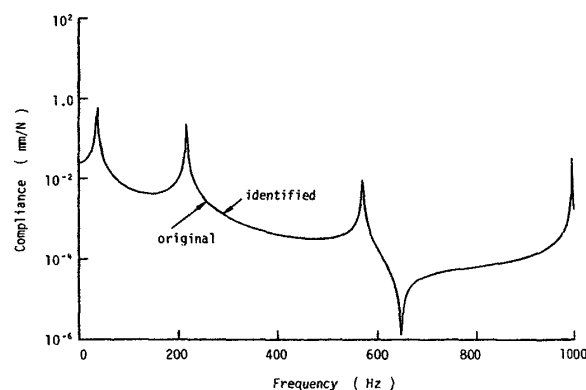


Fig. 5 Comparison between original and identified transfer function at point ③ excited on point ①

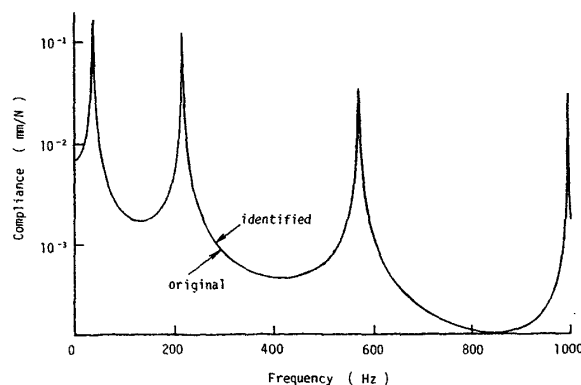


Fig. 6 Comparison between original and identified transfer function at point ④ excited on point ①

動が全て入っている。特性行列の同定の計算に用いた振動応答の伝達関数と Table 3 に示されている特性行列の同定結果から計算した伝達関数は全ての点で、また解析した全周波数範囲においてほとんど同じ値になり、図では重なって区別ができず 1 本の曲線になっている。しかし、Table 1 と Table 3 の特性行列を比較するとその値は全く異なっている。このように、1 点のみを起振したときの起振力と振動応答を用いて、しかも特性行列の対称性を考慮しないで同定計算を行うと、振動応答の伝達関数はほとんど同じ値になるが全く異なる特性行列が同定された。これは 1 点のみを起振したときの振動応答だけでは、その中に振動系の情報が十分に含まれていないうえに、さらに特性行列の対称性を考慮せずに同定する特性の自由度を増やしたことが原因していると考えられる。なお、大熊・長松の第 2 報の方法でも、特性行列の対称性を考慮しないときには同じような結果になった。

同じく、①点を起振したときの①～④点の振動応答を用いて特性行列の対称性を考慮して同定計算した特性行列を Table 4 に示す。これも繰り返し回数 2 回のときの結果であり、この特性行列は振動応答の計算に用いた Table 1 の値に良く一致している。このように、特性行列の対称性を考慮して同定する特性の自由度を減らせば、振動系に対する情報が必ずしも十分含まれているとは言えない振動応答を用いても比較的精度良く特性行列が同定できた。

### 3.3 多点を起振して求めた振動応答を用いた解析

Table 3 Characteristic matrices identified using transfer function excited on point ① (Antisymmetric matrices)

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.6849 \times 10^4 & -0.1591 \times 10^5 & 0.1116 \times 10^5 & -0.3016 \times 10^4 \\ -0.9345 \times 10^4 & 0.2340 \times 10^5 & -0.2320 \times 10^5 & 0.2078 \times 10^5 \\ 0.4860 \times 10^4 & -0.1998 \times 10^5 & 0.3448 \times 10^5 & -0.3480 \times 10^5 \\ -0.1769 \times 10^5 & 0.6240 \times 10^5 & -0.7622 \times 10^5 & 0.2347 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.1146 \times 10^{-3} & -0.2253 \times 10^{-2} & -0.1130 \times 10^{-2} & -0.4222 \times 10^{-3} \\ 0.2205 \times 10^{-8} & 0.3352 \times 10^{-2} & 0.2027 \times 10^{-2} & 0.1429 \times 10^{-2} \\ -0.1322 \times 10^{-8} & 0.2449 \times 10^{-3} & 0.1804 \times 10^{-2} & -0.5141 \times 10^{-3} \\ -0.7506 \times 10^{-8} & -0.1334 \times 10^{-2} & -0.8929 \times 10^{-2} & -0.4222 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.9993 \times 10^{-5} & -0.1966 \times 10^{-3} & -0.9858 \times 10^{-4} & -0.2659 \times 10^{-4} \\ 0.1766 \times 10^{-7} & 0.2925 \times 10^{-3} & 0.1769 \times 10^{-3} & 0.1246 \times 10^{-3} \\ -0.7393 \times 10^{-8} & 0.2128 \times 10^{-4} & 0.1573 \times 10^{-3} & -0.4489 \times 10^{-4} \\ -0.1980 \times 10^{-7} & -0.1162 \times 10^{-3} & -0.7791 \times 10^{-4} & -0.3682 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Table 4 Characteristic matrices identified using transfer function excited on point ① (Symmetric matrices)

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.4292 \times 10^3 & -0.9739 \times 10^3 & 0.6933 \times 10^3 & -0.1981 \times 10^3 \\ -0.9739 \times 10^3 & 0.2641 \times 10^4 & -0.2559 \times 10^4 & 0.1189 \times 10^4 \\ 0.6933 \times 10^3 & -0.2559 \times 10^4 & 0.3830 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 \\ -0.1981 \times 10^3 & 0.1189 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 & 0.5018 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.1146 \times 10^{-3} & -0.1502 \times 10^{-9} & 0.1875 \times 10^{-9} & 0.2730 \times 10^{-9} \\ -0.1502 \times 10^{-9} & 0.2292 \times 10^{-3} & -0.6385 \times 10^{-9} & -0.2256 \times 10^{-9} \\ 0.1875 \times 10^{-9} & -0.6385 \times 10^{-9} & 0.2292 \times 10^{-3} & 0.8303 \times 10^{-10} \\ 0.2730 \times 10^{-9} & -0.2256 \times 10^{-9} & 0.8303 \times 10^{-10} & 0.2292 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.1000 \times 10^{-4} & -0.3677 \times 10^{-9} & 0.1870 \times 10^{-9} & -0.7479 \times 10^{-9} \\ -0.3677 \times 10^{-9} & 0.2000 \times 10^{-4} & 0.1084 \times 10^{-8} & 0.5473 \times 10^{-9} \\ 0.1870 \times 10^{-9} & 0.1084 \times 10^{-8} & 0.2000 \times 10^{-4} & -0.4098 \times 10^{-9} \\ -0.7479 \times 10^{-9} & 0.5473 \times 10^{-9} & -0.4098 \times 10^{-9} & 0.2000 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Table 5 Characteristic matrices identified using transfer function excited on four points (Antisymmetric matrices)

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.4292 \times 10^3 & -0.9739 \times 10^3 & 0.6933 \times 10^3 & -0.1981 \times 10^3 \\ -0.9739 \times 10^3 & 0.2641 \times 10^4 & -0.2559 \times 10^4 & 0.1189 \times 10^4 \\ 0.6933 \times 10^3 & -0.2559 \times 10^4 & 0.3830 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 \\ -0.1981 \times 10^3 & 0.1189 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 & 0.5018 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.1146 \times 10^{-3} & -0.1574 \times 10^{-10} & -0.8721 \times 10^{-11} & -0.4739 \times 10^{-11} \\ -0.1307 \times 10^{-10} & 0.2292 \times 10^{-3} & -0.3794 \times 10^{-10} & 0.3278 \times 10^{-11} \\ -0.6245 \times 10^{-11} & -0.4415 \times 10^{-10} & 0.2292 \times 10^{-3} & 0.2926 \times 10^{-10} \\ -0.5707 \times 10^{-11} & 0.4394 \times 10^{-10} & 0.1399 \times 10^{-10} & 0.2292 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.1000 \times 10^{-4} & -0.2848 \times 10^{-9} & 0.2806 \times 10^{-9} & -0.1581 \times 10^{-10} \\ -0.2954 \times 10^{-9} & 0.2000 \times 10^{-4} & 0.2931 \times 10^{-10} & -0.1385 \times 10^{-9} \\ 0.2882 \times 10^{-9} & 0.3941 \times 10^{-10} & 0.2000 \times 10^{-4} & -0.1713 \times 10^{-9} \\ -0.2238 \times 10^{-10} & 0.1518 \times 10^{-9} & -0.2235 \times 10^{-9} & 0.2000 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Fig. 1(b) に示す計算モデルの①点から④点をそれぞれ起振したときの①点から④点の振動応答を用いて同様の計算を行った。特性行列の対称性を考慮しないで同定した特性行列の計算結果を Table 5 に示す。これは 2 回繰り返し計算した後の結果である。ここで取り扱っている振動は当然弾性範囲内の現象であるので Maxwell-Betti の相反定理が成り立ち、たとえば①点を起振したときの③点の振動応答は、③点を同じ大きさの力で起振したときの①点の応答に等しくなっているはずである。したがって、このような性質を有する起振力と振動応答を用いて同定計算を行うと、特性行列に対称性の条件を課さなくても同定された特性行列は対称行列に近くなっている。そして、Table 5 の特性行列は Table 1 の特性行列と良く一致しており、これらの特性行列を用いて計算した振動応答も良く一致していた。また、特性行列の対称性を考慮した場合も、ここで示した結果と同様に良い一致を示していた。

### 3.4 解析周波数範囲を狭くしたときの解析結果

これまでの計算には 1000 Hz までの 100 個の周波数点での起振力と振動応答を用いたが、この周波数範囲には Fig. 2 に示されるように 4 個の固有振動が全て入っていた。そこで、次に解析周波数範囲を狭くして、解析する周波数点を 110 Hz から 650 Hz の 110 個とした場合と、110 Hz から 380 Hz までの 55 個とした場合の計算を行った。Fig. 7 から、これらの周波数範囲にはそれぞれ 2 個あるいは 1 個の固有振動が存在していることがわかる。①点を起振したときの①～④点の振動応答を用いて、特性行列の対称性を考慮して計算した特性行列を Table 6 および Table 7 に示す。Table 6 は 110 Hz から 650 Hz までの 110 個の周波数点での起振力と振動応答を用いて 2 回繰り返し計算した後の特性行列であり、これは Table 1 の特性行列に良く一致している。一方、Table 7 は 110 Hz から 380 Hz までの 55 個の周波数点での起振力と振動応答を用いて 4 回繰り返し計算した後の特性行列である。また、この特性行列を用いて計算した①点の伝達関数と同定計算に用いた振動応答の伝達関数を比較した結果が Fig. 7 である。同定された特性行列は Table 1 の特性行列と全く異なる

Table 6 Characteristic matrices identified using transfer function excited on point ① (Symmetric matrices, Analyzed frequency range: 110-650 Hz)

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.4292 \times 10^3 & -0.9739 \times 10^3 & 0.6933 \times 10^3 & -0.1981 \times 10^3 \\ -0.9739 \times 10^3 & 0.2641 \times 10^4 & -0.2559 \times 10^4 & 0.1189 \times 10^4 \\ 0.6933 \times 10^3 & -0.2559 \times 10^4 & 0.3830 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 \\ -0.1981 \times 10^3 & 0.1189 \times 10^4 & -0.3153 \times 10^4 & 0.5018 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.1146 \times 10^{-3} & 0.9515 \times 10^{-9} & 0.1963 \times 10^{-9} & 0.1196 \times 10^{-8} \\ -0.9515 \times 10^{-9} & 0.2292 \times 10^{-3} & -0.4412 \times 10^{-9} & -0.3022 \times 10^{-8} \\ 0.1963 \times 10^{-9} & -0.4412 \times 10^{-9} & 0.2292 \times 10^{-3} & -0.3042 \times 10^{-8} \\ 0.1196 \times 10^{-8} & -0.3022 \times 10^{-8} & -0.3042 \times 10^{-8} & 0.2292 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.1000 \times 10^{-4} & -0.6537 \times 10^{-9} & -0.7258 \times 10^{-8} & 0.1395 \times 10^{-8} \\ -0.6537 \times 10^{-9} & 0.2001 \times 10^{-4} & 0.5051 \times 10^{-8} & 0.1067 \times 10^{-7} \\ -0.7258 \times 10^{-8} & 0.5051 \times 10^{-8} & 0.1896 \times 10^{-4} & 0.1894 \times 10^{-7} \\ 0.1395 \times 10^{-8} & 0.1067 \times 10^{-7} & 0.1894 \times 10^{-7} & 0.2000 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Table 7 Characteristic matrices identified using transfer function excited on point ① (Symmetric matrices, Analyzed frequency range: 110-380 Hz)

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.4160 \times 10^3 & -0.8851 \times 10^3 & 0.4688 \times 10^3 & 0.1351 \times 10^3 \\ -0.8851 \times 10^3 & 0.2159 \times 10^4 & -0.1456 \times 10^4 & -0.3603 \times 10^3 \\ 0.4688 \times 10^3 & -0.1456 \times 10^4 & 0.1447 \times 10^4 & 0.7572 \times 10^2 \\ 0.1351 \times 10^3 & -0.3603 \times 10^3 & 0.7572 \times 10^2 & 0.7479 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.1283 \times 10^{-3} & -0.4952 \times 10^{-4} & 0.7691 \times 10^{-4} & -0.7679 \times 10^{-4} \\ -0.4952 \times 10^{-4} & 0.4070 \times 10^{-3} & -0.2734 \times 10^{-3} & 0.2693 \times 10^{-3} \\ 0.7691 \times 10^{-4} & -0.2734 \times 10^{-3} & 0.6408 \times 10^{-3} & -0.3938 \times 10^{-3} \\ -0.7679 \times 10^{-4} & 0.2693 \times 10^{-3} & -0.3938 \times 10^{-3} & 0.5903 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.6349 \times 10^{-5} & 0.1458 \times 10^{-4} & -0.2645 \times 10^{-4} & 0.3187 \times 10^{-4} \\ 0.1458 \times 10^{-4} & -0.3820 \times 10^{-4} & 0.1053 \times 10^{-3} & -0.1266 \times 10^{-3} \\ -0.2645 \times 10^{-4} & 0.1053 \times 10^{-3} & -0.1705 \times 10^{-3} & 0.2284 \times 10^{-3} \\ 0.3187 \times 10^{-4} & -0.1266 \times 10^{-3} & 0.2284 \times 10^{-3} & -0.2530 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

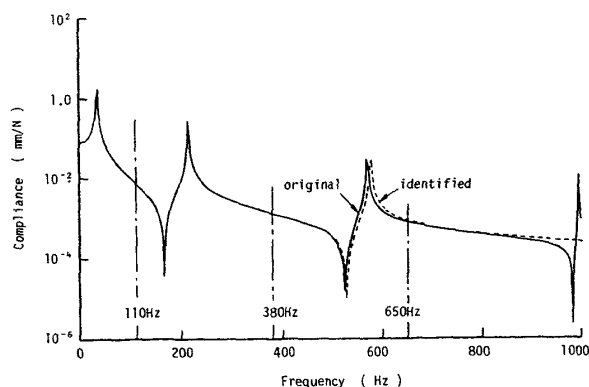


Fig. 7 Comparison between original and identified transfer function at point ① excited on point ① (Analyzed frequency range: 110-380 Hz)

っており、また伝達関数も同定計算の対象にした周波数領域から離れると差がみられる。なお、4回以上繰り返しても Fig. 7 に示された状態より改善されなかった。

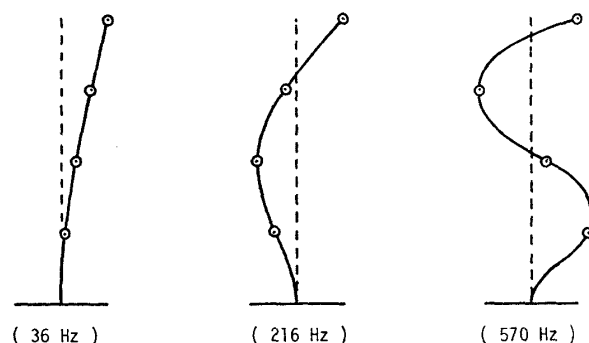
特性行列が対称行列であるとしたとき、1000 Hz までの起振力と振動応答を用いた解析では精度良く特性行列が同定できていたにもかかわらず、解析周波数範囲を極端に狭くすると、解析周波数範囲内の振動応答は良く表すことができるが、その範囲から離れたところの振動応答まで完全に表すことができない特性行列を同定した。特性行列が対

称行列であるとしなくても同様の傾向を示したが、①点～④点を起振したときの①～④点の振動応答を用いて計算したときには解析周波数範囲を狭くしても Table 1 の特性行列にほぼ等しい特性行列が同定できた。

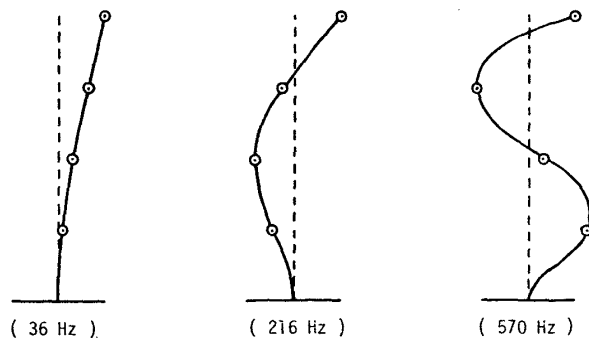
以上のように、振動系に関する少ない情報から多くの特性を完全に同定することは容易ではなく、特性行列の同定に際しては解析する周波数の範囲はできるだけ広くし、また解析周波数範囲に制限を受けるときには、多点を起振したときの振動応答を用いることが同定の精度を向上させる上で必要であると考えられる。

### 3.5 同一の振動応答を表す異なる特性行列

起振点が1点のときの振動応答を用いて、しかも特性行列の対称性を考慮せずに同定した Table 3 の特性行列は振動応答の計算に用いた Table 1 の特性行列とは全く異なっていたが、振動応答の伝達関数は非常に良く一致していた。そこで、このような特性行列の性質について若干の検討を行う。Fig. 1 から固有振動数は1次振動で約 36 Hz、2次振動で約 216 Hz、3次振動で約 570 Hz になっている。そこで、これらの振動数の周期的起振力が①点に作用したときの①～④点の応答を、特性行列が Table 1 および Table 3 で表されるときについて減衰を無視して計算した。そのときの振動応答から固有振動モードを推定すると Fig. 8 のようになり、全く異なる特性行列を用いたにもかかわらず両者は良く一致している。またそれらは一般に良く知られた、解析的に求められる振動モードにも良く一致している。次に、このようにして求められた振動応答 {δ} と



(a) Calculated using characteristic matrices of Table 1



(b) Calculated using characteristic matrices of Table 3

Fig. 8 Vibration mode

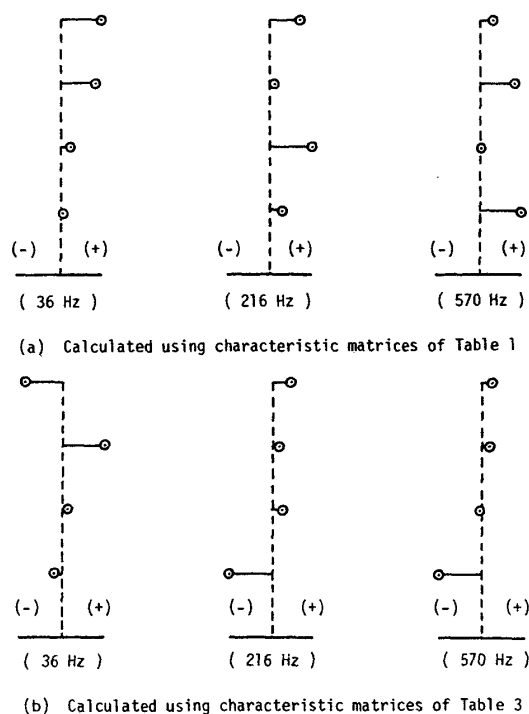


Fig. 9 Distribution of kinetic energy

Table 1あるいはTable 3の質量行列 $[M]$ から、

$$\{\delta\}^T [M] \{\delta\} \quad (19)$$

により運動エネルギーの分布を求めて比較してみた。その結果をFig.9に示す。運動エネルギーの分布は特性行列が違えば全く異なっている。Table 1の特性行列を用いて計算したときには各々の質点の所で正の運動エネルギーになっているが、Table 3の特性行列を用いて計算したときには、質点によっては負の運動エネルギーとなっている所もあり、物理的に説明できない結果となっている。

以上のように、振動系についての十分な情報が含まれていない振動応答を用いて特性行列の同定を行った場合、同定計算に使った振動応答に関しては比較的良く表すことができるが、構造の真の特性を表していない特性行列を同定することがあるので注意が必要である。

#### 4. 結 言

起振力と振動応答から振動方程式の特性行列(剛性行列、質量行列、減衰行列)を繰り返し計算で同定する方法を提案し、その方法の精度を検討するために、特性行列を与えて振動応答を計算し、その起振力と振動応答を用いて特性行列を同定して振動応答の計算に用いた特性行列と比較検討した。そして、同定された特性行列の性質についても調べた。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 繰り返し計算により起振力と振動応答から振動方程式の特性行列を同定する新しい方法を提案した。この解析方法は計算容量も小さくてすみ、また計算アルゴリズムも簡単である。

(2) 特性行列の同定計算に用いる振動応答に振動系に

対する十分な情報が含まれていないときには、計算に用いた振動応答は良く表すが、物理的に明らかに間違った特性行列を同定する場合があるので注意が必要である。

(3) 特性行列の同定計算に当たっては、振動系に対する十分な情報が含まれている振動応答を用いることが重要であり、そのためには解析周波数範囲はできるだけ広くして、しかも多点で起振した振動応答を用いることが望ましい。

(4) 本論文で提案した方法は、特性行列を同定しようとする振動系の情報が十分含まれている振動応答を用いれば精度良く特性行列が同定できる。

本論文では、特性行列を与え数値実験により振動応答を求め、その起振力と振動応答から特性行列を同定して解析法の精度を検討した。今後は、実際に振動実験を行って計測した振動応答を用いた特性行列の同定と、実験的に同定した特性行列と理論的に求めた特性行列の合成について検討する予定である。

なお、本研究は、文部省科学研究費一般研究(C)の補助を受けた。

#### 参 考 文 献

- 1) 鈴木浩平：構造物の動特性同定に関する研究(最近の研究動向と一手法の提案), 日本機械学会論文集(C編), 54巻501号(1988), pp.1035-1040.
- 2) 長松昭男：モード解析, 培風館(1985).
- 3) 日本機械学会：モード解析の基礎と応用, 丸善(1986).
- 4) 大熊政明, 長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定(第1報, 方法の提案と基礎的検討), 日本機械学会論文集(C編), 51巻464号(1985), pp.719-728.
- 5) 大熊政明, 長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定(第2報, 誤差を含むデータに対する同定法の提案), 日本機械学会論文集(C編), 52巻478号(1986), pp.1742-1749.
- 6) 大熊政明, 長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定(第3報, 実験データからの同定その1), 日本機械学会論文集(C編), 52巻484号(1986), pp.3145-3153.
- 7) 大熊政明, 長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定(第4報, 計算時間を改善した方法の提案), 日本機械学会論文集(C編), 53巻493号(1987), pp.1913-1919.
- 8) 大熊政明, 長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定(第5報, 単点励振データからの同定法の提案), 日本機械学会論文集(C編), 54巻497号(1988), pp.93-99.
- 9) 香川洸二, 藤田一誠, 太田和秀, 林 泰道：モード合成法による船体構造振動解析, 三菱重工技報, Vol. 17, No.5 (1980). pp.776-784.
- 10) 香川洸二, 藤田一誠, 柳 和久：モード合成法による船舶居住区構造の振動解析, 三菱重工技報, Vol. 24, No.3 (1987), pp.290-296.