（平成３年５月　日本造船学会春季講演会として講演）

ひずみ速度を考慮した熱弾塑性有限要素法

正員　河野俊一*　　正員　後藤浩二**
正員　豊貞雅宏***

Iterative Method for Dynamic-Thermo-Plastic-Elastic Problem by using Finite Element Method

by Shunichi Kawano, *Member*　Koji Goto, *Member*
Masahiro Toyosada, *Member*

Summary

This report proposes the iterative method for the dynamic thermo-plastic-elastic stress analysis by the finite element method (FEM), of which scheme satisfies the condition that the stress point must move on the yield surface during plastic deformation. The common engineering condition of a von Mises, isotropic hardening model and the constitutive equatin expressed as a function of a strain rate-temperature parameter R are used in this FEM program. As a example of calculation using by this FEM, we show the strain and temperature distribution around a hole for a plate loaded in the uni-axial direction.

1．緒　　言

高速変形下の材料の力学的挙動の解析は，構造物の安全性評価，適正な材料の選択等の上で非常に重要であり，過去多くの研究が報告されている。しかし，その多くは，変形速度に伴う材料定数の変化は無視されており，衝撃衝突，高速塑性加工等のような高速変形に対しては，材料特性のひずみ速度依存性および塑性変形に伴う熱影響を考慮した解析が必要であろう。

富田[1),2)]らは，ひずみ速度および塑性変形に伴う温度上昇を考慮した粘塑性構成式を提案し，その構成式の有限要素法（接線剛性法）への導入方法を示した。

一方，著者らは，材料の降伏点を表すパラメータであるStrain rate-temperature parameter R[3)]を用いた構成方程式を提案し，軟鋼の単軸引張試験によってその妥当性を検証した[4)]。

ところで，有限要素法による弾塑性解析の手法は，主としてr-min法[5)]に代表される接線剛性法に基づく直接法とradial return法[6)]等の反復法に大別できる。しかし，動的問題に対しては，収束性の観点から荷重増分を大きく取れないことおよびプログラミングの容易性から直接法による解析が多い。これに対して，反復法は動的弾塑性解析では荷重増分を大きくとれるという利点が失われるものの，反復の間にひずみ速度等に依存する材料特性を組み込むことができるので，より精度の高い解析が期待できる。

本報告は，既報[7)]で示した反復法を動的弾塑性問題へ適応できるように拡張し，さらに著者らの提案した軟鋼の構成方程式を導入するアルゴリズムを提案したものである。また，本アルゴリズムの妥当性を検証するために，衝撃軸荷重を受ける棒の衝撃応答および円孔を有する板の高ひずみ速度下における温度およびひずみの解析を行った。

2．基礎式の導出

2.1　動的有限要素法に対する反復法

荷重$\{F\}$と変位$\{u\}$の関係をモデル化してFig. 1の太実線で表し，$(n+1)$ステップにおける節点荷重を$\{F^{(n+1)}\}=\{\{F^{(n)}\}+\{\Delta F\}\}$，これに対応する節点変位を$\{u^{(n+1)}\}$，節点の加速度を$\{\ddot{u}^{(n+1)}\}$とする。ここで，Superscriptの$(n)$および$(n+1)$はFig. 1に示す荷重増分$\{\Delta F\}$に対するステップ数を，$\Delta$は$(n)$ステップから$(n+1)$への増分を表している。

仮想仕事の原理より

*　山口大学工学部
**　九州大学大学院
***　九州大学工学部

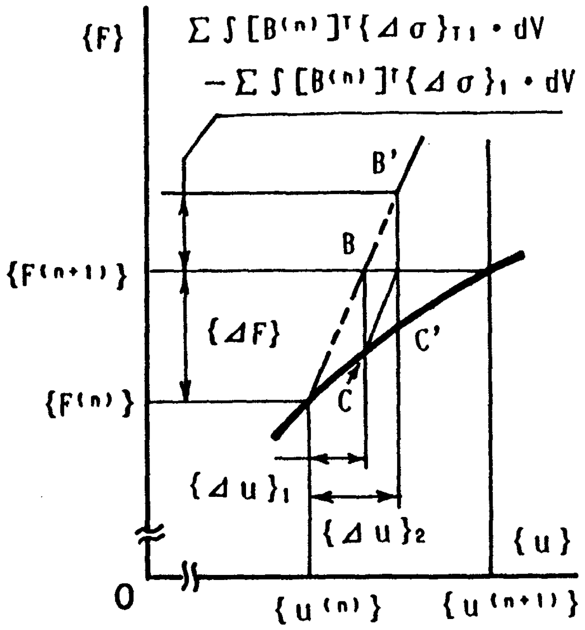

Fig. 1　Schematic illustration of iterative method.

$$\{\{F^{(n)}\}+\{\varDelta F\}\}=[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\}+\{\varDelta\ddot{u}\}\}+\Sigma\int[B^{(n+1)}]^T\{\{\varDelta\sigma\}+\{\sigma^{n}\}\}\cdot dV \qquad (1)$$

ここで，$[B^{(n+1)}]$ は $(n+1)$ ステップの変位増分をひずみ増分に変換するマトリックス，$[M]$ は質量マトリックスである。ここで，時間増分 $\varDelta t$ を十分小さく取った場合を考える。すなわち，$[B^{(n+1)}]\fallingdotseq[B^{(n)}]$ とおくと上式は次のようになる。

$$[K^{(n)}]\{\varDelta u\}+[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\}+\{\varDelta\ddot{u}\}\}=-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\sigma^{(n)}\}\cdot dV+\{\{F^{(n)}\}+\{\varDelta F\}\} \qquad (2)$$

ここで，$[K^{(n)}]$ は (n) ステップにおける材料定数および節点座標に基づく剛性マトリックスである。また，変位増分として次式で示す Newmark の β 法を用いる。

$$\left.\begin{aligned}\{\varDelta u\}&=\varDelta t\{\dot{u}^{(n)}\}+(\varDelta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\\&\quad+\beta(\varDelta t)^2\{\varDelta\ddot{u}\}\\\{\varDelta\dot{u}\}&=\varDelta t\{2\ddot{u}^{(n)}+\varDelta\ddot{u}\}/2\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

上式より，式(2)は次のようになる。

$$\begin{aligned}[\beta(\varDelta t)^2[K^{(n)}]+[M]]\{\varDelta\ddot{u}\}&=-[K^{(n)}]\{\varDelta t\{\dot{u}^{(n)}\}+(\varDelta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\}-[M]\{\ddot{u}^{(n)}\}\\&\quad-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\sigma^{(n)}\}\cdot dV+\{F^{(n)}+\varDelta F\}\end{aligned} \qquad (4)$$

式(4)の解（同図B点）の加速度 $\{\varDelta\ddot{u}\}_1$ に対応する応力増分を $\{\varDelta\sigma\}_{T1}$ とすると，式(1)より

$$\{\{F^{(n)}\}+\{\varDelta F\}\}=[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\}+\{\varDelta\ddot{u}\}_1\}+\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_{T1}\}\cdot dV \qquad (5)$$

図中矢印で示す $\{\varDelta\ddot{u}\}_1$ に対応する点 C の真の応力を $\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_1\}$ とすると，BC に相当する荷重 $\{\varDelta F\}_{BC}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\{\varDelta F\}_{BC}&=[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\}+\{\varDelta\ddot{u}\}_1\}\\&\quad+\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_{T1}\}\cdot dV\\&\quad-[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\}+\{\varDelta\ddot{u}\}_1\}\\&\quad-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_1\}\cdot dV\\&=\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_{T1}\}\cdot dV\\&\quad-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\varDelta\sigma\}_1\}\cdot dV\end{aligned}$$

荷重増分 $\{\varDelta F\}$ に $\{\varDelta F\}_{BC}$ を加えたものをみかけの荷重増分とすると，この荷重（点 B'）のもとでの加速度増分は次式を解くことによって求めることができる。

$$\begin{aligned}&[\beta(\varDelta t)^2[K^{(n)}]+[M]]\{\varDelta\ddot{u}\}_2\\&=-[K^{(n)}]\{\varDelta t\{\dot{u}^{(n)}\}+\{\varDelta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\}\\&\quad-[M]\{\ddot{u}^{(n)}\}-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\sigma^{(n)}\}\cdot dV\\&\quad+\{\{F^{(n)}\}+\{\varDelta F\}\}\\&\quad+\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_{T1}\}\cdot dV\\&\quad-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_1\}\cdot dV\end{aligned}$$

上式の解を $\{\varDelta\ddot{u}\}_2$，対応する応力増分を $\{\varDelta\sigma\}_{T2}$ として，式(5)と同様な操作を行うと，上式は

$$\begin{aligned}&[\beta(\varDelta t)^2[K^{(n)}]+[M]]\{\varDelta\ddot{u}\}_2\\&=-[K^{(n)}]\{\varDelta t\{\dot{u}^{(n)}\}+(\varDelta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\}\\&\quad-[M]\{\ddot{u}^{(n)}\}-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\sigma^{(n)}\}\cdot dV\\&\quad+\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_{T2}\}\cdot dV\\&\quad+[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\}+\{\varDelta\ddot{u}\}_2\}\end{aligned}$$

同様な操作を繰り返すと

$$\left.\begin{aligned}&[\beta(\varDelta t)^2[K^{(n)}]+[M]]\{\varDelta\ddot{u}\}_i\\&=-[K^{(n)}]\{\varDelta t\{\dot{u}^{(n)}\}+(\varDelta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\}\\&\quad-[M]\{\ddot{u}^{(n)}\}-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\sigma^{(n)}\}\cdot dV\\&\quad+\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_{Ti}\}\cdot dV\\&\quad+[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\}+\{\varDelta\ddot{u}\}_i\}\\&[\beta(\varDelta t)^2[K^{(n)}]+[M]]\{\varDelta\ddot{u}\}_{i+1}\\&=-[K^{(n)}]\{\varDelta t\{\dot{u}^{(n)}\}+(\varDelta t^2/2)\{\ddot{u}^{(n)}\}\}\\&\quad-[M]\{\ddot{u}^{(n)}\}-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\sigma^{(n)}\}\cdot dV\\&\quad+\{\{F^{(n)}\}+\{\varDelta F\}\}\\&\quad+\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_{Ti}\}\cdot dV\\&\quad-\Sigma\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\varDelta\sigma\}_i\}\cdot dV\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

式(6)の第2式から第1式を引くと

$$\begin{aligned}&[\beta(\varDelta t)^2[K^{(n)}]+[M]]\{\varDelta\ddot{u}\}_{i+1}\\&=[\beta(\varDelta t)^2[K^{(n)}]+[M]]\{\varDelta\ddot{u}\}_i+\{\{F(n)\}\end{aligned}$$

$$+\{\Delta F\}\}-\sum\int[B^{(n)}]^T\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\Delta\sigma\}_i\}\cdot dV$$
$$-[M]\{\{\ddot{u}^{(n)}\}+\{\Delta\ddot{u}\}_i\} \quad (7)$$

となる。式(7)が反復法による動的弾塑性有限要素法の基礎式であり，$i=0$ では $\{\Delta\ddot{u}\}_0=\{\Delta\sigma\}_0=0$ とおけばよい。適当な収束条件，例えば $|\{\Delta u\}_{i+1}-\{\Delta u\}_i|$≦許容値を満足すると，式(7)は近似的に式(1)になる。

2.2 既知のひずみ増分のもとでの応力増分の決定法

式(7)の計算において，Fig. 1 の変位増分 $\{\Delta u\}_i$ に対応する応力増分 $\{\Delta\sigma\}_i$，換言すると与えられたひずみ増分 $\{\Delta\varepsilon\}_i$ のもとで応力増分を求める必要がある。

本報告では，動的問題においても Reuss の仮定および塑性ポテンシャルとして Mises の式が成立すると仮定し，等方性材料についてひずみ増分から応力増分を求める式を以下のように導く。

塑性仕事増分 dW^p および Mises の式は次のように定義されている。

$$dW^p=\{\sigma\}^T\{d\varepsilon^p\}=\bar{\sigma}\cdot d\bar{\varepsilon}^p \quad (8)$$
$$\bar{\sigma}=f(\{\sigma\})=[\{\sigma\}^T[S]\{\sigma\}]^{1/2} \quad (9)$$
$$[S]=\begin{bmatrix}[S_0] & [0]\\ [0] & [S_1]\end{bmatrix}$$
$$[S_0]=\begin{bmatrix}1 & -1/2 & -1/2\\ & 1 & -1/2\\ \text{Sym.} & & 1\end{bmatrix}$$
$$[S_1]=3[I]$$
$[I]$=単位マトリックス

ここで，$\bar{\sigma}$ は相当応力，$\bar{\varepsilon}^p$ は相当塑性ひずみ，$f(\{\sigma\})$ は塑性ポテンシャルであり，式を簡略化するために $f=f(\{\sigma\})$ と表す。また関数 $f(\{X\})$ は $[\{X\}^T[S]\{X\}]^{1/2}$ を意味するものとする。式(8)，Reuss の仮定および Mises の式より，塑性ひずみ増分は次式で与えられる。

$$\{d\varepsilon^p\}=\{d\varepsilon\}-[D^e]^{-1}\{d\sigma\}=(d\bar{\varepsilon}^p/f)[S]\{\sigma\} \quad (10)$$

ここで，$[D^e]$ は弾性応力－ひずみマトリックスである。相当応力は，単軸試験より得られた次の関数 H に従うものとする。

$$\bar{\sigma}=f(\{\sigma\})=H(\bar{\varepsilon}^p, d\bar{\varepsilon}^p/dt, T) \quad (11)$$

$d\bar{\varepsilon}^p/dt$ は相当塑性ひずみ速度，T は温度であり，式(9)，(10)はいずれも古典的塑性力学で定義された関数である。すなわち，本研究では動的問題においても，微小変形内であれば古典的塑性力学が適用できると仮定した。

式(8)で示す塑性仕事増分を次のように差分表示する。なお，式の煩雑さを避けるため，式(7)で示したサフィックス i は省略する。

$$\Delta W^p=\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\Delta\sigma\}\}^T\{\Delta\varepsilon^p\}$$
$$=\bar{\sigma}^{(n+1)}\cdot\Delta\bar{\varepsilon}^p=f^{(n+1)}\cdot\Delta\bar{\varepsilon}^p \quad (12)$$

式(12)を満足するように式(10)を差分表示すると，次のようになる。

$$\{\Delta\varepsilon^p\}=\{\Delta\varepsilon\}-[D^e]^{-1}\{\Delta\sigma\}$$
$$=(\Delta\bar{\varepsilon}^p/f^{(n+1)})[S]\{\{\sigma^{(n)}\}+\{\Delta\sigma\}\} \quad (13)$$

ここで，次式で示すパラメータを導入する。

$$\lambda=\Delta\bar{\varepsilon}^p/f^{(n+1)} \quad (14)$$

式(14)を用いて式(13)を変形すると

$$[[I]+\lambda[D^e][S]]\{\Delta\sigma\}$$
$$=[D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\}-[[I]+\lambda[D^e][S]]\{\sigma^{(n)}\}$$

上式より

$$\{\Delta\sigma\}=[\bar{C}]\{[D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\}\}-\{\sigma^{(n)}\} \quad (15)$$
$$[\bar{C}]=[[I]+\lambda[D^e][S]]^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}[C_0] & [0]\\ [0] & [C_1]\end{bmatrix}$$
$$[C_0]=\frac{1}{1+3G\lambda}\begin{bmatrix}1+G\lambda & G\lambda & G\lambda\\ & 1+G\lambda & G\lambda\\ \text{Sym.} & & 1+G\lambda\end{bmatrix}$$
$$[C_1]=\{1/(1+3G\lambda)\}[I]$$

ただし，G は横弾性係数である。$[\bar{C}]^T[S][\bar{C}]=\{1/(1+3G\lambda)^2\}[S]$ となるので，式(14)より $(n+1)$ ステップの相当応力は次のように λ の関数で表される。

$$\bar{\sigma}^{(n+1)}=f(\{\sigma^{(n)}\}+\{\Delta\sigma\})$$
$$=\{1/(1+3G\lambda)\}f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\}) \quad (16)$$

式(14)および式(16)より，相当塑性ひずみ増分は次式で表される。

$$\Delta\bar{\varepsilon}^p=\{\lambda/(1+3G\lambda)\}f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\}) \quad (17)$$

式(11)と式(16)の比較より，与えられたひずみ増分のもとでの応力増分が計算できる。すなわち

$$H(\bar{\varepsilon}^{p(n)}, \Delta\bar{\varepsilon}^p, \Delta\bar{\varepsilon}^p/\Delta t, T)=\bar{\sigma}^{(n+1)} \quad (18)$$

式(16)，(17)より式(18)は次のように表される。

$$H(\bar{\varepsilon}^{p(n)}, \Delta\bar{\varepsilon}^p, \Delta\bar{\varepsilon}^p/\Delta t, T)$$
$$=f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})-3G\Delta\bar{\varepsilon}^p \quad (19)$$

ひずみ増分が既知の場合，$f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})$ は一定になるので，式(19)の右辺は $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ に関して減少関数となる。したがって，式(19)が解をもつ，すなわち降伏する条件は

$$f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})\geqq H(\bar{\varepsilon}^{p(n)}, T) \quad (20)$$

となる。式(19)の右辺は相当塑性ひずみ増分 $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ の関数であるので，左辺が相当ひずみの関数で表され，さらにその関数が相当塑性ひずみに関して，$dH/d\bar{\varepsilon}^p>-3G$ を満足していれば，式(19)の解が存在する。

この $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ と式(17)より求めた λ を，式(15)および式(16)に代入することによって，応力増分および相当応力が求まる。なお，$\{\Delta\varepsilon\}$ の全てが既知でない場合，すなわち平面応力については付録を参照されたい。

2.3 ひずみ速度および温度を考慮した構成方程式による相当塑性ひずみ増分の決定法

著者らは，Bennet [3] らの提唱した Strain rate-temperature parameter R を用いて，次式で示す軟鋼の構成方程式を提案した[4]。

$$R=T\cdot\ln(A/\dot{\varepsilon}) \tag{21}$$

i) 初期降伏応力 σ_Y

$$\sigma_Y=B\cdot\exp(C/R) \tag{22}$$

ii) 塑性流れ域

$$\varepsilon_k=D\cdot\{B\exp(C/R)\}^p \tag{23}$$

iii) 加工硬化域

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=\alpha_1\cdot(\varepsilon/\alpha_2)^{(1/n)}\\&\alpha_1=B\cdot\exp(C/R)\\&\alpha_2=D\cdot\{B\exp(C/R)\}^p\\&n=a_0+a_1\cdot\alpha_1+a_2\cdot\alpha_1^2\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ここで，T：温度（K）

$A, B, C, D, p, a_0, a_1, a_2$：材料定数

$\dot{\varepsilon}$：ひずみ速度

ε_k：加工硬化開始点のひずみ

式(21)～(24)有限要素法に組み込むために，式(21)に示すひずみ速度を次のように仮定する。

$$\dot{\varepsilon}=\begin{cases}(\Delta\bar{\sigma}/\Delta t)/E & \text{(初期降伏)}\\ \Delta\bar{\varepsilon}^p/\Delta t & \text{(塑性流れ域，加工硬化域)}\end{cases}$$

ただし，E はヤング率である。上式を用いると，初期降伏の判定条件は次のようになる。

$$\Delta\bar{\sigma}=f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})-\bar{\sigma}^{(n)}$$

$$R=T\cdot\{\ln(EA)-\ln(\Delta\bar{\sigma}/\Delta t)\}$$

$$B\cdot\exp(C/R)\leqq f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\}) \tag{25}$$

また，塑性流れ域においては

$$R=T\cdot\{\ln(A)-\ln(\Delta\bar{\varepsilon}^p/\Delta t)\}$$

$$B\cdot\exp(C/R)=f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})-3G\Delta\bar{\varepsilon}^p \tag{26}$$

なお，$\Delta\bar{\varepsilon}^p$ が次式を満足しない場合は，加工硬化域の構成方程式を用いる。

$$\Delta\bar{\varepsilon}^p+\bar{\varepsilon}^{p(n)}\leqq D\cdot\{B\exp(C/R)\}^p$$

加工硬化域では，式(24)より

$$\begin{aligned}&\alpha_1\cdot\{(\Delta\bar{\varepsilon}^p+\bar{\varepsilon}^{p(n)})/\alpha_2\}^{(1/n)}\\&\quad=f([D^e]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})-3G\Delta\bar{\varepsilon}^p\end{aligned} \tag{27}$$

式(26)，(27)を陽に解くことは困難であるので，ニュートン法等の適当な数値計算を用いる必要がある。

Fig. 2 に計算の流れ図を示す。なお，本研究では同図の A ループが収束した，すなわち式(7)が収束した後に塑性ひずみ増分が熱に変換されると仮定して，Crank-Nicolson 法[8]により熱伝導問題を解いた。

3. 計算例

本解析法の収束性を確認するために，Fig. 3 に示すように，棒の先端に質量 M の重錘が衝突した場合の動的応答について，式(7)の β を 1/4 として次の条件で計算を行った。なお，簡単のため材料は温度およびひずみ速度に無依存と仮定した。

L：2 m，断面積：20 cm²，

E：2.0×10^5 MPa，H'：$E/100$，σ_Y：$E/1000$

密度：7.85 g/cm³，M：100 kg

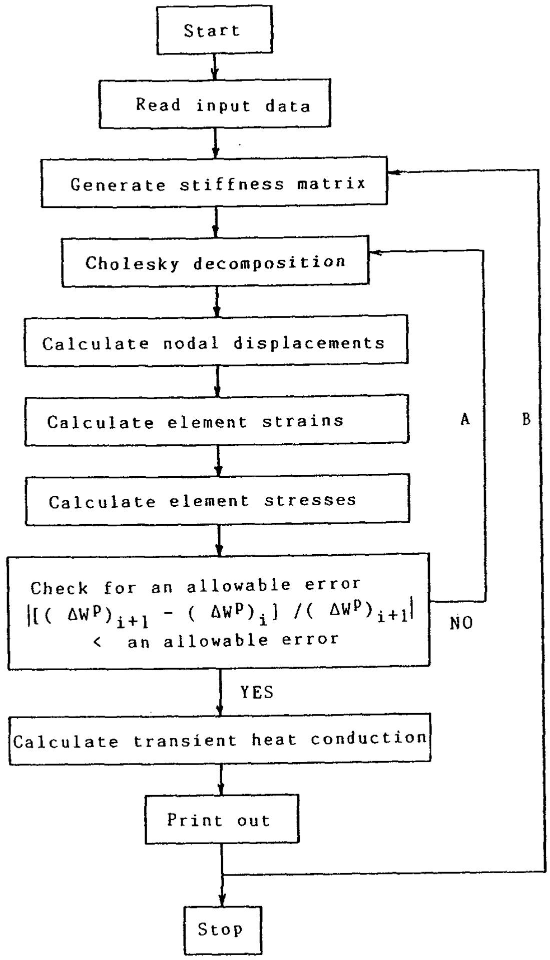

Fig. 2 Flow chart of iterative method.

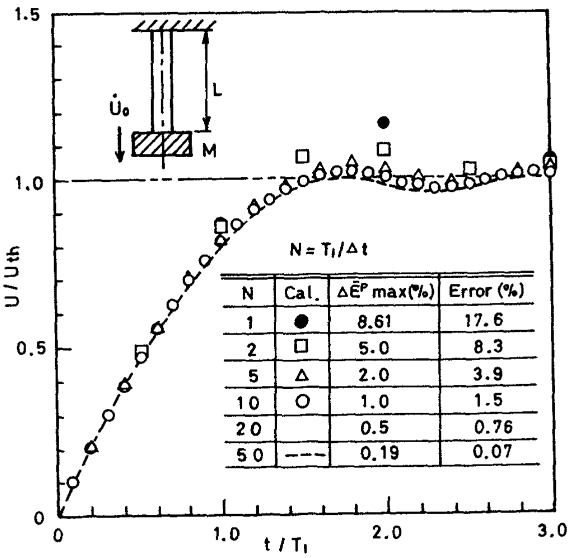

Fig. 3 Dynamic plastic-elastic response of bar with impact of rigid body.

初速度 U_0：47 m/sec

先端に重錘をもつ弾性棒の1次の固有周期を T_1 とすると，$T_1/\Delta t$ が 30 の場合，同図の破線で示すように最大変位

は理論解と比較して約 0.07 %の誤差内にあり，極めて良好な一致が見られた。また，$T_1/\Delta t$ を小さく，すなわち時間間隔 Δt を大きく取ると，それにつれて誤差は大きくなるが，いずれの計算においても発散等の異常な現象はみられず，本計算法が安定であることが確認できた。このことから，反復法による動的弾塑性問題でも，誤差をある程度認容すれば（例えば 5 %）時間間隔を大きくとれることがわかる。

次に，中央に円孔を有する板の単軸引張荷重下の円孔周辺のひずみおよび温度分布を解析した。なお，解析モデルの対称性から，Fig. 4 に示すように板の 1/4 について要素分割を行った。

構成方程式に含まれる材料定数を下記に示す。

$A=1.0\times10^9$　$B=197.4$ MPa　$C=4114$ (K)

$D=2.9\times10^4\,(1/\mathrm{MPa})^{-p}$　$p=-2.333$

$a_0=6.82$　$a_1=-0.0339\,(1/\mathrm{MPa})$

$a_2=7.08\times10^{-4}\,(1/\mathrm{MPa})^2$

また，塑性ひずみエネルギーの熱容量への変換率が不明であるので，本解析では塑性ひずみが 100 %熱に変換されるとして計算した。

Fig. 5 に円孔部の温度分布を示す。引張速度に無関係に応力集中部（A 部）の温度が高くなっているが，引張速度 $\dot{U}/L$ が 0.01/sec と遅い場合は熱が十分に拡散するため，円孔上の温度勾配はゆるやかになっている。また，$\dot{U}/L$ が 10.0/sec と早くなると，B 部の温度がその周辺の温度よりわずかに上昇しており，熱が十分に拡散していないことがわかる。

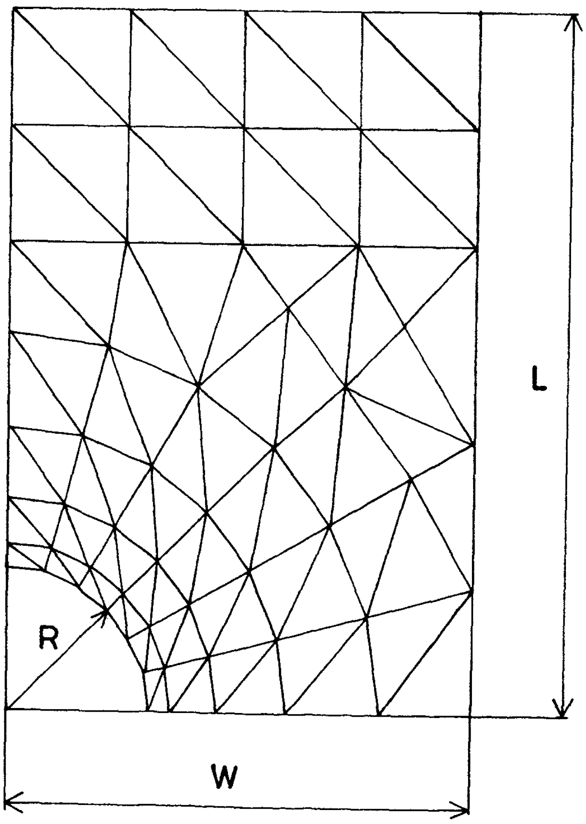

Fig. 4 Finite element idealization of rectangular plate with a hole.

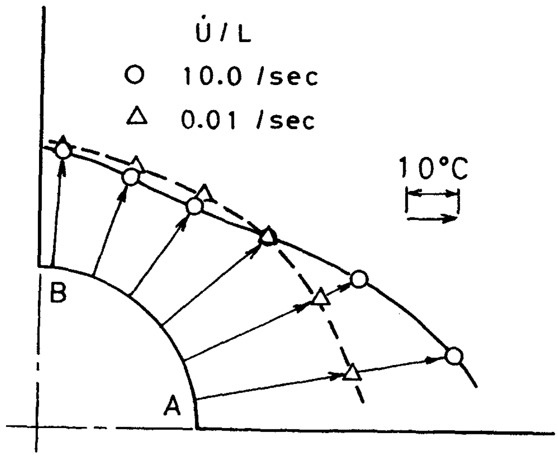

Fig. 5 Temperature distribution around a hole

Fig. 6 に示す円孔部のひずみについても A 部が大きくなり，また引張速度が大きいほどひずみが高くなっている。この現象は温度上昇による材料の軟化によって生じたものと推定できる。このことから，鋭い切欠きをもつ構造物が衝撃荷重を受ける場合，切欠き先端部では高ひずみ速度となるので，温度の影響が無視できないものと考えられる。

4. 結　　言

ひずみ速度を考慮した動的弾塑性有限要素法の反復法によるアルゴリズムを提案した。さらに，温度をも考慮した構成方程式を本有限要素法に導入し，棒の弾塑性衝撃応答および円孔を有する板の円孔部の温度およびひずみを解析して，本有限要素法のアルゴリズムの妥当性を検証した。得られた結果を要約すると次のようになる。

1) 軸衝撃荷重を受ける棒の動的弾塑性応答の解析において，Newmark の係数 β を 1/4 にとることにより，極めて安定な解を得ることができた。このことから，反復法に

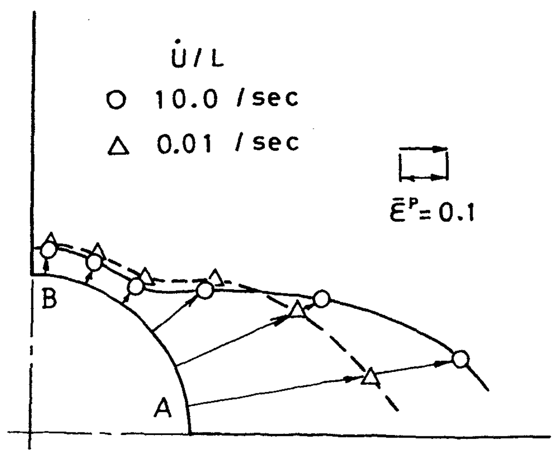

Fig. 6 strain distribution around a hole

おいても誤差をある程度ゆるせば計算時間が大幅に短縮できることがわかった。

2) 引張速度を大きくとると，塑性変形による発熱により応力集中部において温度が上昇して材料が軟化し，これによりひずみの集中度が大きくなる結果が得られた。このことから，鋭い切欠きをもつ構造物が衝撃荷重を受ける場合，切欠き先端部では高ひずみ速度となるので，動的弾塑性問題では温度の影響は無視できないものと考えられる。

参考文献

1) 富田佳宏，進藤明夫，朝日誠治，後藤広和：ひずみ速度依存性平面ひずみブロックの引張変形挙動の解析，日本機械学会論文集，54巻，501号，"(1988.5)，p.1124.
2) 秋萬錫，富田佳宏，進藤明夫：三次元ブロックの引張り下での熱粘塑性変形挙動，日本機械学会論文集，55巻，516号，A (1989.8)，p.1872.
3) P. E. Bennet, G. M. Sinclair: Parameter Representation of Low-Temperature Vield Behavior of Body-Centered Cubic Transition Metals, ASME paper. 65-MET-11 (1965).
4) 豊貞雅宏，後藤浩二：ひずみ速度及び温度を考慮した軟鋼の構成方程式について，西部造船会会報，第81号 (1991)印刷中.
5) 例えば 山田嘉昭：塑性・粘弾性，有限要素法の基礎と応用シリーズ6，倍風館 (1980).
6) 例えば H. L. Schreyer, R. F. Kulak, J. M. Kramer: Accurate Numerical Solutions for Elastic-Plastic Models, J. Pressure Vessel Technology, ASME Vol. 101 (1979. 8), p. 226.
7) 河野俊一，上西 研，種田元治，三好哲彦：反復法による弾塑性有限要素法の一解法，日本機械学会論文集，55巻，511号，A (1989.3)，p.523.
8) 有限要素法ハンドブックII 応用編，倍風館(1983)，p.682.

付録 平面応力に対する補足

xy 面に平行に外力が作用し，この面と直角方向に z 軸をとる。塑性状態下の平面応力では，$\Delta\varepsilon_z$ は節点変位増分から一義的に決定することができないので，式(19)の $f([D]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}-\alpha^{(n)}\})$ は λ の関数となる。したがって，式(19)から直接 $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ を求めることができないが，式(17)にみられるように $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ も λ の関数であるので，$\Delta\bar{\varepsilon}^p$ の代わりに λ を求めれば応力増分等が計算できる。ここでは，式(16)で示す相当応力を λ の関数として陽に示すことにする。式(15)および $\Delta\sigma_z=0$ より

$$\Delta\varepsilon_z=-\{\nu/(1-\nu)\}(\Delta\varepsilon_x+\Delta\varepsilon_y)-\frac{(1-2\nu)\lambda}{2(1-\nu)+E\lambda}\left[\frac{E}{1-\nu}(\Delta\varepsilon_x+\Delta\varepsilon_y)+\sigma_x^{(n)}+{}_y^{(n)}\right] \tag{A.1}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&A=\frac{E}{1-\nu}(\Delta\varepsilon_x+\Delta\varepsilon_y)+\sigma_x^{(n)}+\sigma_y^{(n)}\\
&\Delta\varepsilon_z=\Delta\varepsilon_z^e+\Delta\varepsilon_z^p\\
&\Delta\varepsilon_z^e=-\{\nu/(1-\nu)\}(\Delta\varepsilon_x+\Delta\varepsilon_y)\\
&\Delta\varepsilon_z^p=-\frac{(1-2\nu)\lambda}{2\{(1+\nu)G\lambda+(1-\nu)\}}A\\
&\{\Delta\varepsilon^e\}=\{\Delta\varepsilon_x\ \Delta\varepsilon_y\ \Delta\varepsilon_z^e\ \Delta\gamma_{xy}\}^T
\end{aligned} \tag{A.2}$$

とおく。式(A.2)中の添字の e および p は，弾性成分および塑性成分の意味でなく便宜的につけたものである。式(A.2)より $f([D]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})$ は以下に示すようになる。なお $[S]$ および $[D]$ は，$\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ であるので次の式を用いる。

$$[S]=\begin{bmatrix}1 & -1/2 & -1/2 & 0\\ & 1 & -1/2 & 0\\ & \text{Sym.} & 1 & 0\\ & & & 3\end{bmatrix}$$

$$[D]=\frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix}\frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0\\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0\\ \text{Sym.} & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0\\ & & & 1/2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&f^2([D]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})\\
&=\{[D]\{\Delta\varepsilon^e\}+\{\sigma^{(n)}\}\}^T[S]\{[D]\{\Delta\varepsilon^e\}+\{\sigma^{(n)}\}\}\\
&\quad+\frac{(1-2\nu)G\lambda\{(2-\nu)G\lambda+(1-\nu)\}}{\{(1+\nu)G\lambda+(1-\nu)\}^2}A^2
\end{aligned} \tag{A.3}$$

式(A.3)から明らかなように，右辺の第2項のみが λ の関数となる。後で述べるが，式(16)は $\lambda\geqq 0$ において減少関数であるので，上式右辺の第1項の値によって降伏判定を行えばよい。すなわち

$$[[D]\{\Delta\varepsilon^e\}+\{\sigma^{(n)}\}\}^T[S]\{[D]\{\Delta\varepsilon^e\}+\{\sigma^{(n)}\}]^{1/2}\geqq H(\bar{\varepsilon}^{p(n)},T) \tag{A.4}$$

さらに

$$\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_x=\frac{E}{(1-\nu^2)}\Delta\varepsilon_x+\frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\Delta\varepsilon_y+\sigma_x^{(n)}\\
&\bar{\sigma}_y=\frac{E\nu}{(1-\nu^2)}\Delta\varepsilon_x+\frac{E}{(1-\nu^2)}\Delta\varepsilon_y+\sigma_y^{(n)}\\
&\bar{\tau}_{xy}=G\Delta\gamma_{xy}+\tau_{xy}^{(n)}
\end{aligned}$$

とおくと，式(A.2)右辺の第1式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\{[D]\{\Delta\varepsilon^e\}+\{\sigma^{(n)}\}\}^T[S]\{[D]\{\Delta\varepsilon^e\}+\{\sigma^{(n)}\}\}\\
&=\bar{\sigma}_x^2+\bar{\sigma}_y^2-\bar{\sigma}_k\bar{\sigma}_y+3\,\bar{\tau}_{xy}^2\\
&=B^2
\end{aligned} \tag{A.5}$$

式(A.2)の第1式は

$$\begin{aligned}
A&=\{E/(1-\nu^2)\}(\Delta\varepsilon_x+\nu\Delta\varepsilon_y)+\sigma_x^{(n)}\\
&\quad+\{E/(1-\nu^2)\}(\nu\Delta\varepsilon_x+\Delta\varepsilon_y)+\sigma_y^{(n)}\\
&=\bar{\sigma}_x+\bar{\sigma}_y
\end{aligned} \tag{A.6}$$

となるので，式(A.3)の右辺の第二項は

$$\frac{(1-2\nu)G\lambda\{(2-\nu)G\lambda+(1-\nu)\}}{\{(1+\nu)G\lambda+(1-\nu)\}^2}A^2$$
$$=\left[\frac{(1-\nu)(1+3G\lambda)}{2\{(1+\nu)G\lambda+(1-\nu)\}}\right]^2\times A^2-(1/4)A^2 \quad (A.7)$$

式 A.3), (A.5), (A.7) より式(16)で示す相当応力は次のようになる。

$$\bar{\sigma}=\{1/(1+3G\lambda)\}f([D]\{\Delta\varepsilon\}+\{\sigma^{(n)}\})$$
$$=\left[\frac{(1-\nu)^2}{4\{(1+\nu)G\lambda+(1-\nu)\}^2}A^2+\frac{4B^2-A^2}{4(1+3G\lambda)^2}\right]^{1/2} \quad (A.8)$$

式(A.5), (A.6) より

$$4B^2-A^2=4(\bar{\sigma}_x^2+\bar{\sigma}_y^2-\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y+3\,\bar{\tau}_{xy}^2)-[\bar{\sigma}_x+\bar{\sigma}_y]^2$$
$$=3\{(\bar{\sigma}_x-\bar{\sigma}_y)^2+4\,\bar{\tau}_{xy}^2\}\geqq 0$$

A, B は λ とは無関係であるので, 式(A.8)より $\bar{\sigma}$ が λ に関して減少関数となることがわかる。