(平成3年5月 日本造船学会春季講演会において講演)

塑性節点法による繰り返し荷重下の骨組構造の弾塑性解析

正員 藤久保 昌 彦* 正員 白 勇**
正員 渡 辺 規 正*** 正員 上 田 幸 雄****

Elastic-Plastic Analysis of Framed Structures under Cyclic Loads by Plastic Node Method

by Masahiko Fujikubo, *Member* Yong Bai, *Member*
Norimasa Watanabe, *Member* Yukio Ueda, *Member*

Summary

Extending the basic theory of Plastic Node Method (PNM), a new method of elastic-plastic analysis of framed structures considering combined strain-hardening effects is developed. The proposed method is applied to two and three-dimensional frames under cyclic loads. In the PNM, a generalized hinge mechanism (plastic node) based on the flow theory of plasticity is introduced at a node of beam-column elements. A strain-hardening rate for the plastic node is obtained by equating a plastic work done at the plastic node with that evaluated in the actual elastic-plastic stress distribution in the element. The resulting elastic-plastic stiffness matrix can be derived simply by matrix calculation. The numerical results are compared with those calculated by FEM program MARC. It was shown that the proposed method provides very accurate results in a short computation time.

1. 緒 言

骨組構造の弾塑性挙動を解析する上で，塑性変形を塑性関節に縮約するいわゆるヒンジ法は，煩雑な剛性積分から解放されるため，計算効率上非常に有用な方法である。ヒンジ法に基づく骨組構造の古典的塑性解析では，仮想変形法やモーメント分配法などにより崩壊荷重と崩壊機構が計算された[1)]。しかしこれらの計算では構造物が弾性から順次塑性関節を生じて崩壊に至る挙動を詳しく知ることができない，塑性関節における内力の塑性相関関係を正しく考慮できない，さらに歪硬化を考慮できない，といった適用上の限界があった。

著者らの一人，上田は塑性流れ理論に基づく塑性関節機構を考案し，これを一次元有限要素の節点に挿入することにより，ヒンジ法を骨組構造に一般的に適用できる弾塑性解析理論を展開した[2),3)]。この理論を用いると，塑性相関関係を正確に考慮しながら崩壊に至るまでの塑性関節の形成順序と構造物の変形を追跡することができる。また関節における塑性変形の大きさは塑性流れ則にしたがって合理的に決定される。この理論は後に，シェル要素や実体要素など任意の有限要素に適用できるよう一般化され，塑性節点法（Plastic Node Method, PNM）と名づけられた[4)~7)]。さらに塑性関節を節点だけでなく，要素内部の任意の点に発生させることも可能となった[8),9)]。

最近，著者らは等方硬化を考慮できるようこの塑性節点法を拡張した[10)]。通常の有限要素法では，塑性歪が要素内に分布するという仮定の基に理論が組み立てられている。これに対し，塑性節点法では要素の内部は常に弾性で，塑性歪は節点に生じる一般化された塑性関節機構に縮約される。すなわち塑性変形は歪ではなく変位の次元で取り扱われる。このことが，塑性節点法を含めてヒンジ法を基礎とする弾塑性解析において歪硬化の考慮を困難にしてきた。そこで，著者らは要素の内部に実際に生じる塑性歪場を内力分布から別途推定し，次にこの塑性域の影響を，塑性仕事が等価になるよう節点に縮約することにより，塑性関節に対して有効な歪硬化係数（節点変位歪硬化係数）を定式化した。これにより，ヒンジ法における歪硬化の考慮を可

* 広島大学工学部
** デンマーク工科大学
*** 出光エンジニアリング(株)(研究当時広島大学大学院)
**** 大阪大学溶接工学研究所

能にした。

ところで，波浪荷重や地震荷重のような繰り返し荷重を受ける骨組構造の弾塑性挙動を調べるためには，等方硬化だけでなく，Baushinger 効果を表す移動硬化，あるいはこれと等方硬化を組み合わせた複合硬化を考慮する必要がある。

本論文では，骨組構造を対象として複合硬化を考慮した塑性節点法の理論展開を行い，繰り返し荷重を受ける平面および立体骨組構造の弾塑性解析を高精度かつ効率的に行い得る手法を提案する。要素の塑性化は断面力表示の全断面塑性条件に基づいて判定する。始めにこのような塑性条件に有効な等方および移動硬化係数を導く。次に要素内部の歪硬化の影響を節点に縮約して，塑性節点に対する歪硬化係数を求め，弾塑性剛性方程式を定式化する。最後に繰り返し荷重を受ける平面骨組と立体骨組の弾塑性解析を行い，提案理論の有効性を明らかにする。本理論によれば，複合硬化を考慮した骨組要素の弾塑性剛性マトリックスをマトリックス演算のみで求めることができる。

なお文献 8)～10) では〝塑性選点法〟なる名称が用いられている。この理論は，それまで節点のみで塑性化を判定していた塑性節点法を，要素内部の任意の位置で判定できるよう一般化したものである。しかし，塑性変形を節点に縮約する定式化の手順は塑性節点法と同じである。この特徴ある塑性変形の取扱いを明確に表すため，著者らによる一連の提案理論を改めて〝塑性節点法〟と呼ぶことにする。

2. 複合硬化を考慮した骨組構造の弾塑性解析理論

2.1 基本的仮定

複合硬化を考慮した骨組構造の弾塑性解析の基礎理論を導くにあたって，以下の基本的仮定を設ける。

（1） 軸変位およびねじり角を1次式で，また曲げたわみを3次式で内挿した梁・柱要素を用いる。

（2） 変形は微小とする。

（3） 荷重は集中荷重とする。

（4） 断面の塑性化は，断面力表示の全断面塑性条件で判定する。

（5） 剪断たわみと塑性化に対する剪断力の影響は無視する。

（6） 荷重の作用点や部材結合部などの可能な降伏断面間を単位要素とし，要素の降伏は節点で判定する。

2.2 塑性条件と断面歪硬化係数

Fig. 1 に梁・柱要素 ij を示す。上記仮定により，本理論では要素の断面力の極大値は節点に生じる。したがって完全弾塑性体を仮定すると，塑性化は節点のみに生じ，要素内部は常に弾性挙動する。しかし，歪硬化を考慮すると，降伏した節点の断面力がさらに増加するため Fig. 1 に斜線で示すように塑性域が要素内部にまで広がる。ここでは，

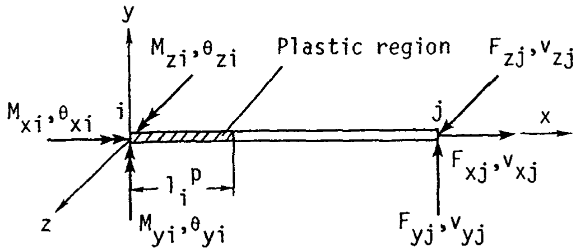


Fig. 1 Beam-column element in space frame

このような塑性域における個々の断面の全断面塑性条件と，これに複合硬化を考慮するために必要な歪硬化係数を，一般化応力（断面力）と一般化歪（曲率など）の関数として定式化する。以下では一般化応力を $\{\sigma\}$ で，また一般化歪を $\{\varepsilon\}$ で表す。

2.2.1 全断面塑性条件

梁・柱要素 ij の一般化応力と一般化歪をそれぞれ次式のように定義する。

$$\{\sigma\}=\{N\ M_x\ M_y\ M_z\}^T \tag{1}$$

$$\{\varepsilon\}=\{e\ \omega\ \kappa_y\ \kappa_z\}^T \tag{2}$$

ここで N, M_x, M_y, M_z；軸力，ねじりモーメントおよび y, z 軸回りの曲げモーメント

$e, \omega, \kappa_y, \kappa_z$；平均軸歪，ねじり率および y, z 軸回りの曲率

複合硬化を考慮した塑性条件は次式のように書き表すことができる。

$$f=Y(\{\sigma-\alpha\})-\sigma_0(\bar{\varepsilon}^p)=0 \tag{3}$$

ここで，Y は全断面降伏関数であり，$\{\alpha\}$ は Fig. 2 に示す移動硬化による降伏曲面の原点の移動を表すベクトルである。すなわち，

$$\{\alpha\}=\{\alpha_N\ \alpha_{Mx}\ \alpha_{My}\ \alpha_{Mz}\}^T \tag{4}$$

となり，一般化応力 $\{\sigma\}$ と同一の次元を有する。一方，等方硬化によって降伏曲面は塑性変形とともに膨張する。σ_0 はこの降伏曲面の大きさを表す正のパラメータであり，一般

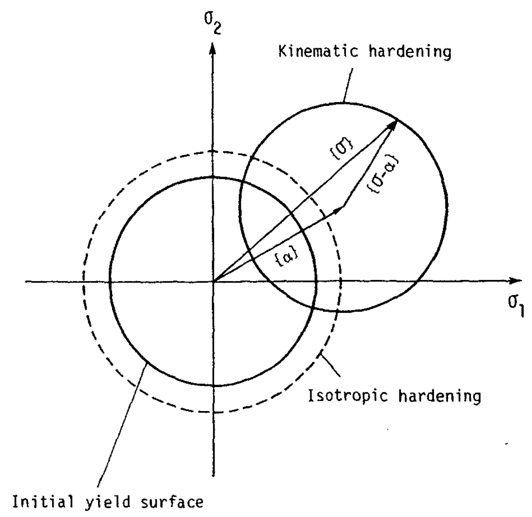


Fig. 2 Yield surface

化相当塑性歪 $\bar{\varepsilon}^p$ の関数となる。$\bar{\varepsilon}^p$ は次式で定義される増分量 $d\bar{\varepsilon}^p$ の累積値である。

$$\{\sigma-\alpha\}^T\{d\varepsilon^p\}=\sigma_0 d\bar{\varepsilon}^p \tag{5}$$

ここで，$\{d\varepsilon^p\}=\{de^p d\omega^p d\kappa_y{}^p d\kappa_z{}^p\}^T$

；一般化塑性歪増分

以下に，矩形断面と円筒断面について降伏関数 Y を具体的に示す。

最も基本的な平面骨組における矩形断面部材の場合，全断面塑性条件は次式で与えられる。

$$n^2+|m|-1=0 \tag{6}$$

ここで，$n=(N-\alpha_N)/N_Y,\ m=(M-\alpha_M)/M_Y$

N_Y, M_Y；材料の降伏強度より求めた全断面塑性軸力およびモーメント

付録1の手順に従って式(6)を2次形式に改めると式(3)の降伏関数 Y およびパラメータ σ_0 がそれぞれ次の形で求められる。

$$Y^2=N_Y{}^2(n^2+0.5\,\mathrm{m}^2+\sqrt{0.25m^4+n^2m^2})$$
$$\sigma_0=N_Y\ \text{（但し，初期降伏時）} \tag{7}$$

一方，立体骨組における円筒部材の場合，全断面塑性条件は，ねじりモーメントの影響を無視すると

$$\sqrt{m_y^2+m_z^2}=\cos(\pi n/2) \tag{8}$$

となる。ここで，$m_y=(M_y-\alpha_{My})/M_Y$,

$m_z=(M_z-\alpha_{My})/M_Y$

両辺を自乗し，さらにねじりモーメントの項を付加して降伏関数を次のように仮定する。

$$Y^2=N_Y{}^2(m_x{}^2+m_y{}^2+m_z{}^2+\sin^2(\pi n/2)) \tag{9}$$

ここで，$m_x=(M_x-\alpha_{Mx})/M_{Yx}$

M_{Yx}；全塑性ねじりモーメント

2.2.2 塑性負荷条件

式(3)を満足して降伏した断面では，負荷状態において次の関係を満足せねばならない。

$$df=\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{d\sigma\}-\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{d\alpha\}-\frac{d\sigma_0}{d\bar{\varepsilon}^p}d\bar{\varepsilon}^p=0 \tag{10}$$

ここで，次式のように定義される歪硬化係数 H_{sk}' および H_{si}' を導入する。

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{d\alpha\}=H_{sk}'d\bar{\varepsilon}^p \tag{11}$$

$$d\sigma_0=H_{si}'d\bar{\varepsilon}^p \tag{12}$$

この時，式(10)は次のように表される。

$$df=\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{d\sigma\}-(H_{sk}'+H_{si}')d\bar{\varepsilon}^p=0 \tag{13}$$

H_{sk}' および H_{si}' はそれぞれ降伏した断面全体に生じる移動硬化と等方硬化の影響を表す歪硬化係数である。一方，単軸試験から得られる材料の移動硬化係数 H_k' および等方硬化係数 H_i' はいずれも断面内の一つの点の応力と歪の関係を表している。そこでこれらと区別して，H_{sk}' および H_{si}' をそれぞれ断面移動硬化係数および断面等方硬化係数と呼ぶことにする。

これらの断面歪硬化係数は一般化塑性歪によって断面内の個々の点に生じる歪硬化の影響を断面にわたって積分することにより，以下のように求められる。

2.2.3 断面等方硬化係数

まず一般化塑性歪増分 $\{d\varepsilon^p\}$ が与えられた場合に等方硬化によって生じる一般化応力の変化 $\{d\sigma\}$ を考える。ねじりモーメントを考慮すると，Fig.1の梁・柱要素の断面内の点 (y,z) における応力増分 $\{d\sigma^*\}$ と塑性歪増分 $\{d\varepsilon^{p*}\}$ は次のように表される。

$$\{d\sigma^*\}=\{d\sigma_x\ d\tau\}^T,$$
$$\{d\varepsilon^{p*}\}=\{d\varepsilon_x^p\ d\gamma^p\}^T \tag{14}$$

ここで，$d\sigma_x, d\varepsilon_x{}^p$；軸力および曲げモーメントによって生じる軸応力増分および塑性軸歪増分

$d\tau, d\gamma^p$；ねじりモーメントによって生じる剪断応力増分および剪断歪増分

$\{d\varepsilon^{p*}\}$ と一般化塑性歪増分 $\{d\varepsilon^p\}$ の関係は梁理論に従うと，

$$\{d\varepsilon^{p*}\}=[B]\{d\varepsilon^p\} \tag{15}$$

ここで，$[B]=\begin{bmatrix}1&0&z&y\\0&r&0&0\end{bmatrix},\ r^2=y^2+z^2$

また $\{d\sigma^*\}$ と一般化応力増分 $\{d\sigma\}$ の関係は次式となる。

$$\{d\sigma\}=\int_A[B]^T\{d\sigma^*\}dA \tag{16}$$

$\int_A dA$ は断面全体に関する積分を表す。ここで，点 (y,z) における $\{d\varepsilon^{p*}\}$ と $\{d\sigma^*\}$ の間に次の関係を仮定する。

$$\{d\sigma^*\}=\begin{bmatrix}H'&0\\0&H'/3\end{bmatrix}\{d\varepsilon^{p*}\} \tag{17}$$

対角項 H' および $H'/3$ は，それぞれ σ_x あるいは τ のみが点 (y,z) に作用する時の応力増分と塑性歪増分の関係を表しており，ミーゼスの降伏条件に基づいている。

式(15)および式(17)を式(16)に代入し，さらに H' が断面内で一定であるとして積分を実行すると，等方硬化に関する一般化応力増分と一般化塑性歪増分の関係が次のように求められる。

$$\{d\sigma\}=[H_{si}']\{d\varepsilon^p\} \tag{18}$$

ここで，

$[H_{si}']=[H_i'A\ \ H_i'J/3\ \ H_i'I_y\ \ H_i'I_z]$

（対角マトリックス）

H_i'；単軸試験から得られる等方硬化係数

A；断面積，J；極慣性2次モーメント

I_y, I_z；断面2次モーメント

一般化塑性歪増分 $\{d\varepsilon^p\}$ は，式(3)の f を塑性ポテンシャルとみなして塑性流れ理論を適用すると，次式で与えられる。

$$\{d\varepsilon^p\}=d\lambda\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\} \tag{19}$$

$d\lambda$ は正のスカラーである。式(5)の関係を考慮すると

$\{d\varepsilon^p\}$ を一般化相当塑性歪増分 $d\bar{\varepsilon}^p$ の関数として表すことができる。すなわち

$$\{d\varepsilon^p\}=c\,d\bar{\varepsilon}^p\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\} \tag{20}$$

ここで，$c=\sigma_0/\{\sigma-\alpha\}^T\{\partial f/\partial\sigma\}$

パラメータ c は式(7)のような斉次式に対しては1.0となる。

次に，式(10)で移動硬化による $\{d\alpha\}$ を無視すると，一般化応力 $\{\sigma\}$ とパラメータ σ_0 に関する次の増分関係を得る。

$$d\sigma_0=\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{d\sigma\} \tag{21}$$

式(21)に式(18)および(20)を代入して，式(12)の断面等方硬化係数 H_{si}' が次のように求められる。

$$H_{si}'=c\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[H_{si}']\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\} \tag{22}$$

2.2.4 断面移動硬化係数

ミーゼスの降伏条件を適用すると，移動硬化を考慮した点 (y,z) の塑性条件 f^* は次式で与えられる。

$$f^*(\{\sigma^*-\alpha^*\})=(\sigma_x-\alpha_x)^2+3(\tau-\alpha_\tau)^2=\bar{\sigma}^2 \tag{23}$$

ここで，$\{\sigma^*\}=\{\sigma_x\ \tau\}^T$, $\{\alpha^*\}=\{\alpha_x\ \alpha_\tau\}^T$

α_x, α_τ；降伏曲面の原点の移動を表すパラメータ

$\bar{\sigma}$；降伏曲面の大きさを表すパラメータ（点 (y,z) の相当応力）

式(23)に Ziegler 則を適用すると，次の関係式が得られる[11]。

$$\{d\alpha^*\}=\frac{\{\sigma^*-\alpha^*\}}{\bar{\sigma}}H_k'd\bar{\varepsilon}^{p*} \tag{24}$$

H_k' は単軸試験から得られる移動硬化係数である。また $d\bar{\varepsilon}^{p*}$ は点 (y,z) の塑性歪増分 $\{d\varepsilon^{p*}\}$ に対応する相当塑性歪増分であり，次式で定義される。

$$d\bar{\varepsilon}^{p*}=\frac{\{\sigma^*-\alpha^*\}^T\{d\varepsilon^{p*}\}}{\bar{\sigma}} \tag{25}$$

式(25)を式(24)に代入すると，等方硬化の場合の式(17)に相当する $\{d\alpha^*\}$ と $\{d\varepsilon^{p*}\}$ の関係が次のように求められる。

$$\{d\alpha^*\}=\frac{H_k'}{\bar{\sigma}^2}\begin{bmatrix}s_{xx} & s_{x\tau}\\ s_{\tau x} & s_{\tau\tau}\end{bmatrix}\{d\varepsilon^{p*}\} \tag{26}$$

ここで $s_{xx}=(\sigma_x-\alpha_x)^2$

$s_{x\tau}=s_{\tau x}=(\sigma_x-\alpha_x)(\tau-\alpha_\tau)$

$s_{\tau\tau}=(\tau-\alpha_\tau)^2$

いま，一般化応力空間で定義された式(4)の $\{\alpha\}$ を式(26)で与えられる $\{\alpha^*\}$ の積分量と定義する。この時，増分 $\{d\alpha\}$ は次式で与えられる。

$$\{d\alpha\}=\int_A[B]^T\{d\alpha^*\}dA \tag{27}$$

式(15)および式(26)を式(27)に代入して，$\{d\alpha\}$ と一般化塑性歪増分 $\{d\varepsilon^p\}$ の関係が次のように求められる。

$$\{d\alpha\}=[H_{sk}']\{d\varepsilon^p\} \tag{28}$$

ここで，

$$[H_{sk}']=\int_A\frac{H_k'}{\bar{\sigma}^2}\begin{bmatrix}s_{xx} & rs_{x\tau} & zs_{xx} & ys_{xx}\\ rs_{\tau x} & r^2s_{\tau\tau} & zrs_{\tau x} & yrs_{\tau x}\\ zs_{xx} & zrs_{x\tau} & z^2s_{xx} & yzs_{xx}\\ ys_{xx} & yrs_{x\tau} & yzs_{xx} & y^2s_{xx}\end{bmatrix}dA$$

種々の荷重条件と断面形状に関するマトリックス $[H_{sk}']$ の具体形を付録2に示す。式(20)および式(28)を式(11)に代入すると，断面移動硬化係数 H_{sk}' が次式のように求められる。

$$H_{sk}'=c\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[H_{sk}']\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\} \tag{29}$$

2.3 要素の変形

前節に示した塑性条件と断面歪硬化係数を塑性節点法に適用し，弾塑性剛性方程式を導出する。ここではまず要素の変形を定式化する。

Fig.1の梁・柱要素 ij の節点力 $\{x\}$ と節点変位 $\{u\}$ を次のように定義する。

$$\{x\}=\{x_i\ x_j\}^T,\ \{u\}=\{u_i\ u_j\}^T \tag{30}$$

ここで，$\{x_i\}=\{F_{xi}\ F_{yi}\ F_{zi}\ M_{xi}\ M_{yi}\ M_{zi}\}^T$

$\{u_i\}=\{v_{xi}\ v_{yi}\ v_{zi}\ \theta_{xi}\ \theta_{yi}\ \theta_{zi}\}^T$

梁・柱要素では，節点力は断面に作用する一般化応力に等しい。したがって，例えば節点 i の塑性条件は，式(3)の $\{\sigma\}$ を節点力 $\{x_i\}$ に置き換えた次の式で表すことができる。

$$F_i=Y(\{x_i-\alpha_i\})-\sigma_{0i}(\bar{\varepsilon}^p{}_i)=0 \tag{31}$$

ここで添字 i は節点 i に関する量を表す。また節点力の関数である点を区別するため塑性条件を大文字 F で表している。

さて，塑性節点法では $F=0$ を満足して節点が降伏した後の要素の変形をFig.3のようにモデル化する。すなわち要素の内部は常に弾性とし，塑性変形を弾性要素の端部 $i'j'$ と実節点 ij の間に縮約する。節点には一般化された塑性関節機構が挿入される。

Fig.3より，要素の節点変位増分は，弾性節点変位増分

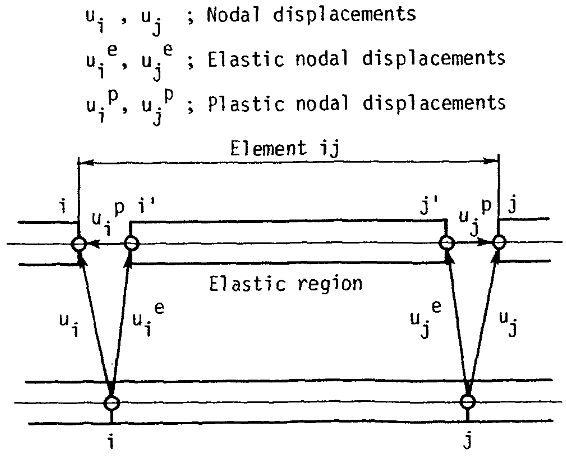


Fig. 3 PNM model

$\{du^e\}$ と塑性関節の変形量を表す塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ の和で表される。

$$\{du\}=\{du^e\}+\{du^p\} \tag{32}$$

また節点力増分と弾性節点変位増分の間には次の関係が常に成立する。

$$\{dx\}=[K^e]\{du^e\} \tag{33}$$

ここで，$[K^e]$；弾性剛性マトリックス

一方，節点 i が降伏した後の塑性節点変位増分は，式(31)の F_i を塑性ポテンシャルと見なして塑性流れ理論を適用すると次のように与えられる。

$$\{du^p\}=d\lambda_i\{\phi_i\} \tag{34}$$

ここで，$d\lambda_i$；塑性節点変位増分の大きさを表す正のスカラー

$$\{\phi_i\}=\left\{\frac{\partial F_i}{\partial x}\right\}$$

F_i は $\{x_i\}$ のみの関数であるから，$\{\phi_i\}$ の内 $\{x_j\}$ に関する微分項は0である。したがって塑性節点変位は降伏した節点 i のみに生じる。節点 i, j がともに降伏した後の塑性節点変位増分は次式で与えられる。

$$\{du^p\}=d\lambda_i\{\phi_i\}+d\lambda_j\{\phi_j\}$$
$$=[\Phi]\{d\lambda\} \tag{35}$$

ここで，$[\Phi]=[\{\phi_i\}\{\phi_j\}]$

$\{d\lambda\}=\{d\lambda_i\ d\lambda_j\}^T$

なお，式(31)より，降伏した節点 i では，負荷の続く限り次の条件を満足せねばならない。

$$dF_i=\{\phi_i\}^T\{dx\}-(H_{sk}'+H_{si}')_i d\bar{\varepsilon}_i^p=0 \tag{36}$$

2.4 節点変位歪硬化係数

Fig. 1 の梁・柱要素の節点 i が降伏し，その後歪硬化を生じながら塑性域が同図の l_i^p の範囲まで広がった状態を考える。塑性域の内部には式(20)で与えられる一般化塑性歪が分布する。このような広がりを持つ塑性域を生じた骨組部材の剛性を Fig.3 の PNM モデルで評価するためには，塑性域 l_i^p の影響を節点の塑性関節機構に縮約する必要がある。

PNM モデルで評価される要素の接線剛性が実際に塑性歪が要素に分布する場合と等価であるためには，両者において要素でなされる塑性仕事増分が等しくなければならない[10)]。この考え方に基づいて，塑性域 l_i^p の影響を節点に縮約し，塑性節点変位に対して有効な歪硬化係数（節点変位歪硬化係数）を導く。

Fig.3 の実節点 i と弾性要素端 i' の間でなされる塑性仕事増分 dW_i^p は次式で与えられる。

$$dW_i^p=\{x\}^T\{du^p\}=\{x\}^T\{\phi_i\}d\lambda_i \tag{37}$$

一方，l_i^p の範囲に一般化塑性歪が分布するとき要素でなされる塑性仕事増分 dW_i^{p*} は，

$$dW_{ip}^*=\int_{l_i^p}\{\sigma\}^T\{d\varepsilon^p\}dx \tag{38}$$

式(5)および式(20)を用いると，上式は次のように一般化相当塑性歪増分 $d\bar{\varepsilon}^p$ の関数の形に改められる。

$$dW_i^{p*}=\int_{l_i^p}\{\sigma-\alpha\}^T\{d\varepsilon^p\}dx+\int_{l_i^p}\{\alpha\}^T\{d\varepsilon^p\}dx$$
$$=\int_{l_i^p}\sigma_0 d\bar{\varepsilon}^p dx+\int_{l_i^p}\{\alpha\}^T\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}c\,d\bar{\varepsilon}^p dx$$
$$=\int_{l_i^p}\left(\sigma_0+c\{\alpha\}^T\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\right)d\bar{\varepsilon}^p dx \tag{39}$$

ところで，式(13)より相当塑性歪増分 $d\bar{\varepsilon}^p$ は

$$d\bar{\varepsilon}^p=\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{d\sigma\}}{H_{sk}'+H_{si}'} \tag{40}$$

また節点 i では，添字 i を付して

$$d\bar{\varepsilon}_i^p=\frac{\left\{\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_i}\right\}^T\{d\sigma_i\}}{(H_{sk}'+H_{si}')_i} \tag{41}$$

但し式(41)は $\{\phi_i\}^T\{dx\}=\{\partial f_i/\partial\sigma_i\}^T\{d\sigma_i\}$ なる関係を用いると，式(36)からも求められる。式(40)および式(41)から $d\bar{\varepsilon}^p$ の分布は，節点 i の値 $d\bar{\varepsilon}_i^p$ と分布関数 $g(x)$ の積の形で次のように表される。

$$d\bar{\varepsilon}^p=g(x)d\bar{\varepsilon}_i^p \tag{42}$$

ここで，$g(x)=$

$$\frac{(H_{sk}'+H_{si}')_i}{H_{sk}'+H_{si}'}\cdot\frac{\{\partial f/\partial\sigma\}^T\{d\sigma\}}{\{\partial f_i/\partial\sigma_i\}^T\{d\sigma_i\}}$$

式(42)を式(39)に代入し，dW_i^p と dW_i^{p*} を等置すると，次の関係式を得る。

$$d\bar{\varepsilon}_i^p=h_i d\lambda_i \tag{43}$$

ここで，$h_i=$

$$\frac{\{x\}^T\{\phi_i\}}{\int_{l_i^p}(\sigma_0+c\{\alpha\}^T\{\partial f/\partial\sigma\})g(x)dx}$$

式(43)は，dW_i^p と dW_i^{p*} が等しい場合の節点 i の塑性節点変位増分と相当塑性歪増分の関係を与える。これを式(36)に代入すると，塑性節点変位に関する負荷条件と節点変位歪硬化係数が次のように求められる。

$$dF_i=\{\phi_i\}^T\{dx\}-H_{ni}'d\lambda_i=0 \tag{44}$$

ここで，$H_{ni}'=(H_{sk}'+H_{si}')_i h_i$

；節点変位歪硬化係数

なお，式(43)の h_i は数値積分により求める。

2.5 複合硬化を考慮した弾塑性剛性方程式

一般的な場合として，節点 i, j がともに塑性化した要素の弾塑性剛性方程式を導く。式(35)の記号 $[\Phi]$ および $\{d\lambda\}$ を用いると，式(44)の負荷条件は次式のように表される。

$$[\Phi]^T\{dx\}-[H']\{d\lambda\}=\{0\} \tag{45}$$

ここで，$[H']=[H_{ni}'\ H_{nj}']$

；節点変位歪硬化係数マトリックス（対角マトリックス）

式(32)および式(34)を式(33)に代入すると，節点力増分 $\{dx\}$ は，

$$\{dx\}=[K^e](\{du\}-[\Phi]\{d\lambda\}) \tag{46}$$

式(46)を式(45)に代入して $\{d\lambda\}$ に関する次の連立一次方程式を得る。

$$([H']+[\Phi]^T[K^e][\Phi])\{d\lambda\}=[\Phi]^T[K^e]\{du\} \tag{47}$$

これを解いて,

$$\{d\lambda\}=([H']+[\Phi]^T[K^e][\Phi])^{-1}[\Phi]^T[K^e]\{du\} \quad (48)$$

式(48)を式(46)に代入して,弾塑性剛性方程式が次のように得られる。

$$\{dx\}=[K^p]\{du\} \quad (49)$$

ここで, $[K^p]=[K^e]-$

$$[K^e][\Phi]([H']+[\Phi]^T[K^e][\Phi])^{-1}[\Phi]^T[K^e]$$

;弾塑性剛性マトリックス(対称マトリックス)

節点の除荷の判定条件は,次式により与えられる。

$$d\lambda<0 \quad (50)$$

なお,節点変位歪硬化係数の導出に必要な式(42)の分布関数 $g(x)$ は,一般化応力増分 $\{d\sigma\}$ の関数であるため,不静定構造では未知数である。したって,前荷重ステップの値を初期値として繰り返し計算を行なう必要がある。

式(49)が示すように,塑性節点法では,塑性歪を節点に縮約することにより,歪硬化を考慮した弾塑性剛性方程式がマトリックス演算のみで求められる。また以上の定式化と逆の手順をたどれば,要素内部に生じる歪分布の計算も可能である。すなわち,求められた $\{du\}$ を式(48)に代入して $\{d\lambda\}$ が計算されると式(42)および式(43)を用いて要素内部の降伏断面の相当塑性歪増分 $d\bar{\varepsilon}^p$ を得る。これを式(20)に代入して一般化塑性歪増分 $\{d\varepsilon^p\}$ が求められる。一般化歪増分 $\{d\varepsilon\}$ は一般化応力増分 $\{d\sigma\}$ から計算される弾性成分 $\{d\varepsilon^e\}$ と上記塑性成分 $\{d\varepsilon^p\}$ の和で与えられる。

3. 解析例

繰り返し荷重を受ける骨組構造の弾塑性挙動を,前章に展開した塑性節点法と層分割法による有限要素法を用いて解析し,両者の結果を比較・検討した。

3.1 解析の手順

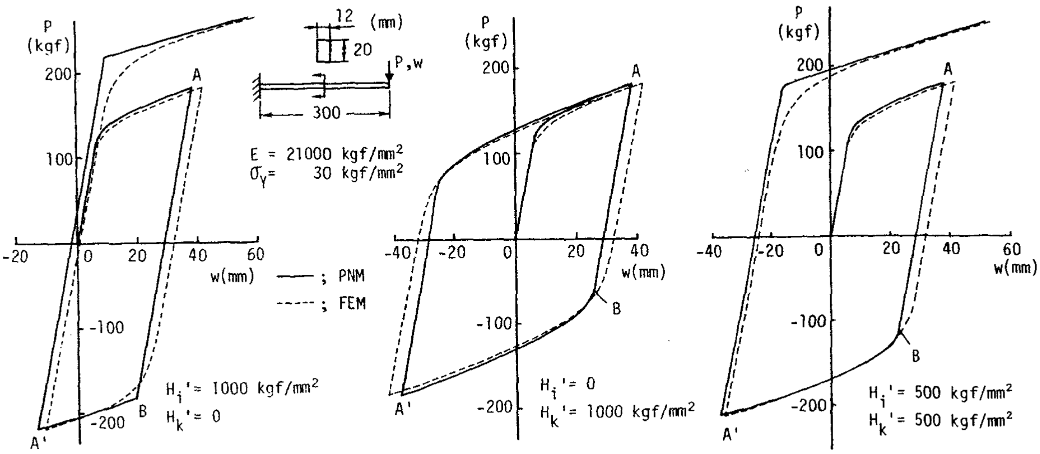
地震荷重や波浪荷重を想定して,繰り返し荷重は荷重制御で負荷した。既述のように本論文の解析では,要素の初期降伏は節点に生じる。この時塑性条件が丁度満足されるよう r_{min} 法[11]により荷重増分を調節した。Fig.1に示す要素内部の塑性域長さ l_i^p は節点力から求められる一般化応力の分布と塑性条件から計算し,一荷重増分間では一定とした。式(43)の数値積分のための積分点の間隔は要素長の1/50とした。FEM解析には,構造解析プログラムMARCを使用した。

3.2 矩形断面片持梁

矩形断面片持梁の自由端に集中荷重が繰り返し作用する場合の弾塑性挙動を解析した。Fig.4(a)から(c)に材料が等方硬化体,移動硬化体および複合硬化体の3つのケースについて得られた荷重と荷重点のたわみの関係を示す。PNM解析では梁を一要素でモデル化している。FEM解析では梁を10要素に等分割し,各要素の深さ方向に11点のシンプソン積分点を設けている。

PNMによる解析結果は,除荷・再負荷過程を含めてFEMの結果と極めて良好な一致を示している。第一除荷点 A の付近で,部材長の1/3程度まで塑性域が広がっている。PNMでは断面の降伏を全断面塑性条件に基づいて判定する。このためFEMの結果と比べて耐荷力をやや高めに推定する傾向がある。また荷重制御で解析を行なっているため,除荷点 A および A' のたわみには若干の差が現われている。これらの精度は,断面の初期降伏から全断面降伏に至る中間塑性状態を考慮できる降伏関数[10]を用いることにより改善されると考えられる。

Fig.4(a)から(c)のいずれの解析でも,材料の全歪硬化係数 $(H_i'+H_k')$ は同一であるため,第一除荷点Aまでの挙動は一致している。これに対し,除荷後の再降伏点付近のPNMの解析結果には以下の相違が見られる。すなわち,Fig.4(a)の等方硬化体では,点Bで剛性が急に低下するのに対し,同図(b)の移動硬化体の場合は点Bから剛性は徐々に低下する。複合硬化体の結果はこれらの中間にあ



(a) Isotropic hardening (b) Kinematic hardening (c) Combined hardening

Fig. 4 Load-deflection relationships of a cantilever beam under cyclic loads

る。以下，Fig.4(a)と(b)の相違について考察する。

本解析例では，要素には一般化応力として曲げモーメントのみが生じる。したがって移動硬化による降伏曲面の移動も Fig.5(a)に示すように曲げモーメントの方向のみに生じる。今，第一除荷点Aで計算された各断面の降伏モーメントの値(Fig.5(a)の点aと点a′のモーメント)を部材長方向にプロットすると等方硬化と移動硬化に対してそれぞれ Fig.5(b)および(c)の実線が得られる。M_Y は初期の全断面降伏モーメントの大きさを表す。除荷点Aにおける降伏モーメントの分布は破線で示す作用モーメントの分布にほぼ一致している。

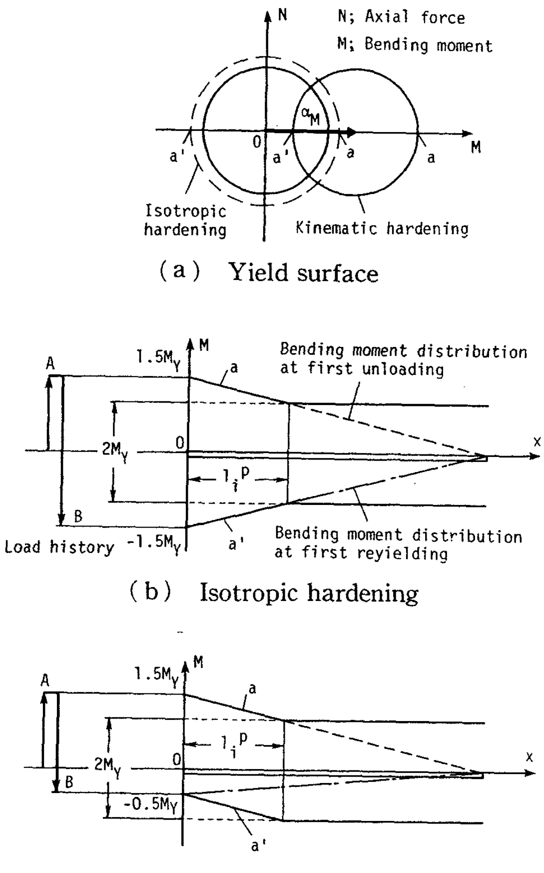
等方硬化体の場合，初期の作用モーメントと逆方向にも降伏曲面が膨張する。このため，部材の再降伏は除荷点と同じ作用荷重の大きさに達した時生じる。また Fig.5(b)の一点鎖線から知られるように，再降伏は先に降伏した降伏域 l_i^p で同時に起きる。このため，剛性は再降伏により急激に低下する。一方，移動硬化の場合は固定端に近いほど再降伏モーメントが小さいため，再降伏は固定端から始まり,その後再降伏域が広がるとともに剛性は徐々に低下する。

Fig.4(a)および(b)の PNM の結果から，一定振幅の繰り返し荷重が加わる場合，等方硬化体では最初に除荷の生じた後は部材は弾性的に挙動するのに対し，移動硬化体では交番塑性が起きることが分かる。通常の鋼材の場合，等方硬化による降伏曲面の膨張よりも，移動硬化による曲面の移動の方が支配的に生じる。したがって，繰り返し荷重を受ける構造物の塑性挙動の検討においては，移動硬化の考慮は極めて重要となる。

なお，本解析の PNM 解析に要した計算時間は FEM の約 1/4 であった。

3.3 平面骨組構造

Fig.6 に示す正方形断面部材からなる門型平面骨組の弾塑性挙動を 4 要素で解析した。ここでは，部材の軸変形と降伏に対する軸力の影響を考慮している。FEM 解析では

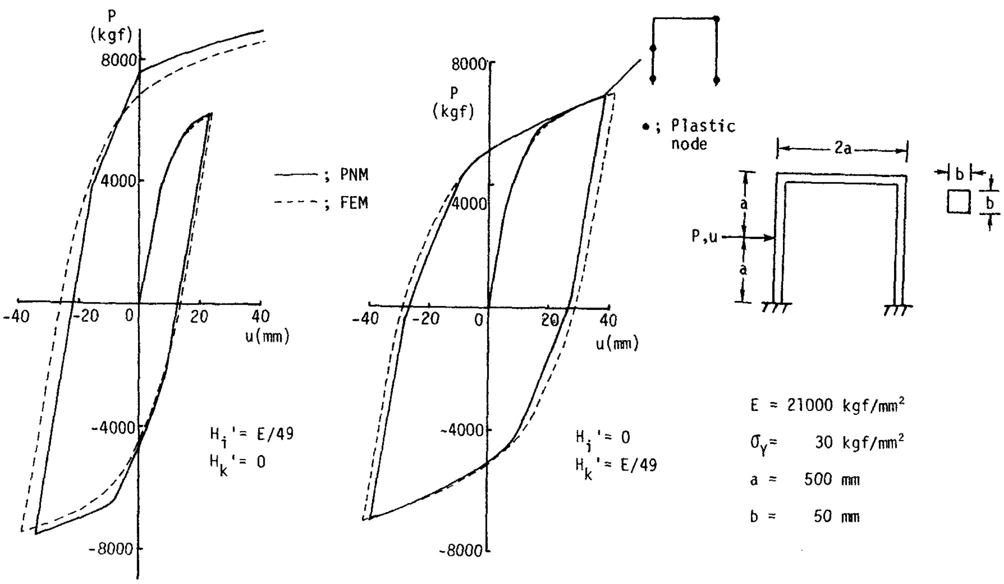


(a) Yield surface

(b) Isotropic hardening

(c) Kinematic hardening

Fig. 5 Reyielding of a cantilever beam



(a) Isotropic hardening (b) Kinematic hardening (c) Model for analysis

Fig. 6 Load-displacement relationships of a one-story portal frame

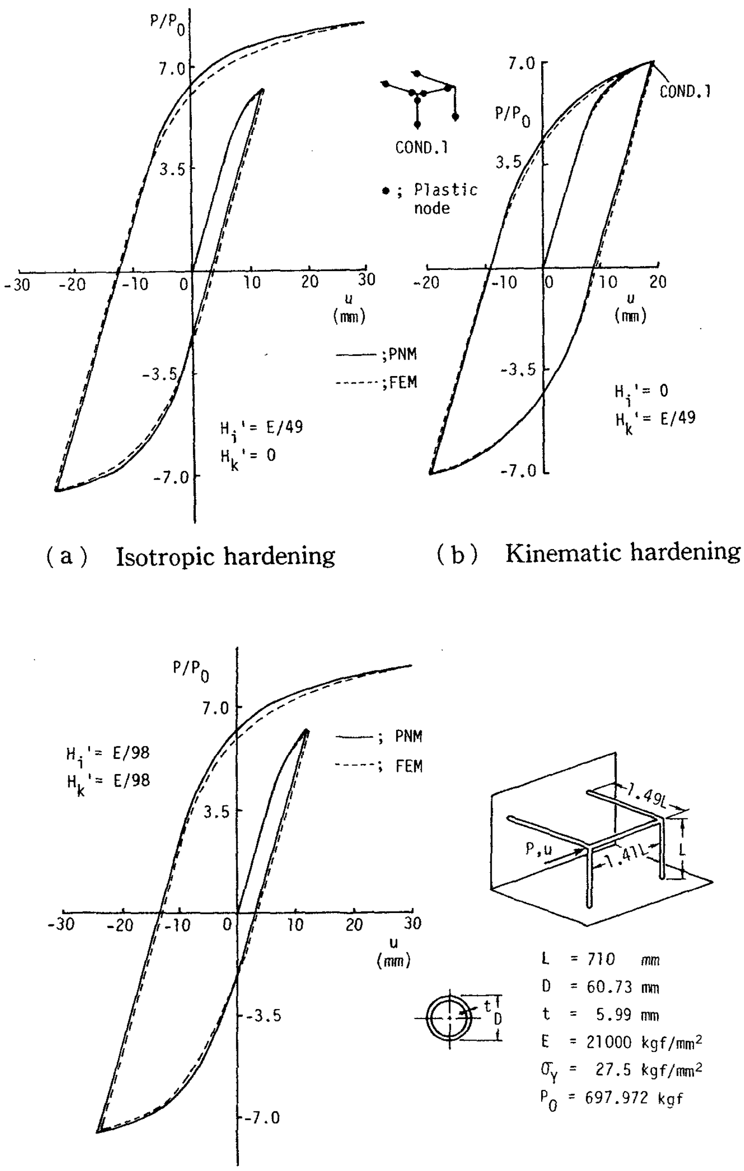
骨組を40要素に分割した。積分点数は Fig.4 の解析と同一である。等方硬化，移動硬化のいずれの場合も PNM による解析結果は FEM 解析結果と良く一致している。不静定構造であるため，式(42)の関数 $g(x)$ に関する iteration が必要となる。$g(x)$ は降伏断面の曲げモーメント増分の関数であることから，その分布の大きく変化する，すなわち降伏節点が新たに生じた直後において多数の iteration が必要と考えられたが，本解析例の場合，高々2回の iteration で $g(x)$ は良好に収束した。また荷重増分を細かくすれば，上記 iteration を行なわずとも，実用上十分な精度の解が求められることが確認されている。

3.4 立体骨組構造

円筒部材からなる Fig.7 の立体骨組の弾塑性解析を行なった。式(9)の降伏関数 Y を用いて，軸力，2軸曲げモーメントおよびねじりモーメントのすべての断面力を塑性条件に考慮した。断面移動硬化係数 H_{sk}' の計算には，付録2，式($A-10$)の $[H_{sk}']$ を用いた。FEM 解析では断面の周方向に16個のシンプソン積分点を設け，各積分点に軸応力とねじりによる剪断応力を考慮したミーゼスの降伏条件を適用した。用いた要素数は PNM で5要素，FEM で50要素である。

Fig.7(a)から(c)に荷重と荷重点変位の関係を示す。いずれの硬化特性を仮定した場合も，PNM の結果は FEM の結果と極めて良好な一致を示している。既述のように，PNM では要素の内部は弾性で，塑性変形は図中に黒丸で示した降伏節点の位置に縮約されている。節点変位歪硬化係数を導入することにより，このような変形モデルを用いて等方および移動硬化を考慮した立体骨組の弾塑性解析を高い精度で解析できることが確認された。

PNM 解析に要した計算時間は FEM 解析の約1/10で



(a) Isotropic hardening (b) Kinematic hardening

(c) Combined hardening

Fig. 7 Load-displacement relationships of a space frame

あった。

4. 結　言

有限要素法とヒンジ法を組合わせた構造物の効率的な弾塑性解析法として著者らは塑性節点法（PNM）を提案し，その有効性を明らかにしてきた。本研究では，繰り返し荷重を受ける骨構造物の弾塑性解析を高精度に行なう目的で，骨組構造を対象として，新たに複合硬化を考慮した塑性節点法の理論展開をおこなった。本研究の主要な結論は以下の通りである。

（1） 部材断面の個々の点に生じる等方および移動硬化の影響を断面にわたって積分することにより，断面力表示の塑性条件に有効な断面等方硬化係数と断面移動硬化係数を導出した。

（2） 要素内部の各断面に生じる歪硬化の影響を塑性仕事増分の等価性に基づいて節点に縮約することにより，塑性節点変位に対して有効な等方および移動硬化係数（節点変位歪硬化係数）を導いた。

（3） PNM によれば，複合硬化を考慮した梁•柱要素の弾塑性剛性マトリックスをマトリックス演算のみで求めることができる。また歪硬化を考慮しながら，可能な降伏断面間を一要素で解析できる。

（4） 塑性節点変位から要素内部に本来生じる塑性歪分布を別途計算することができる。

（5） 平面骨組と立体骨組に対する PNM 解析結果と FEM 解析結果の比較から，PNM により繰り返し荷重を受ける骨組構造の弾塑性解析を効率的にかつ実用上十分な精度で解析できることを確認した。

なお本論文で提案した理論は，大変形解析や動的解析，さらに任意の径間荷重を受ける骨組構造の解析[9]にも容易に適用可能である。

最後に本研究の一部は駒沢昭彦氏（現，九州大学大学院）の卒業研究として行なわれたことを記し謝意を表します。

参 考 文 献

1) P. G. Hodge: Plastic Analysis of Structures, Mc-Graw Hill, New York (1959).
2) 上田, 松石, 山川, 赤松：マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第 124 号 (1968), pp. 183-191.
3) 上田, 赤松, 近江：マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析（その 2）, 日本造船学会論文集, 第 126 号 (1969), pp. 253-262.
4) 上田, 矢尾, 藤久保：塑性関節法の一般化に関する研究, 日本造船学会論文集, 第 146 号 (1979), pp. 307-313.
5) Y. Ueda, T. Yao: The Plastic Node Method -A New Method of Plastic Analysis, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 34 (1982), pp. 1089-1104.
6) 上田, 中長, 藤久保, 石川：塑性節点法の熱弾塑性および動的問題への適用, 日本造船学会論文集, 第 153 号 (1983), pp. 200-208.
7) Y. Ueda, K. Nakacho, M. Fujikubo: Application of the Plastic Node Method to Thermal Elastic-Plastic and Dynamic Problems, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 51 (1984), pp. 157-175.
8) 上田, 藤久保, 三浦：塑性選点法の開発-塑性節点法の拡張-, 日本造船学会論文集, 第 158 号 (1985), pp. 328-339.
9) 上田, 藤久保, 為広：径間荷重を受ける骨組構造物の弾塑性解析-塑性選点法の応用-, 日本造船学会論文集, 第 158 号 (1985), pp. 340-347.
10) 上田, 藤久保：歪硬化を考慮した塑性選点法, 日本造船学会論文集, 第 160 号 (1986), pp. 306-317.
11) 山田嘉昭：塑性・粘弾性, 培風館.

付録 1　矩形断面の 2 次形式の塑性相関式

式(6)より

$$n^2-1=-|m| \tag{A-1}$$

両辺を自乗して，辺々に $n^2m^2+0.25\,m^4$ を加えると次式を得る。

$$(1-n^2-0.5m^2)^2=n^2m^2+0.25m^4 \tag{A-2}$$

これより，次の塑性相関式が得られる。

$$n^2+0.5m^2+\sqrt{0.25m^4+n^2m^2}-1=0 \tag{A-3}$$

付録 2　マトリックス $[H_{sk}']$ の具体形

（1） ねじりモーメントの作用しない場合，あるいは影響を無視する場合

$\tau=\alpha_\tau=0$ であるから，式(28)において

$$s_{xx}=(\sigma_x-\alpha_x)^2=\bar{\sigma}^2$$
$$s_{x\tau}=s_{\tau x}=s_{\tau\tau}=0 \tag{A-4}$$

したがって

$$[H_{sk}']=\int_A \frac{H_k'}{\bar{\sigma}^2}\begin{bmatrix}\bar{\sigma}^2 & 0 & z\bar{\sigma}^2 & y\bar{\sigma}^2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ z\bar{\sigma}^2 & 0 & z^2\bar{\sigma}^2 & yz\bar{\sigma}^2\\ y\bar{\sigma}^2 & 0 & yz\bar{\sigma}^2 & y^2\bar{\sigma}^2\end{bmatrix}dA$$
$$=\int_A H_k'\begin{bmatrix}1 & 0 & z & y\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ z & 0 & z^2 & yz\\ y & 0 & yz & y^2\end{bmatrix}dA \tag{A-5}$$

H_k' が断面内で一定と仮定すると，

$$[H_{sk}']=[H_k'A\ \ 0\ \ H_k'I_y\ \ H_k'I_z] \tag{A-6}$$
（対角マトリックス）

（2） ねじりモーメントのみが作用する場合

$\sigma_x=\alpha_x=0$ であるから，

$$s_{xx}=s_{x\tau}=s_{\tau x}=0$$
$$s_{\tau\tau}=(\tau-\alpha_\tau)^2=\bar{\sigma}^2/3 \tag{A-7}$$

したがって式(A-6)と同様の仮定をおくと

$$[H_{sk}']=[0\ \ H_k'J/3\ \ 0\ \ 0] \tag{A-8}$$
（対角マトリックス）

（3） 円筒断面に軸力，曲げモーメントおよびねじりモ

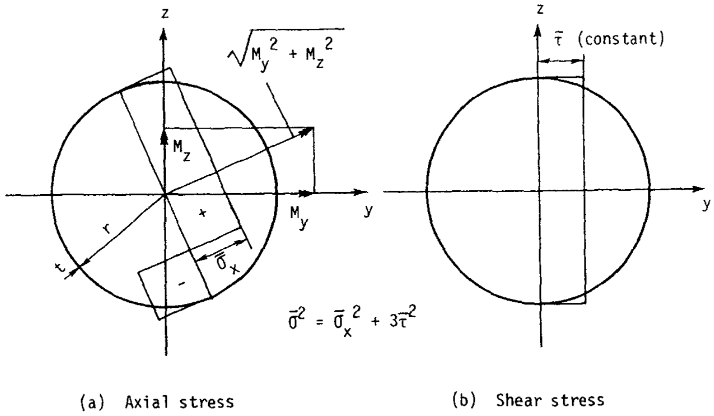


Fig. A 1 Stress distribution in fully plastic tubular section

ーメントが作用する場合

全塑性状態の円筒断面の軸応力 $\bar{\sigma}_x(=\sigma_x-\alpha_x)$ および剪断応力 $\bar{\tau}(=\tau_x-\alpha_\tau)$ の分布を Fig. A 1 のように仮定する。ねじりモーメントを無視した式(8)の全断面塑性条件は Fig. A 1(a)で $\bar{\sigma}_x=\sigma_Y$（材料の単軸降伏強度）とした場合の塑性相関関係を表している。

今，式(9)の降伏関数を用いた解析から得られた軸力 $(N-\alpha_N)$, 曲げモーメント $(M_y-\alpha_{My}, M_z-\alpha_{Mz})$ およびねじりモーメント $(M_x-\alpha_{Mx})$ から Fig. A 1 の $\bar{\sigma}_x$ と $\bar{\tau}$ をそれぞれ計算し，断面内各点の相当応力 $\bar{\sigma}$ を次式のように仮定する。

$$\bar{\sigma}^2=\bar{\sigma}_x^2+3\bar{\tau}^2 \tag{A-9}$$

$\bar{\sigma}^2$, $\bar{\sigma}_x^2$ および $\bar{\tau}^2$ はいずれも断面内で一定値となる。式(28)において，$s_{xx}=\bar{\sigma}_x^2$, $s_{\tau\tau}=\bar{\tau}^2$ であることを考慮し，さらに移動硬化係数 H_k' が断面内で一定と仮定して積分を実行すると，マトリックス $[H_{sk}']$ が次式のように得られる。

$$[H_{sk}']=\begin{bmatrix} H_k'Ap & & & \text{SYM} \\ H_k'Arqn & H_k'AJ(1-p)/3 & & \\ 0 & 4H_k'r^3tqm_y & H_k'I_yp & \\ 0 & 4H_k'r^3tqm_z & 0 & H_k'I_zp \end{bmatrix} \tag{A-10}$$

ここで，$p=\bar{\sigma}_x^2/\bar{\sigma}^2$, $q=\bar{\tau}\sigma_y/\bar{\sigma}^2$

ねじりモーメントを無視する時は $p=1.0$, $q=0$ とおいて式(A-6)が，またねじりモーメントのみ作用する場合は $p=0$ とおいて式(A-8)がそれぞれ得られる。