流体音場の基礎方程式について

正員　山　崎　隆　介*

On the Wave Equation in Hydroacoustic Field

by Ryusuke Yamazaki, *Member*

Summary

In this paper, it is shown that liquid can be treated hydrodynamically as a compressible fluid similar to gas by using the extended Tammann equation. Thus, regardless of fluid phase, the wave equation governing the hydroacoustic field can be deduced from the fundamental equations of compressible fluid. As a result it is found that the heat can be one of the sources of sound as well as mass injection, external force and Lighthill's stress.

1. 緒　　　言

流体中の音は，まず音源があって，次にこれから発生した音波が境界面（壁面）で制限された領域の媒質を介して伝播し，最後に観測点に達するというパターンをもつ。そして音源としては，送風機，換気扇などのファン，船舶及び飛行機を推進するためのプロペラ，ジェットエンジンの噴流，不連続流をつくる空洞のような騒音源から，楽器や昆虫などのような美しい音を出す音源まで無数の種類がある。また音の伝播は媒質である流体の成分・相及び流速と直接関係しており，他方で境界面における反射，透過，屈折や，障害物による回折，散乱，吸収などの現象を含んでいる。何れにせよ流体音は流体の現象であるから，流体力学の基礎方程式を満足しなければならない。

さて多くの音の理論は媒質によって区別され，媒質が圧縮性流体である空気音と非圧縮性流体に近い水中音はそれぞれ別個に取り扱われ，流体として相に関係なく統一された基礎方程式は導かれていなかった。しかし水の圧縮性は，音に限らず，水中における有限振幅の圧力波の伝播，爆発現象など，多くの問題に関係する。これを解くために，本報告では，流体を単一相の場合に限り，基礎方程式として，圧縮性流体に関する連続方程式，運動方程式及びエネルギー方程式を示し，更に液体にも気体に対応する形の状態方程式を導入する。そしてこれらの基礎方程式を用いることによって，厳密に，流れのある一般的流場に存在する音場の基礎方程式を導くこともできるが[1]，本報告では簡単のため，空間的・時間的に激しく変動しない流れを媒質とする音場の基礎方程式，すなわち波動方程式を導くことにする。

2.　単一相の流体力学の基礎方程式

流体の充満する物理空間を，空間固定の直交直線座標 x_i，ただし $i=1,2,3$ で示し，時間を t で表す。本節では，流れの状態を一般化して乱流とし，層流は形式的に乱流の特殊な状態と考えることにする。さて，流体の密度を ρ，流速の x_i 方向の成分を v_i，体積力のポテンシャル $\rho\Omega$ の影響を差し引いた圧力を p とし，x_i の一定の面内における x_j 方向の粘性による応力テンソルを τ_{ij}，粘性係数を μ，体積粘性係数を χ，乱流運動エネルギーを K_t とし，単位質量あたりのエンタルピーを h，x_i 方向の熱流束を q_i，絶対温度を T，熱伝導係数を k とし，更に単位体積に分布する吹き出し強さを σ，熱源の強さを Q，単位体積に働く外力の x_i 方向の成分を f_i とすると，mass-weighted average された基礎方程式は次のように得られる[2]。尚ここで吹き出す流体は，速度もエネルギーも持たずに放出されるものとする。すなわち

$$\text{連続方程式}:\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)=\sigma, \qquad (1)$$

* 九州大学名誉教授

運動方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j+\delta_{ij}p-\tau_{ij})=f_i, \tag{2}$$

エネルギー方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(h+\frac{1}{2}v_k v_k\right)-p\right]+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho\left(h+\frac{1}{2}v_k v_k\right)v_j -v_i\tau_{ij}+q_j\right]=Q+v_i f_i, \tag{3}$$

状態方程式：$\Lambda(\rho, p, T)=0,$ (4)

ただし

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)-\delta_{ij}\frac{2}{3}\left[\left(\mu-\frac{3}{2}\chi\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\rho K_t\right],$$

$$q_i=-k\frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{5}$$

$\Lambda(\rho, p, T)$：流体の状態によって決まる ρ, p, T の関数.

ここで指標 i, j, k は何れも1, 2, 3を示し，かつEinsteinの約束を採用し，δ_{ij} はKroneckerの記号である。今乱流モデルの一例としてSmagorinskyモデルを採用し，すなわち，μ_0 及び k_0 をそれぞれ物性値としての粘性係数，熱伝導係数とし，定圧比熱を c_p とし，Δ を数値計算のための微小格子の体積として

$$\mu=\mu_0+\mu_t,\ \mu_t=\rho(C_s\Delta)^2A^{1/2},\ K_t=(C_\kappa\Delta)^2A,$$

$$A=\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$k=k_0+k_t,\ k_0=\frac{c_p\mu_0}{P_{r0}},\ k_t=\frac{c_p\mu_t}{P_{rt}} \qquad \text{以上}(6)$$

とおく。ここで μ_t 及び k_t はそれぞれ乱流粘性係数，乱流熱伝導係数と呼ばれ，C_s 及び C_κ は定数であり，P_{r0} 及び P_{rt} はPrandtl数で，何れも予め与えられる。尚，流速の空間的・時間的変化が緩やかな状態では(6)式において $A=0$ となり，従って $\mu_t=0, K_t=0$, 更に $k_t=0$ となって，原方程式(1)，(2)，(3)，(4)は層流場のそれらと一致する。

まず，エネルギー方程式(3)を

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho h v_j)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v_j\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)-\tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial q_j}{\partial x_j} =Q+\frac{1}{2}\sigma v_i v_i \tag{7}$$

と書き換え，更に基礎方程式の表示を簡単にするため

$$f_i^*=f_i-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j-\tau_{ij}),$$

$$Q^*=Q-\sigma h+\frac{1}{2}\sigma v_k v_k-\frac{\partial q_j}{\partial x_j}+\tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{8}$$

を定義すると，(1)，(2)，(7)式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}+\rho\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=\sigma, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i^*, \tag{10}$$

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+v_j\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v_j\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)=Q^* \tag{11}$$

と表される。ここで f_i^*, Q^* は，(8)式に示すように，f_i, Q の他に流速 v_i，熱流束 q_i，粘性による応力 τ_{ij} を含んでいる。

次に，状態方程式(4)及びエンタルピー h について考える。現在までに気液の二相を包含する状態方程式としてvan der Waalsの式をはじめとして多くの経験式が提案されているが，ここでは，簡単に，理想気体の状態方程式を拡張することによって得られたTammannの式[3]を更に拡張して

$$p+p_B=\rho R_B(T+T_B) \tag{12}$$

を仮定し，p_B, T_B 及び R_B は流体の種類，相に対応する定数とする。この(12)式は，ρ, p, T の変化の範囲が大きくないときには少くとも一般に近似的に成立する。そして，定圧比熱 c_p を近似的に定数とし，

$$R_B=\frac{\kappa-1}{\kappa}c_p \tag{13}$$

で κ を定義すると，理想気体の場合 R_B は気体定数であり，κ は比熱比である。次にエンタルピー h を T, p の関数とすると

$$dh=\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT+\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp \tag{14}$$

とおくことができる。ここで$(\ )_p$, $(\ )_T$ などはそれぞれ p, T などが一定のもとでの偏微分を示す。熱力学[4]における定義及び関係式から

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p\equiv c_p,\ \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T=-T\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{\rho}\right)_p+\frac{1}{\rho} \tag{15}$$

が成立し，(12)式を用いると，(15)の第2式は

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T=-\frac{R_B T}{p+p_B}+\frac{R_B(T+T_B)}{p+p_B}=\frac{R_B T_B}{p+p_B} \tag{16}$$

となる。(14)式に(15)，(16)式を代入すると，dh は

$$dh=c_p dT+\frac{R_B T_B}{p+p_B}dp \tag{17}$$

と表される。他方(12)式から

$$\frac{dp}{p+p_B}-\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dT}{T+T_B}=\frac{R_B\rho}{p+p_B}dT \tag{18}$$

が導かれ，この(18)式と(17)式から dT を消去し，(13)式を参照すると，結局 dh は次のように得られる，

$$dh=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}+\frac{T_B}{T+T_B}\right)dp-\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{(p+p_B)}{\rho^2}d\rho. \tag{19}$$

従って，標準状態 $T=T^\circ, p=p^\circ$ における標準エンタルピーを $h=h^\circ$ とすると，h は(17)式または(19)式を積分することによって次のように表される，

$$\begin{aligned} h&=h^\circ+c_p(T-T^\circ)+R_B T_B\log\frac{p+p_B}{p^\circ+p_B}\\ &=h^\circ-c_p(T^\circ+T_B)+\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p+p_B}{\rho}\\ &\quad+R_B T_B\log\frac{p+p_B}{p^\circ+p_B}. \end{aligned} \tag{20}$$

今，エントロピーを s とし，s の定義式と(19)式を用いると

$$\rho T ds\equiv\rho dh-dp=\frac{U}{\kappa-1}\left[dp-\frac{\kappa(p+p_B)}{\rho U}d\rho\right], \tag{21}$$

ただし

$$U=1+\frac{(\kappa-1)T_B}{T+T_B}=1+\frac{(\kappa-1)\rho R_B T_B}{p+p_B} \tag{22}$$

が成立する。(21)式の関係を用いると，(11)式は最終的に

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v_j\frac{\partial p}{\partial x_j}-\frac{\kappa(p+p_B)}{\rho U}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right)=\frac{\kappa-1}{U}Q^*, \tag{23}$$

または

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+v_j\frac{\partial s}{\partial x_j}\right)=Q^* \tag{24}$$

と書き換えられる。

特に，断熱変化すなわち等エントロピー変化を考えるとき，音速 c は(21)式から，

$$c^2\equiv\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\frac{\kappa(p+p_B)}{\rho U}=\frac{\kappa-1}{U}c_p(T+T_B) \tag{25}$$

と定義され，また(24)式から $Q^*=0$ となり，(22)式を考慮して(23)式を解くと，

$$T_B\gg T \text{ のとき } U\fallingdotseq\kappa,\ \frac{p+p_B}{\rho}\fallingdotseq\text{const.},\ c^2=\frac{p+p_B}{\rho} \quad \text{以上(26)}$$

$$T_B\approx 0 \text{ のとき } U\fallingdotseq 1,\ \frac{p+p_B}{\rho^\kappa}\fallingdotseq\text{const.},\ c^2=\frac{\kappa(p+p_B)}{\rho} \quad \text{以上(27)}$$

が得られる。さて体膨張係数 β は(12)式を用いて

$$\beta\equiv\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{T+T_B} \tag{28}$$

と表されるが，理想気体の場合は $T_B=0$ であり，液体の場合は β が気体の場合よりはるかに小さいことから $T_B\gg T$ である。すなわち(26)式は液体の場合に対応し，(27)式は $p_B=0$ のとき理想気体に対応している。尚，水中爆発関係では圧縮性を考慮した液体の状態方程式として $p_B\neq 0$ のときの(27)式が採用され，p と ρ の関係式は Tait の式と呼ばれている[5]。

最後に，流体を気体と液体に分け，それぞれの代表例として空気と水をとりあげ，状態方程式(12)及びエンタルピーの式(20)に含まれる物理量の大略の値について述べる。

(a) 空気の場合

空気は近似的に理想気体とみなすことができるから，R を気体定数，γ を比熱比として $p_B=0,\ T_B=0,\ h^\circ-c_pT^\circ=0$，かつ $\kappa=\gamma=1.4,\ c_p=1.0045\,\text{kJ/kgK}$，従って $R_B=R=0.287\text{kJ/kgK}$とおくことができ[2]，(12)，(20)，(22)，(27)，(25)式はそれぞれ

$$p=\rho RT,\ h=c_pT,\ U=1,\ \frac{p}{\rho^\kappa}=\text{const.},\ c^2=\frac{\kappa p}{\rho}$$

と書くことができる。これらの式は空気力学で用いられている。

(b) 水の場合

真水を圧縮性流体と考える。水の物性値の表[6)7)]から，15℃を基準にとり，$T^\circ=288.15\,\text{K},\ p^\circ=1.01325\times10^5\text{P}_a,\ \rho=999.17\,\text{kg/m}^3,\ h^\circ=62.941\,\text{kJ/kg},\ c_p=4.184\,\text{kJ/kg·K},\ \beta=1.58\times10^{-4}/\text{K},\ c=1467\,\text{m/sec}$ をよみとり，これらの諸値を(25)，(22)式に代入すると，$T_B=6040\,\text{K},\ \kappa=1.0881,\ U=1.0841,\ p_B=21423\times10^5\text{P}_a$ が得られ，更に(13)式から $R_B=0.3388\,\text{kJ/kg·K}$ が得られる。これに対し，Cole は，実験結果を整理し，Tait の式に対して $p_B=3047\times10^5\text{P}_a,\ \kappa=7.15$ を与えている[5]。

3. 流体音場の基礎方程式

前節において，状態方程式(4)が(12)式のように与えられたとき，基礎方程式は(9)，(10)，(23)式，すなわち

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}+\rho\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=\sigma, \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i^*,\ i=1,2,3, \tag{30}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v_j\frac{\partial p}{\partial x_j}-\frac{\kappa(p+p_B)}{\rho U}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right)=\frac{\kappa-1}{U}Q^* \tag{31}$$

であることを示した。

連立方程式(29)，(30)，(31)を解いて $\rho,\ v_i$ を消去すると，p に関する方程式の中に音圧に関する方程式が含まれている筈であるが，しかし元の連立方程式は非線形であり，p のみに関する方程式を導くことは不可能である。それ故ここでは流速などが空間的・時間的にゆっくり変動する流場に，音圧が重畳された場合を取り扱う。すなわち，平均圧力を p_0，平均速度を v_{0i}，平均密度を ρ_0 とし，変動量を hat ～ で示して，

$$\rho=\rho_0+\hat{\rho},\ v_i=v_{0i}+\hat{v}_i,\ p=p_0+\hat{p} \tag{32}$$

とおき，$\rho_0,\ v_{0i},\ p_0$ に比べて $\hat{\rho},\ \hat{v}_i,\ \hat{p}$ を1次の微小量とし，かつ $\rho_0,\ v_{0i},\ p_0$ の場所及び時間に関する微分を2次以上の微小量とする。更に $\sigma,\ f_i^*,\ Q^*/U$ の時間的変動成分を1次の微小量とし，それぞれを $[\sigma]_{ac},\ [f_i^*]_{ac},\ [Q^*/U]_{ac}$ と表す。(32)式を(29)，(30)，(31)式に代入し，2次以上の微小量を無視すると，

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0\hat{v}_j+v_{0j}\hat{\rho})=[\sigma]_{ac}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0\hat{v}_i+v_{0i}\hat{\rho})+\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i}=[f_i^*]_{ac}, \tag{34}$$

$$\frac{D\hat{p}}{Dt}-c_0^2\frac{D\hat{\rho}}{Dt}=(\kappa-1)[Q^*/U]_{ac}, \tag{35}$$

ただし

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_{0j}\frac{\partial}{\partial x_j},\ c_0=\sqrt{\frac{\kappa(p_0+p_B)}{\rho_0U_0}},$$

$$U_0=1+\frac{(\kappa-1)\rho_0R_BT_B}{p_0+p_B} \tag{36}$$

が成立する。(33)，(34)式から $\hat{v}_i$ を消去すると

$$\frac{\partial^2\hat{\rho}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\hat{p}}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial[\sigma]_{ac}}{\partial t}-\frac{\partial[f_i^*]_{ac}}{\partial x_i} \tag{37}$$

が得られ，更に(35)，(37)式から $\hat{\rho}$ を消去すると，音圧 $\hat{p}$ に関する方程式が次のように得られる，

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\hat{p}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\hat{p}}{\partial x_i\partial x_i}\right)=\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial[\sigma]_{ac}}{\partial t}-\frac{\partial[f_i^*]_{ac}}{\partial x_i}\right)$$

$$+\frac{\kappa-1}{c_0^2}\frac{\partial^2[Q^*/U]_{ac}}{\partial t^2}. \quad (38)$$

(38)式は空間的・時間的に変動の緩やかな流場における音圧 $\bar{p}$ の基礎方程式であり，c_0 は断熱音速である。

更に最も簡単な場合，すなわち，静止流体中で音波が伝播する場合を考えると，

$$v_{0i}\fallingdotseq 0,\ \text{従って}\frac{D}{Dt}\fallingdotseq\frac{\partial}{\partial t} \quad (39)$$

とおくことができ，2次以上の微小量を省略すると，(38)式と同様にして，音圧 $\bar{p}$ に関する波動方程式

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial[\sigma]_{ac}}{\partial t}-\frac{\partial[f_i^*]_{ac}}{\partial x_i}+\frac{\kappa-1}{c_0^2}\frac{\partial[Q^*/U]_{ac}}{\partial t} \quad (40)$$

を導くことができる。(40)式は音全体に関する基礎方程式で，その右辺は音源の働きを表し，これに対し左辺は音圧 $\bar{p}$ の伝播のあり方を示している。(40)式の右辺の $[Q^*/U]_{ac}$ の存在から，熱源も音の原因となりうることが分る[8]。

尚，Phillips の圧力方程式[9)10)]において，$U=1$ とし，エントロピーの項に，(24)式を代入して，上記と同じ近似操作を行い，更に $\partial v_i/\partial x_i\fallingdotseq 0$ とおくと，(40)式と同じ式が得られる。

4. Lighthill の方程式に対する一考察

音についての Lighthill の基礎方程式は次のようにして導かれている[11]。すなわち連続方程式(29)及び運動方程式(30)から ρv_i を含む項を消去して

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial f_i^*}{\partial x_i} \quad (41)$$

を導き，左辺第2項を右辺に移項し，適当な常数 c_r を導入して

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-c_r^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial f_i^*}{\partial x_i}+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(p-c_r^2\rho) \quad (42)$$

と書き換え，この式の右辺に(8)式を代入して整理し，最終的に音場の基礎方程式として

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-c_r^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}, \quad (43)$$

ただし

$$T_{ij}=T_{0ij}+\delta_{ij}(p-c_r^2\rho),\ T_{0ij}=\rho v_i v_j-\tau_{ij} \quad (44)$$

を提示している。ここで T_{ij} は Lighthill の応力テンソルと呼ばれ，また c_r は静止流体中の音速に等しくなるよう決めている。尚，Lighthill の原論文[11]では $\sigma=0,\ f_i=0$ であるから，(43)式は拡張された Lighthill の式となっており，多くの教科書に採用されている[12)13)]。

他方，(41)式から同様にして

$$\frac{1}{c_r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial f_i^*}{\partial x_i}+\frac{1}{c_r^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(p-c_r^2\rho) \quad (45)$$

を導くことができる。(45)式において各項の変動成分をとり，それぞれを(40)式の各項と対応させると，$c_r=c_0$ となり，また右辺第3項の対応から

$$\frac{1}{c_r^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{p}-c_r^2\bar{\rho})=\frac{\kappa-1}{c_0^2}\frac{\partial[Q^*/U]_{ac}}{\partial t},$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{p}-c_0^2\bar{\rho})=(\kappa-1)[Q^*/U]_{ac} \quad (46)$$

が得られる。(46)式はエネルギー方程式である(23)式において v_i を1次の微小量とし，高次の微小量を無視することによっても導くことができる。(46)式の関係から，(43)式の右辺の T_{ij} に含まれる $\bar{p}-c_r^2\bar{\rho}$ は，陰にではあるが，熱源に相当する項を含むことがわかる。

尚，音を音源をも含めて断熱変化と考えると，(21)，(24)式から

$$Q^*=0,\ \text{すなわち}\ d\rho=\frac{1}{c_0^2}dp \quad (47)$$

が成立し，従って(41)式は

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial f_i^*}{\partial x_i} \quad (48)$$

となり，更に(44)式を用いると

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 T_{0ij}}{\partial x_i\partial x_j} \quad (49)$$

が得られる。(48)式を音場の方程式と考えるとき，時間的定常項を省略することができるから，p, σ 及び f_i^* は前節の記号を用いてそれぞれ $\bar{p}, [\sigma]_{ac}, [f_i^*]_{ac}$ とおくことができ，次のように書き換えられる，

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{\partial[\sigma]_{ac}}{\partial t}-\frac{\partial[f_i^*]_{ac}}{\partial x_i}. \quad (50)$$

5. 結　　　言

以上において，まず，単一相流体の状態方程式として拡張された Tammann の式を採用することにより，液相の場合の流体力学の基礎方程式は，気相の場合と同じような圧縮性を考慮した方程式に導かれることを示した。次に，この基礎方程式を媒質の流動が空間的・時間的に緩やかな場合に適用し，液体にも気体にも適用できる音圧に関する波動方程式を導いた。その結果，気，液の相に関係なく，形式的に吹き出し，外力，乱れ流れ以外に熱源（エントロピー変化）も陽に音源となりうることが分った。尚ここで導いた波動方程式は，流体の運動の変化が緩やかな場合に限らず，一般化された流場にも含まれていることが類推される。

最後に，騒音の研究をはじめるに当って御指導と御便宜を賜わり，特に本報告の内容に関して多くの御教示を頂いた九州大学工学部難波昌伸教授に心から御礼申し上げる。

なお，本報告は，著者が三菱重工業(株)の顧問として実施した研究の一環を取りまとめたものである。

参 考 文 献

1) Khan, M. M. S., "Computations of Aeroacoustic Fields using Finite Volume Method," Computational Acoustics: Argorthms and Appli-

cations, Elsevier Science Publishers B. V., 1988, pp. 83～101.
2) 山崎隆介, "数値計算のための流体力学の基礎方程式について," 西部造船会会報, 第78号, 1989, pp. 317～349.
3) Chen, H.-T. and Collins, R., "Shock Wave Propagation Past an Ocean Surface," Journal of Comp. Phys., Vol. 7, 1971, pp. 89～101.
4) 横田伊佐秋, "熱力学," 物理学テキストシリーズ 3, 岩波書店, 1987, pp. 75～76.
5) Cole, R. H., "Underwater Explosions", Dover Publications, Inc., 1965, p. 39.
6) 日本機械学会編, "機械工学便覧, 基礎編, 熱工学," 日本機械学会, 1985.
7) Pierce, A. D., "Acoustics—An Introduction to Its Physical Principles and Applications," McGrow-Hill Book Co., 1981, pp. 30～34.
8) Dowling, A. P. and Ffowcs Williams, J. E., "Sound and Sources of Sound," Ellis Horwood Limited, 1983, pp. 154～155.
9) Goldstein, M. E., "Aeroacoustics," McGraw-Hill International Book Co., 1976, p. 252.
10) Phillips, O. M., "On the Generation of Sound by Supersonic Turbulent Shear Layers," Journal of Fluid Mech., Vol. 9, 1960, pp. 1～28.
11) Lighthill, M. J., "On Sound Generated Aerodynamically, I. General Theory," Proc. Roy. Soc. London, Ser. A211, 1952, pp. 564～587.
12) Ffowcs Williams, J. E., "Hydrodynamic Noise," Ann. Review of Fluid Mech., Vol. 1, 1969, pp. 197～222.
13) Ross, D., "Mechanics of Underwater Noise," Pergamon Press, Inc., 1976, pp. 47～49.