引張および曲げを受ける亀裂円筒部材のための理想化構造要素の開発

正員　藤久保　昌　彦*　　正員　趙　　　耀**
正員　矢　尾　哲　也*

Idealized Structural Unit Method for Tubular Members with Crack Damage under Combined Tension and Bending

by Masahiko Fujikubo, *Member*　Yao Zhao, *Member*
Tetsuya Yao, *Member*

Summary

An Idealized Structural Unit is developed for predicting the elastoplastic behavior of tubular members with crack damage under combined tension and bending. This method can be easily applied to the elastoplastic analysis of frame structures containing through-thickness cracks. Ductile crack growth is considered using CTOD and CTOA as fracture parameters which rule the initiation and continuation of the crack growth, respectively.

The tangential stiffness matrix of a cracked member before reaching the ultimate strength of the cracked section is evaluated by introducing the crack spring element having the compliance of cracked section into the node of beam-column elements. The stiffness formulation after the ultimate strength of the cracked section is based on the plastic node method. The elasto-perfectly plastic material is assumed and the values of CTOD and CTOA are evaluated based on the Sanders' semi-membrane shell theory.

The results are compared with those of the finite elemet shell analysis, and the rationality and effectiveness of the proposed method are demonstrated.

1. 緒　　言

海洋構造物は一般に，レグやブレースに円筒部材を多く用いた構造となっている。これらの円筒部材は，損傷のない状態では座屈や塑性崩壊が生じないよう十分な強度を有している。しかしながら，波浪による繰り返し荷重のために，部材継手部などの応力集中部には疲労亀裂が発生する可能性がある。また補給船の衝突や甲板からの重量物の落下により凹損が生じた場合，その凹損の底部から亀裂損傷が，比較的容易に発生する可能性もある。

一般に，部材に亀裂が生じると，その断面剛性の低下によって構造全体の内力分布は変化する。このことは，構造各部の疲労寿命に変化をもたらす。さらに，もし亀裂断面が延性亀裂進展や脆性破壊によって破断した場合には，他部材の荷重負担が急増して構造全体の崩壊につながる危険性もある[1]。したがって，亀裂損傷を有する海洋構造物の安全性を論じるに当たっては，亀裂部材だけでなく構造全体の挙動を，亀裂進展の影響を含めて検討する必要がある。

亀裂損傷を有する円筒部材あるいは構造システムの崩壊挙動を詳細に調べるためには，有限要素法解析を行なうことが望ましい。しかし，これには単一部材に対しても莫大な計算時間と計算容量が必要となる。このため，近年，耐荷力や不安定破壊発生の簡易推定法に関する研究が進められている。その主なものに，HRR 特異場モデルと有限要素解に基づく Kumar 等[2] の方法，および Milne 等によるいわゆる R 6 法[3] が挙げられる。しかしこれらの方法は，基本的に単一部材の破壊強度評価を意図したものであり，亀裂進展による構造全体の内力再配分や亀裂部材以外の崩壊まで考慮した，構造システムとしての崩壊強度の推定には適用できない。

一方，板厚貫通周方向亀裂を有する円筒部材に関して，

*　広島大学工学部
**　広島大学大学院工学研究科

Gilles 等[4]は亀裂断面の曲げモーメント・回転角関係，軸力・軸変位関係，さらに荷重・J積分関係の closed-form solution を導いている。これらの関係式は，一次元有限要素と組み合わせることにより原理的にシステム解析に適用できる。しかし，指数硬化則に基づく非線形関係式であるため，増分型有限要素法との適合性が悪く，各荷重増分で繰り返し計算が必要となる。

同じく周方向貫通亀裂の場合について，著者らのひとり[5]は，亀裂断面の全断面塑性相関関係を導いている。さらに理想化構造要素法[6]に基づく解析プログラムを作成して，部材および構造全体の弾塑性挙動に与える亀裂の影響を調べている。但し，この解析法では，亀裂による部材の剛性の低下と亀裂進展の影響は考慮されていない。

本研究では，周方向貫通亀裂を有する円筒部材および円筒骨組構造の弾塑性解析のための，延性亀裂進展を考慮した新しい理想化構造要素を提案する。文献7)では，亀裂断面が曲げモーメントのみを受ける場合の解析法を示したが，ここでは，軸力と曲げモーメントの組合せ荷重を受ける場合にも適用できる，さらに一般化した理論を展開する。

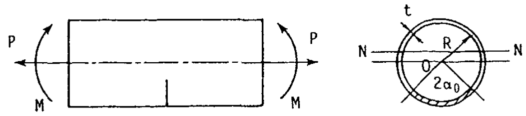
解析は各亀裂断面の最終強度解析と増分型のマトリックス構造解析からなる。マトリックス構造解析では，亀裂断面が最終強度に達するまでと，達した後に分けて部材の剛性マトリックスを定式化する。すなわち，前者の場合は，一次元有限要素の節点に亀裂による剛性の低下を表すバネ機構を挿入して部材の剛性を評価する。この要素では，亀裂断面と完全円断面での中性軸のずれによる偏心の影響(軸変形と曲げ変形の連成)も考慮することができる。延性亀裂の発生および進展に関する破壊パラメータには亀裂先端開口変位 CTOD および亀裂先端開口角度 CTOA をそれぞれ用いる。軸力と曲げの組合せ荷重に対するこれらの破壊パラメータの理論推定式を Semi-membrane shell theory に基づいて新たに導出する。亀裂断面が最終強度に達した後は，塑性節点法[8]に基づいて部材の剛性マトリックスを求める。亀裂進展パラメータには，CTOA を用いる。解析結果をシェル要素による有限要素解析結果と比較して，本解析法の妥当性を示す。

なお，本報告では解析例として，単一部材に比例荷重が作用する最も基本的な場合のみ取り上げる。荷重比の変化を伴う構造物の全体解析については別の機会に報告する。

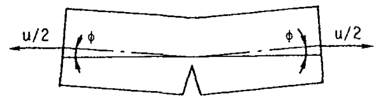
2. 解析の理論

2.1 弾性解析

Fig. 1 に初期亀裂半角 α_0 の周方向貫通亀裂を有する円筒部材を示す。荷重として引張力 P と曲げモーメント M を考え，P は完全円の中心点Oに作用するものとする。亀裂が生じると部材の剛性は低下する。ここではまず，亀裂部材の剛性を簡易的に評価するための部材のモデル化について述べ，つぎに弾性剛性方程式を定式化する。



(a) Tubular member with through-thickness crack



(b) Axial displacement and rotational angle of cracked member

Fig. 1 Cracked tubular member under combined tension and bending

いま，Fig. 1 の円筒部材に蓄えられる弾性ひずみエネルギー U を，亀裂が存在しない場合のひずみエネルギー U_{nc} と，P および M を一定に保った状態で亀裂が半角0から α_0 まで進展する時のひずみエネルギーの増加量 U_c の和で表す。すなわち，

$$U=U_{nc}+U_c \tag{1}$$

ここで，$U_c=2\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_{P,M}Rtd\theta$

A：亀裂面積

U_{nc} は梁理論から容易に求めることが出来る。一方，U_c における被積分項 $(\partial U/\partial A)_{P,M}$ は，P, M＝一定の条件でのエネルギー解放率を表しており，平面応力状態を仮定すると，応力拡大係数 K_I およびヤング率 E を用いて次式のように与えられる。

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_{P,M}=\frac{K_I^2}{E} \tag{2}$$

したがって，

$$U_c=2Rt\int_0^{\alpha_0}\left(\frac{K_I^2}{E}\right)_{P,M}d\theta \tag{3}$$

式(1)に Castigliano の定理を適用すると，次の関係式を得る。

$$u=\frac{\partial U}{\partial P}=u_{nc}+u_c \tag{4}$$

$$\phi=\frac{\partial U}{\partial M}=\phi_{nc}+\phi_c \tag{5}$$

すなわち，荷重点の軸変位 u および回転変位 ϕ は，いずれも亀裂のない場合の変形量 u_{nc}, ϕ_{nc} と亀裂による変形の増加量 u_c, ϕ_c の和で表されることになる。そこで，Fig. 2 のように亀裂部材を，亀裂のない2つの梁・柱要素と，亀裂の影響を表すバネ K_P および K_M の集合にモデル化する。

式(3)の応力拡大係数 K_I には次の Forman の式[9]を用いる。

$$K_I=(f_PP+f_MM)\sqrt{\pi R\theta} \tag{6}$$

ここで，$f_P=F_P/2\pi Rt$, $f_M=F_M/\pi R^2t$

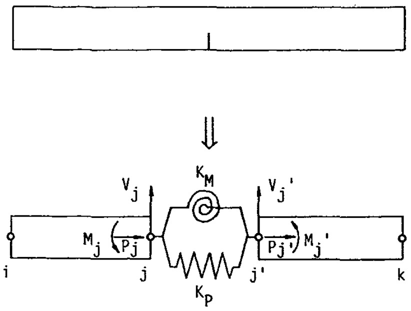


Fig. 2 Idealization of cracked tubular member in stiffness evaluation

$$F_P=\left\{\frac{\theta}{2\pi\varepsilon}\left[2\sqrt{2}\left(\frac{\eta}{\theta}\right)^2+\pi c^2/\lambda-2\sqrt{2}\right]\right\}^{1/2}$$

$$F_M=\left\{\frac{\theta}{2\pi\varepsilon}\left[2\sqrt{2}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\mu\right)^2+\pi c^2/\lambda-2\sqrt{2}\right]\right\}^{1/2}$$

$$\mu=1+\frac{1}{2}\,\frac{\theta-\cot\theta(1-\theta\cot\theta}{2\cot\theta+\sqrt{2}\,\cot((\pi-\theta)/\sqrt{2})}$$

$$\eta=\theta+\frac{1-\theta\cot\theta}{2\cot\theta+\sqrt{2}\,\cot((\pi-\theta/\sqrt{2})}$$

$$c=1+\frac{\pi}{16}\lambda^2-0.0293\lambda^3\quad(\lambda\leqq 1)$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\lambda\right)^{0.5}+\left(\frac{0.179}{\lambda}\right)^{0.885}\quad(\lambda>1)$$

$$\lambda=\frac{\theta}{2\varepsilon}\qquad \varepsilon^2=\frac{t/R}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$$

式(4)および式(5)の計算を行なうと，u_c および ϕ_c が次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix}u_c\\ \phi_c\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_P & C_{PM}\\ C_{MP} & C_M\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P\\ M\end{Bmatrix}\tag{7}$$

$$C_P=\frac{4\pi R^2 t}{E}\int_0^{\alpha_0} f_P^2\theta d\theta$$

$$C_M=\frac{4\pi R^2 t}{E}\int_0^{\alpha_0} f_M^2\theta d\theta$$

$$C_{PM}=C_{MP}=\frac{4\pi R^2 t}{E}\int_0^{\alpha_0} f_P f_M\theta d\theta$$

上式で，コンプライアンス C_{PM} および C_{MP} は，亀裂断面の曲げの回転軸が，Fig. 1(a)の N-N 軸のように完全円の中性軸からずれることによる偏心の影響を表している。すなわち，C_{PM} は曲げモーメント M によって断面が N-N 軸回りに回転する時の点Oの軸変位を表す。また，C_{MP} は軸力 P によって N-N 軸回りに生じる偏心モーメントにより，断面が回転することを表している。

式(7)を用いると，Fig. 2 のバネ要素 jj' の剛性方程式が次式のように得られる。

$$\{x_c\}=[K_c]\{u_c\}\tag{8}$$

ここで，$\{x_c\}=\{P_j\ M_j\ P_{j'}\ M_{j'}\}^T$

$\{u_c\}=\{u_j\ \phi_j\ u_{j'}\ \phi_{j'}\}^T$

$$[K_c]=\frac{1}{C_P C_M-C_{PM}^2}\times\begin{bmatrix}C_M & -C_{PM} & -C_M & C_{PM}\\ & C_P & C_{MP} & -C_P\\ & & C_M & -C_{PM}\\ sym & & & C_P\end{bmatrix}$$

これを梁・柱要素 ij および $j'k$ の剛性方程式に足しこむことにより，部材全体の弾性剛性方程式が求められる。

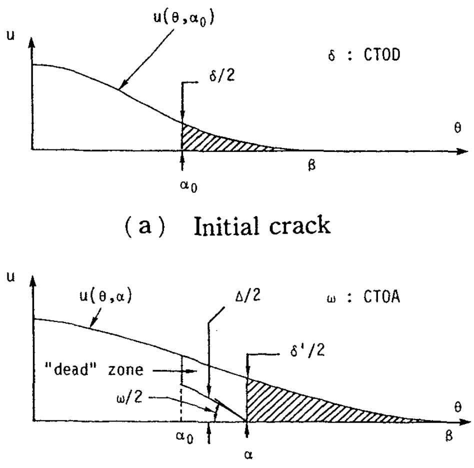
なお，以上の定式化では部材を弾性体としたが，一般に亀裂部材に外力が作用すると，亀裂先端には塑性域が生じる。やがて塑性域の拡大と共にCTODが限界値に達すると延性亀裂進展が始まり，有効断面はさらに減少する。これらの亀裂先端塑性域と亀裂進展が部材剛性に与える影響は，式(3)の亀裂半角 α_0 を補正することにより考慮できる[7]。しかし，本研究では解析をできるだけ簡略化するため，剛性に対する亀裂先端塑性域と亀裂進展の影響は無視する。すなわち，亀裂断面が最終強度に達するまでは初期亀裂半角に対する弾性剛性を用いる。この近似の精度については，後に考察する。

2.2 亀裂断面の最終強度解析

ここでは，延性亀裂進展の影響を考慮した亀裂断面の最終強度解析法を示す。

2.2.1 亀裂進展クライテリア

Fig. 3 に亀裂進展前および進展中の亀裂開口形状を模式的に示す。角度に関する記号の定義は Fig. 4 に示されている。本解析では，弾性解析と平行して亀裂断面の亀裂先端開口変位CTODを計算し，これが材料の限界値 δ_{cr} に達した時，延性亀裂が発生するものとする。延性亀裂の進展に対しては，相当量亀裂が進展するまでほぼ一定値を示す[10]亀裂先端開口角度CTOAをパラメータに用いる。すなわち，延性亀裂は，Fig. 3(b)のCTOAが，材料の亀裂進展抵抗 ω_{cr} と等しい値を保ちながら進展するものと考える。



(a) Initial crack

(b) Crack in extension

Fig. 3 Crack profiles

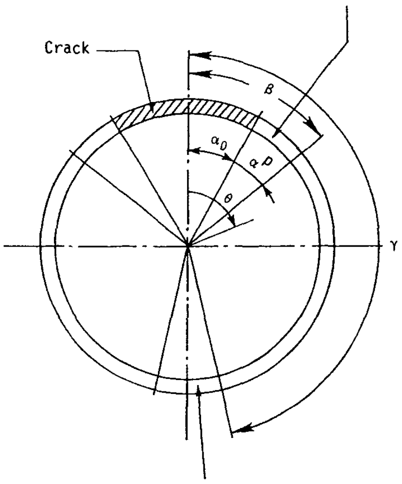


Fig. 4 Yielded zone of cracked section

以上のクライテリアに基づいて亀裂断面の最終強度を解析する。

まず，亀裂進展パラメータ CTOD および CTOA を簡易的に評価するため，純曲げに対して求められた Sanders の理論解[11),12)] を，引張・曲げの組合せ荷重に適用出来るよう一般化する。以下にその理論の概要を示す。

2.2.2 CTOD

円筒殻は平面応力状態にあり Semi-Membrane Theory[13)] に従うものと仮定する。Semi-Membrane Theory は，円筒の長さ方向への変位および応力の勾配が周方向に比べて小さいと仮定して，完全シェル理論から長さ方向の微係数を選択的に消去したもので，比較的長い貫通亀裂を有する円筒部材への精度の高い適用性が明らかにされている[11),14)]。

次に亀裂先端塑性域では，Dugdale model と同様に一様な降伏応力（あるいは流動応力）σ_F が作用していると仮定する。また曲げの圧縮側の塑性域の影響も考慮する。Fig. 4 に，これらの塑性域を示す。

いま，亀裂が部材の中央にあり，曲げモーメント M のみが作用しているとする。亀裂断面に対する境界条件は，対称性を考慮して次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
&\sigma=0 && (0<\theta<\alpha)\\
&\sigma=\sigma_F && (\alpha<\theta<\beta)\\
&u=0 && (\beta<\theta<\gamma)\\
&\sigma=-\sigma_F && (\gamma<\theta<\pi)\\
&V=T_\theta=S_\theta=0 && \text{all } \theta\\
&\int_0^\pi \sigma\cos\theta d\theta=M/2R^2t
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ここで，σ：軸方向応力，u：軸方向変位

V, T_θ, S_θ：単位長さ当りの面外および面内剪断力，周方向ねじりモーメント（cf. Fig. A1）

式(9)に対する境界値問題を解けば，変位および応力分布や亀裂先端塑性域の長さが求められる。Fig. 3(a)の亀裂開口形状は $0<\theta<\beta$ の範囲の軸方向変位 u として与えられる。

本研究では，以上の Sanders の理論において，境界条件および応力関数に引張力の影響を考慮することにより，引張と曲げの組合せ荷重を受ける場合の CTOD の理論解を導いた。その導出過程を付録1に示す。

一般的な場合として，曲げの圧縮側にも塑性域がある時の CTOD は次式で与えらる。

$$
\begin{aligned}
\delta&=\sqrt{2}\Big[\Big(3\cos\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha\Big)\sigma_B-\Big(\frac{1}{2}\alpha^2+1\Big)\sigma_T\\
&\quad -A+C\cos\alpha\Big]/\varepsilon\\
&=f_\delta(\sigma_T, \sigma_B, \alpha, \beta, \gamma)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ここで，

$$
\sigma_T=\frac{P}{2\pi Rt\sigma_F},\quad \sigma_B=\frac{M}{\pi R^2t\sigma_F}
$$

$$
\begin{aligned}
A&=\sigma_B\cos\beta-\frac{1}{2}\sigma_T\beta^2+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\\
&\quad-\sqrt{2}(P\cos x+Q\sin x)\\
C\sin\beta&=-\frac{1}{2}(7\sin\beta+\beta\cos\beta)\sigma_B\\
&\quad-\beta\sigma_T+(\beta-\alpha)+\sin(\beta-\alpha)\\
P\sin x&=-\sigma_B\sin\beta-\beta\sigma_T+(\beta-\alpha)+Q\cos x\\
Q&=\sigma_B\sin\gamma-(\pi-\gamma)\sigma_T-(\pi-\gamma)\\
x&=(\gamma-\beta)/\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

上式の β および γ は，σ_T および σ_B が与えられると，次の連立方程式を解いて求められる。

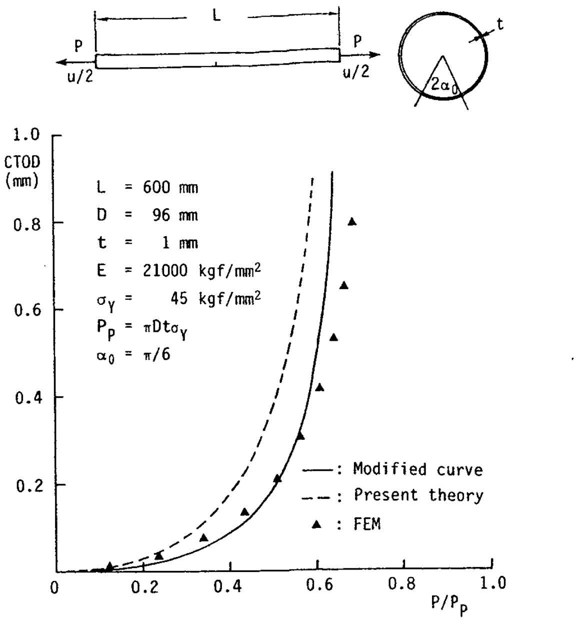
$$
\begin{aligned}
C_1\sigma_T+D_1\sigma_B-N_1=0\\
C_2\sigma_T+D_2\sigma_B-N_2=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ここで，

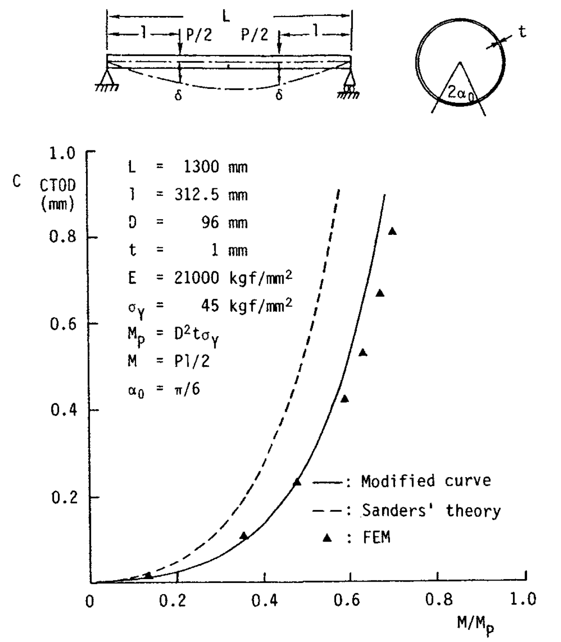
$$
\begin{aligned}
C_1&=\sqrt{2}(\pi-\gamma+\beta\cos x)\sin\beta\\
&\quad+(\sin\beta+\beta\cos\beta)\sin x\\
C_2&=-\sqrt{2}((\pi-\gamma)\cos x+\beta)\sin\gamma\\
&\quad+[(\pi-\gamma)\cos\gamma-\sin\gamma]\sin x\\
D_1&=\frac{1}{2}(\beta+3\sin\beta\cos\beta)\sin x\\
&\quad-\sqrt{2}(\sin\gamma-\sin\beta\cos x)\sin\beta\\
D_2&=\sqrt{2}(\sin\gamma\cos x-\sin\beta)\sin\gamma\\
&\quad-\frac{1}{2}[3\sin\gamma\cos\gamma-(\pi-\gamma)]\sin x\\
N_1&=[\sin\beta-\sin\alpha+(\beta-\alpha)\cos\beta]\sin x\\
&\quad-\sqrt{2}[\pi-\gamma-(\beta-\alpha)\cos x]\sin\beta\\
N_2&=[\sin\gamma-(\pi-\gamma)\cos\gamma]\sin x\\
&\quad+\sqrt{2}[(\pi-\gamma)\cos x-(\beta-\alpha)]\sin\gamma
\end{aligned}
$$

曲げの圧縮側が弾性の時は $\gamma=\pi$ とおけばよい。

Fig. 5 に，式(10)および式(11)から求められた CTOD を，シェル要素を用いた FEM 解析の結果[15)] と比較して破



(a)　Crack under tension



(b)　Crack under bending

Fig. 5　Relationships between applied load and CTOD

線で示す。FEM解析では，亀裂先端に初期座標が同一で変位が独立な複数の縮退節点を設け，これらの節点間の最大開き量をCTODと定義しいる[16]。また要素の降伏はMisesの降伏条件を用いて判定している。Fig. 5によれば，引張，曲げのいずれの場合も式(10)のCTOD値は，FEM解析結果の約2倍となっている。

ところで，Fig. 6はFEM解析で求められた純曲げの場合の亀裂断面の軸方向応力の分布である。亀裂先端塑性域では応力場の多軸性に起因して，実際には降伏応力より大きな軸向応力が生じている。したがって，Dugdale modelの仮定をおくと，同じ作用荷重に対する亀裂先端塑性域長さが過大に推定されることになる。これがCTODが過大推定された理由と考えられる。そこで，本研究ではFEM解析結果に一致するよう式(10)の解を1/2倍した値（Fig. 5の実線）を用いることにする。この実線の結果は，広い荷重範囲でFEM結果と良い相関を示している。

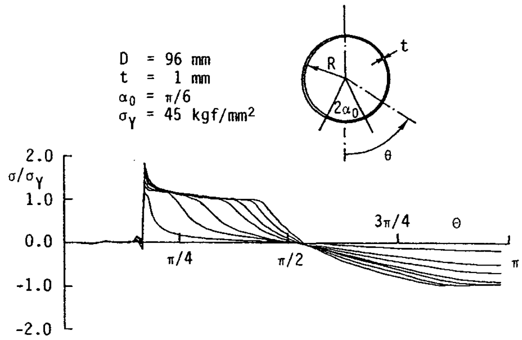


Fig. 6　Axial stress distributions at cracked section under bending

2.2.3　CTOA

CTOAの定義はSandersに従う[12]。Fig. 3(b)において，点$\theta=\alpha$は進展中の亀裂の先端を表している。いま，亀裂は，過去に亀裂先端であった領域（$\alpha_0<\theta<\alpha$）に生じていた塑性開口変位の部分（点$\theta=\alpha$のδ'に相当）を死領域として進展すると仮定する。ここで死領域とは，現亀裂先端（$\theta=\alpha$）の塑性開口変位δ'の大きさに領域の存在が何ら影響しない，すなわち，進展中の亀裂先端のδ'が，初期亀裂に対するδと同様に，式(10)から計算できると仮定することを意味する。この時，亀裂進展によって自由表面となった部分の開口量Δは次式で表される。

$$\Delta(\theta,\alpha)=2u(\theta,\alpha)-2u(\theta,\theta),\quad \alpha_0<\theta<\alpha \tag{12}$$

ここで$u(x,y)$は，亀裂先端が$\theta=y$にある時の$\theta=x$における開口量を表す。式(12)より，CTOAが次式のように求められる。

$$R\omega=-\lim_{\theta\to\alpha}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}=\frac{d\delta'}{d\alpha}-2\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)_{\theta=\alpha} \tag{13}$$

ここで，$\delta'=u(\alpha,\alpha)$

式(13)の微分を実行すると，CTOAは形式上次のような関数形で与えられる。

$$\omega=f_\omega(\alpha,\sigma_T,\sigma_B,\sigma_T',\sigma_B',\beta',\gamma') \tag{14}$$

ここで，$'$は亀裂半角αに関する微分を表す。式(14)より，亀裂進展条件式（tearing equation）は次式で表される。

$$\omega_{cr}=f_\omega(\alpha,\sigma_T,\sigma_B,\sigma_T',\sigma_B',\beta',\gamma')/2 \tag{15}$$

右辺の2は，式(13)のδ'およびuが約2倍に過大推定されることに対する修正係数である。

ところで，亀裂先端塑性域長さに関する式(11)をαについて微分すると，次の関係が得られる。

$$g_1(\alpha, \sigma_T, \sigma_B, \sigma_T', \sigma_B', \beta', \gamma')=0$$
$$g_2(\alpha, \sigma_T, \sigma_B, \sigma_T', \sigma_B', \beta', \gamma')=0 \quad (16)$$

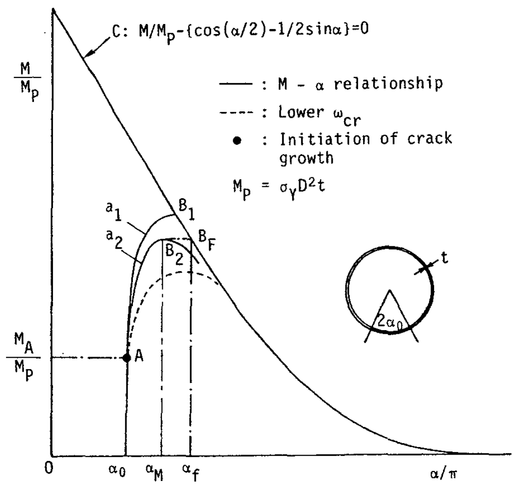
式(15)および式(16)から β' と γ' を消去すると，亀裂半角 α と断面力 σ_T および σ_B の増分関係が次のように導かれる。

$$\omega_{cr}=F_\omega(\alpha, \sigma_T, \sigma_B, d\sigma_T/d\alpha, d\sigma_B/d\alpha) \quad (17)$$

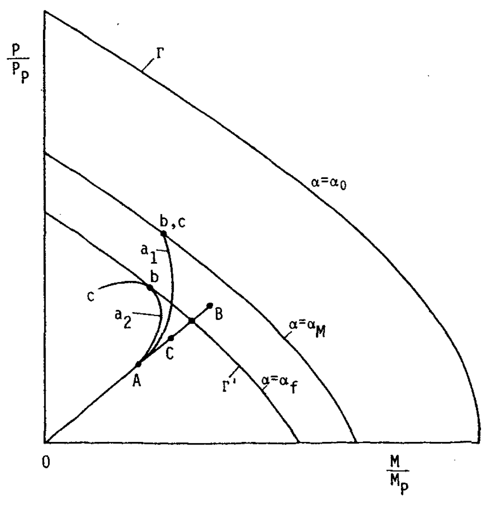
式(17)を用いると，亀裂が $d\alpha$ だけ進展した時の断面力の変化 $d\sigma_T$ および $d\sigma_B$ を求めることができる。付録2に関数 F_ω の具体的な形を示す。

2.2.4 亀裂断面の最終強度

始めに，基本的な純曲げの場合を例に，亀裂断面の最終強度の決定法を示す。Fig. 7(a)は，曲げモーメント M と亀裂半角 α の関係を示したものである。点 A において式(10)のCTODが δ_{cr} に達すると，亀裂の進展が始まる。以後，曲げモーメント増分 dM と亀裂進展量 $d\alpha$ の関係は，式(17)から求められる。曲線 C は α と全断面塑性モーメントの関係を表している。



(a) Single loading



(b) Combined loading

Fig. 7 Determination of the ultimate strength of cracked section

M と α の関係には，材料の亀裂進展抵抗 δ_{cr} および ω_{cr} の大きさによって，a_1 と a_2 の2通りの場合が考えられる。a_1 は亀裂進展抵抗の大きな材料の場合であり，全断面降伏するまで耐荷力は増加を続け，全断面降伏後，断面積の減少とともに耐荷力が低下する。一方，a_2 では全断面降伏前に荷重低下が起きている。これは，断面内に塑性域が広がることによる耐荷力の上昇よりも，亀裂進展によって有効断面が減ることによる耐荷力の低下の方が著しい場合に当る。このような亀裂長・断面力関係を求めることにより，a_1 の場合は交点 B_1 から，また a_2 では点 B_2 からそれぞれ最終強度が求められる。なお，ω_{cr} が小さい材料ほど，新しい亀裂面の生成に必要なエネルギーは少なくすむため，同じ δ_{cr} でも $M-\alpha$ 曲線は破線のようになり，最終強度は低下する。

Fig. 7(b)は軸力と曲げの組合せ荷重を受ける場合の断面力の変化を示している。曲線 Γ は，亀裂断面に Fig. 1 の向きに軸力と曲げモーメントが作用する時の全断面塑性相関関係を表し，次式で与えられる[5]。

$$\Gamma=\frac{M}{M_P}-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{P}{P_P}\right)+\frac{1}{2}\sin\alpha=0 \quad (18)$$

ここで，M_P, P_P：亀裂のない円筒断面の全断面塑性軸力およびモーメント

本研究の解析では，比例荷重（式(17)で $d\sigma_T/d\sigma_B$＝一定）の場合のみを取り扱う。この場合，断面力は $O\rightarrow A\rightarrow B\rightarrow C$ のように変化し，単一荷重の場合と同様に，最終強度は点 B で与えられる。

2.3 亀裂部材の後最終強度解析

2.3.1 塑性関節の導入

亀裂断面が最終強度に達した後は，断面に塑性関節を導入する。以後亀裂断面の内力は，負荷の続く限り，式(18)で与えられる全断面塑性相関関係を満足しながら変化するものとする。

単一荷重に対する Fig. 7(a)においてケース a_1 で最終強度に達した場合，亀裂断面はすでに全断面降伏しているので，そのまま上記の解析を行なうことができる。これに対し，a_2 の場合は，最終強度に達した段階では，全断面塑性条件はまだ満足されていない。そこで，まず点 B_2 の断面力によって式(18)の全断面塑性条件が満足されるような亀裂角度（Fig. 7(a)の α_f）を計算する。次に，この角度 α_f まで一定荷重下で亀裂が進展するものと仮定して，全断面塑性条件を満足させる（点 B_F）。同時に，Fig. 8 に破線で示すように，亀裂角度 α_f に関する弾性解析を別途行い，亀裂を進展させたことによる変形の増加（B_2B_F）を近似的に評価する。以後，点 B_F から後最終強度解析を行なう。比例荷重についても同様の手順で解析する。

部材の弾塑性剛性方程式は塑性節点法[8]（PNM）により

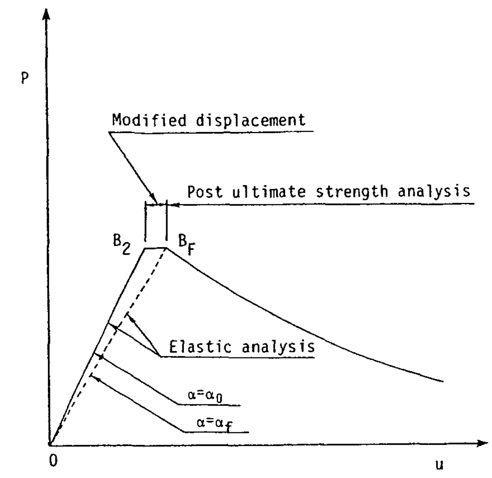
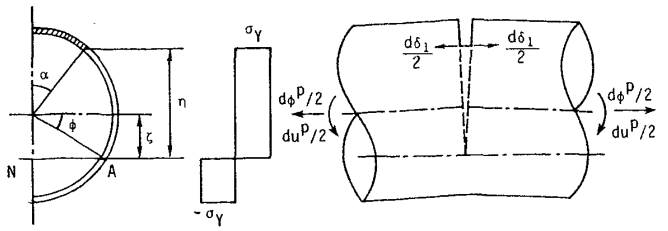
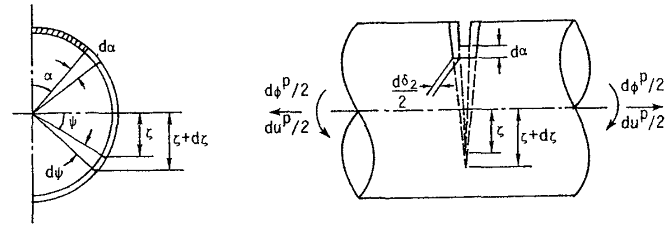


Fig. 8 Load-displacement relationship of cracked member



(a) Component due to du^p and $d\phi^p$



(b) Component due to the shift of neutral axis

Fig. 9 CTOA at fully plastic cracked section

求める。

なお，荷重比が変化する一般的な場合の解析は別の機会に報告するが，その基本的手順は以下の通りである。

式(8)のバネ要素を用いた全体構造解析から亀裂断面の断面力増分 $d\sigma_T$ および $d\sigma_B$ が得られると，これらを式(17)に代入して，亀裂進展量 da が求められる．亀裂長に応じてバネ要素の剛性を変化させながら増分解析を続けると Fig. 7(b)のような断面力の軌跡 $O \to A \to b \to c$ を得る。この軌跡が現亀裂長に対する全断面塑性相関曲線 Γ と交わるケース a_1 では，その交点から塑性節点法解析を行なう。ケース a_2 では，軌跡上で原点から最も離れた時(点 b)に全断面塑性条件が満足されるような亀裂角度 α_f を求める。そして，この点 b を通る相関曲線 Γ' を用いて塑性節点法解析を始める。

2.3.2 亀裂進展条件

Smith[17] は幾何学的考察に基いて曲げを受ける亀裂断面の，全断面降伏状態における CTOA の推定式を導いている。本研究では，これを軸力の影響を考慮できるよう拡張する。

まず部材の軸変形および回転変形について次の関係を仮定する。

$$du_{nc}=du^e,\ du_c=du^p$$
$$d\phi_{nc}=d\phi^e,\ d\phi_c=d\phi^p \tag{19}$$

添え字 e および p はそれぞれ弾性および塑性に関する量を表す。すなわち，亀裂断面には塑性変形のみ生じ，他の部分は弾性挙動すると考える。

次に，亀裂断面の回転軸は，Fig. 9(a)の塑性中性軸に一致すると仮定する。このように仮定すると，亀裂先端位置における軸方向の伸びの増加 $d\delta$ は，du^p および $d\phi^p$ により生じる成分 $d\delta_1$(Fig. 9(a))と，回転角 ϕ^p が一定の状態で，中性軸が $d\zeta$ だけ移動することによる成分 $d\delta_2$ (Fig. 9(b)) との和で与えられる。すなわち，

$$d\delta=d\delta_1+d\delta_2 \tag{20}$$

ここで，

$$d\delta_1=\eta d\phi^p+du^p$$
$$d\delta_2=\phi^p d\zeta$$
$$\eta=\zeta+R\cos\alpha$$
$$\zeta=R\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{P}{P_p}\right)$$

式(20)をつぎの関係に代入すると，CTOA が求められる。

$$\omega=\frac{1}{R}\frac{d\delta}{d\alpha} \tag{21}$$

式(20)および式(21)より，全断面塑性状態における亀裂進展条件式がつぎのように得られる。

$$\omega_{cr}=\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{P}{P_p}\right)+\cos\alpha\right]\frac{d\phi^p}{d\alpha}+\frac{1}{R}\frac{du^p}{d\alpha}+\frac{1}{2}\phi^p\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{P}{P_p}\right)\left(1+\frac{\pi}{P_p}\frac{dP}{d\alpha}\right) \tag{22}$$

2.3.3 弾塑性接線剛性方程式

式(18)を満足して全断面降伏した亀裂断面では，負荷の続く限りつぎの関係を満足する必要がある。

$$d\Gamma=\frac{\partial\Gamma}{\partial P}dP+\frac{\partial\Gamma}{\partial M}dM+\frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha}d\alpha=0 \tag{23}$$

式(22)を $d\alpha$ について解いて式(23)に代入すると，断面力増分と塑性変形増分に関するつぎの関係が得られる。

$$d\Gamma=\frac{\partial\Gamma}{\partial P}dP+\frac{\partial\Gamma}{\partial M}dM+\frac{\partial\Gamma}{\partial u^p}du^p+\frac{\partial\Gamma}{\partial\phi^p}d\phi^p=0 \tag{24}$$

ここで

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial P}=\frac{\pi}{2}\frac{M_p}{P_p}\sin\zeta+\frac{1}{h}\frac{\pi}{2}\frac{\phi^p}{P_p}\frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha}\cos\zeta$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial M}=\frac{1}{M_p}$$
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u^p}=\frac{1}{Rh}\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha}$$
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi^p}=\frac{1}{h}\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha}(\sin\zeta+\cos\alpha)$$
$$\zeta=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi P}{2P_p} \quad h=\omega_{cr}-\frac{1}{2}\phi^p\cos\zeta$$

式(24)を用いて，PNMにより亀裂部材の弾塑性剛性方程式を導く。PNMでは，要素内部は常に弾性で塑性変形は節点に縮約されて生じる。すなわち，式(19)と同じ仮定に基づいて，要素の剛性が評価される。

Fig. 2の梁・柱要素 ij の弾性剛性方程式を次式で表す。

$$\{dx\}=[K^e]\{du^e\} \tag{25}$$

ここで，

$$\{dx\}=\{dP_i\ dV_i\ dM_i\ dP_j\ dV_j\ dM_j\}^T$$
$$\{du\}=\{du_i\ dv_i\ d\phi_i\ du_j\ dv_j\ d\phi_j\}^T$$

ここでは，節点 i, j がともに亀裂断面の場合を考える。梁・柱要素では，節点力 $\{x\}$ は P, M などの断面力に一致する。そこで，式(18)の全断面塑性条件を節点力の関数と見なして塑性流れ理論を適用すると，塑性節点変位増分（亀裂断面における $du^p, d\phi^p$）が次式のように与えられる。

$$\{du^p\}=[\Phi]\{d\lambda\} \tag{26}$$

ここで，

$$[\Phi]=[\{\chi_i\}\{\chi_j\}]$$
$$\{d\lambda\}=\{d\lambda_i\ d\lambda_j\}^T$$
$$\{\chi_i\}=\left\{\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x}\right\}$$

$d\lambda_i$：節点 i の塑性節点変位増分の大きさを表す正のパラメータ

節点 i および j における式(24)の塑性負荷条件は，まとめて次式の形に表される。

$$[\Phi]^T\{dx\}+[\Psi]\{d\lambda\}=\{0\} \tag{27}$$

ここで，$[\Psi]=[\psi_i\ \psi_j]$（対角マトリックス）

$$\psi_i=\frac{\partial \Gamma_i}{\partial u_i^p}\frac{\partial \Gamma_i}{\partial P_i}+\frac{\partial \Gamma_i}{\partial \phi_i^p}\frac{\partial \Gamma_i}{\partial M_i}$$

また全節点変位増分 $\{du\}$ は，弾性成分 $\{du^e\}$ と塑性成分 $\{du^p\}$ の和で与えられる。

$$\{du\}=\{du^e\}+\{du^p\} \tag{28}$$

式(25)～(28)から，要素 ij の弾塑性接線剛性方程式が次式のように求められる。

$$\{dx\}=[K^p]\{du\} \tag{29}$$

ここで，

$$[K^p]=[K^e]-[K^e][\Phi]([\Phi]^T[K^e][\Phi]-[\Psi])^{-1}[\Phi]^T[K^e]$$

本解析法によれば，亀裂断面が全断面降伏した円筒部材の接線剛性方程式をマトリックス演算のみで求めることができる。

なお，式(26)の塑性節点変位増分 $\{du^p\}$ は，亀裂断面の全塑性軸変位および全塑性回転角に相当するため，Fig. 2の場合では要素 ij あるいは要素 $j'k$ のいずれか一方においてのみ降伏を考慮すればよい。亀裂のない断面（節点）の降伏に対しては，亀裂進展の影響を表す式(27)のマトリックス $[\Psi]$ の当該成分を0とおけば，式(29)により剛性方程式が同様に求められる。このように本定式化に従うと，部材の力学的特性が，亀裂断面あるいは部材端に設けた節点の節点力と節点変位に関する増分マトリックス型で与えられるので，亀裂部材を有する構造システムの弾塑性解析を容易に行なうことができる。

2.4 解析の手順

上記の理論に基づく解析手順を以下にまとめる。

（1） 式(8)を用いて増分型の弾性解析を行い，各ステップで亀裂要素のCTODを式(10)より求める。

（2） ある亀裂要素 i のCTODが δ_{cr} に達すると弾性計算を一旦打ち切り，2.2.4に示した方法で要素 i の亀裂断面の最終強度を求める。

（3） 要素 i の亀裂断面が最終強度に達するまで，再び増分型の弾性計算を行なう。

（4） 亀裂要素がFig. 7(a)のケース a_1 で最終強度に達した場合は，この要素の弾塑性剛性マトリックスを2.3に示した方法で求め，解析を続ける。

（5） 亀裂要素がFig. 7(a)ケース a_2 で最終強度に達した場合は，2.3.1の手順により，全断面塑性条件を近似的に満足させた後，弾塑性剛性マトリックスを求め，解析を続ける。

3. 解析結果

本解析法の妥当性を確認するため，両端支持された亀裂円筒部材に軸心引張荷重，純曲げ荷重および偏心引張荷重のそれぞれが作用する場合を解析し，その結果をシェル要素によるFEM解析結果と比較した。FEM解析では，都井らにより定式化が行なわれた4節点アイソパラメトリック・シェル要素を用いた[18]。Fig. 10に亀裂断面近傍の要素分割図を示す。境界条件を単純化するため，いずれの荷重条件に対しても，全体をシェルとして解析する部分と梁・柱として解析する部分に分け，その境界面で断面が平面を保持するとして両部分を結合している。

3.1 軸心引張

Fig. 11(a)に初期亀裂半角が $\pi/6$ および $\pi/4$ の小型円筒部材について得られた荷重・軸変位曲線を示す。本解析法では，対称性を考慮して1つの梁要素で解析している。一方FEM解析では約400要素を用いている。

図中の○印は，本解析法で求められた延性亀裂の発生時点を表している。実線のFEM解析では，亀裂先端の節点の節点力を順次解放することによって亀裂進展を考慮しており，荷重・変位曲線がのこぎり歯状に変化する時点が，延性亀裂の発生を表す。いずれの初期亀裂角度の場合も，本解析法による計算結果は，初期剛性，最終強度さらにその

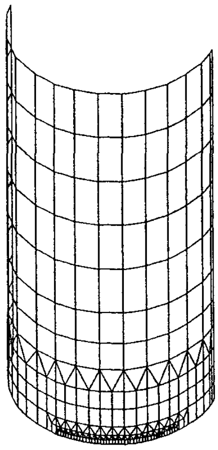


Fig. 10　Finite element representation of cracked tubular member

後の挙動とも FEM 解析の結果と非常に良く一致している。最終強度に達した所に見られる水平部分は，Fig. 8 のように亀裂を強制的に進展させたことによる。

Fig. 11(b)は Fig. 11(a)の円筒と同じ材料および径/板厚比で，寸法が 15 倍の実機サイズの大型部材に軸心引張を加えた場合の結果である。材料が同じ亀裂進展抵抗を有する場合，大型部材ほど断面降伏の初期の段階から亀裂進展が始まること，および亀裂進展が始まってからの余剰耐荷力が大きいことが分かる。曲げ荷重の場合についても同様の結果が得られている[7]。本解析結果は FEM 解析結果とこの場合も良い一致を示している。

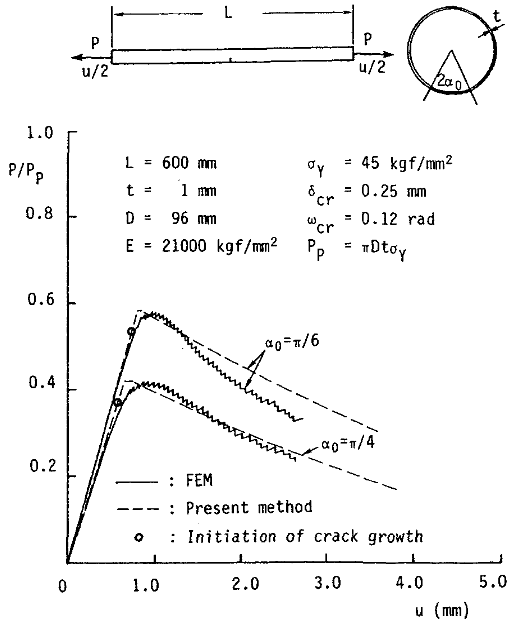
なお本解析法では，亀裂断面が全面降状する前に延性亀裂が発生すると仮定しているが，小径かつ高靱性の配管では，全断面降伏後に延性亀裂が発生する場合も考えられる。しかし，本解析結果から，海洋構造物用の大型部材に対しては上記仮定が一般に成立するものと考えられる。

3.2　純曲げ荷重

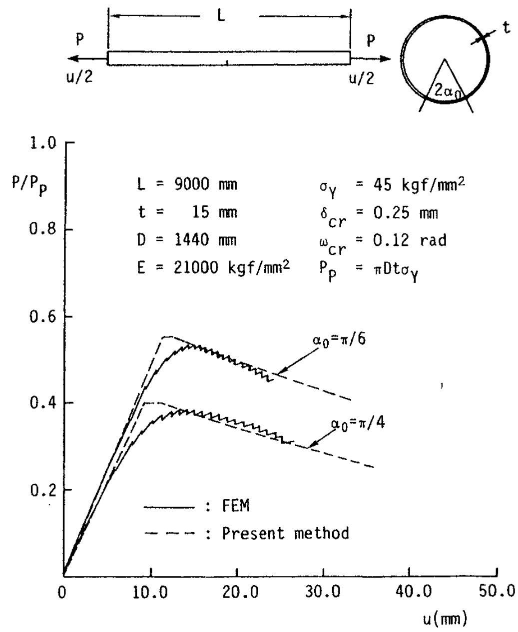
次に亀裂円筒部材の曲げ崩壊解析を行なった。荷重は 4 点曲げで負荷した。荷重と荷重点変位の関係を Fig. 12 に示す。本解析で得られた初期の剛性および最終強度は FEM 解析結果と非常に良く一致している。最終強度付近から変形にかなり差が生じているのは，剛性に対する亀裂先端塑性域と亀裂進展の影響を無視したことによる。一般に軸力に比べて曲げが支配的になる程，断面の初期降伏から全断面降伏にいたるまでの変形量は大きくなる。したがって，曲げが支配的な荷重条件でかつ変形が問題となる場合には，上記の影響を考慮する必要があると考えられる。

3.3　偏心引張荷重

偏心引張荷重を受ける亀裂円筒部材の解析結果を Fig. 13 に示す。ここでも初期の剛性と最終強度は本解析法と FEM で良く一致しており，組合せ荷重に対する本解析法の適用性が確認された。ただし，最終強度後の耐荷力は両



(a)　D=96.0 mm



(b)　D=1440.0 mm

Fig. 11　Behavior of cracked tubular member under axial tension

解析法で非常に異なった変化を示している。本解析法で得られる後最終強度挙動の精度は式(22)の亀裂進展条件式と式(26)の塑性節点変位増分の精度に依存している。3.1 および 3.2 の結果から，式(22)はその妥当性が確認されたと考えられる。これに対し，式(26)は，必ずしも実際の塑性の軸変位と回転変位の比を正確に表していない可能性がある。この点について今後さらに検討する必要がある。

3.4　最終強度相関曲線

最後に引張力と曲げモーメントが比例的に作用する場合

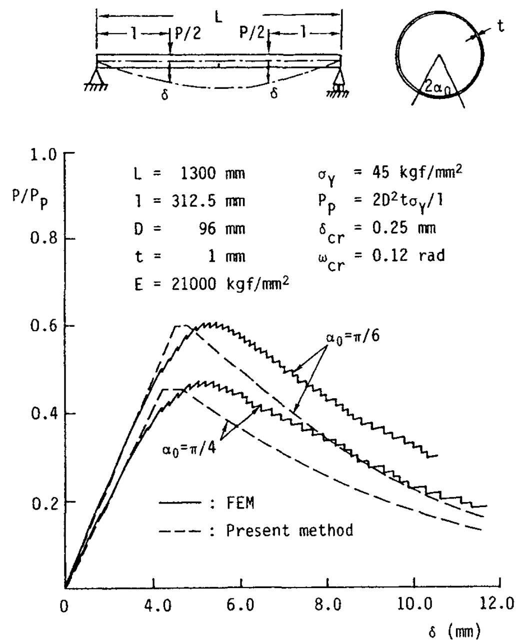


Fig. 12 Behavior of cracked tubular member under pure bending

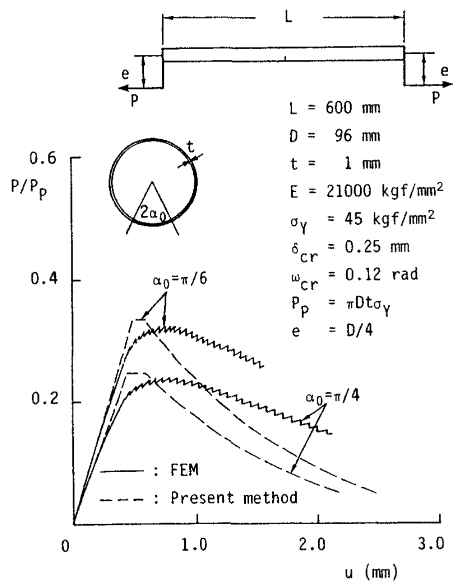


Fig. 13 Behavior of cracked tubular member under axial tension with eccentricity

の最終強度相関曲線を求めた。$\alpha_0=\pi/4$ の場合の結果を Fig. 14 に示す。

亀裂進展は，軸力と曲げのあらゆる組合せに対して最終強度を大きく低下させる。また亀裂進展に関する ω_{cr} の方が，亀裂発生に関する δ_{cr} よりも最終強度に対する影響度が大きい。Fig. 11(a)と Fig. 12 の FEM 解析結果の比較から分かるように，曲げを受ける場合の方が引張の場合より，亀裂発生から最終強度に達するまでの荷重上昇は大きくなる。Fig. 14 でも曲げが支配的になるほど最終強度に対する ω_{cr} の影響度が増加している。なお，亀裂進展パラメータの影響度は断面寸法によっても変化すると考えられる。

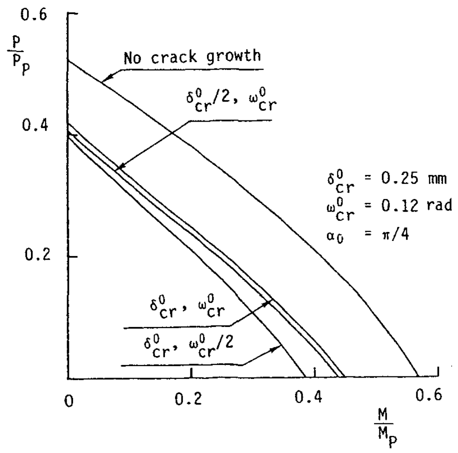


Fig. 14 Ultimate strength interaction relationship

4. 結　言

周方向貫通亀裂を有する円筒骨組構造の弾塑性解析のための理想化構造要素を提案した。本論文の結果を要約すると以下の通りである。

(1) 亀裂部材を一様断面の梁・柱要素と亀裂断面のコンプライアンスを表すバネの集合にモデル化して，部材の弾性剛性マトリックスを簡易的に評価する手法を示した。

(2) 延性亀裂の発生と進展に関する破壊パラメータとして CTOD と CTOA をそれぞれ選んだ。また，純曲げに対する Sanders の CTOD と CTOA の理論解を，引張と曲げの組合せ荷重に適用できるよう拡張した。

(3) 亀裂進展の影響を考慮した亀裂断面の最終強度の簡易推定法を示した。

(4) 亀裂断面が最終強度に達した後の部材の弾塑性剛性方程式を塑性節点法により定式化した。本解析法によれば，亀裂進展による構造内部の荷重の再配分や亀裂部材以外の崩壊まで考慮した構造システムの弾塑性解析を効率よく行うことができる。

(5) FEM シェル解析との比較から，本解析法の精度の高い適用性が確認された。組合せ荷重を受ける場合の後最終強度解析については，さらに改良の必要がある。

今後は，荷重比の変化を伴う不静定構造の解析を行い，より実用的な解析法に発展させる予定である。

最後に，本研究の一部は文部省科学研究費(総合研究A)補助を受けて行われたことを付記する。

参 考 文 献

1) Moan, T. et. al., Analysis of the fatigue failure of the Alexander L. Kielland, ASME Winter Annual

Meeting, November, 1991.
2) Kumar, V. and Shih, C. F., Fully Plastic Crack Solutions: Estimation Scheme and Stability Analyses for the Compact Specimen, ASTM, STP 700, 1980, pp. 406-438.
3) Milne, I. Ainsworth, R. A., Dowling, A. R. and Stewart, A. T., Assessment of the Integrity of Structures Containing Defects, CEGB Report R/H/R6, Rev. 3, 1986.
4) Gilles. P. and Brust, F. W., Approximate Methods for Fracture Analysis of Tubular Members Subjected to Combined Tensile and Bending Loads, OMAE'89, Hague, 1989, pp. 145-152.
5) Yao, T. and Moan, T., Elastic-Plastic Behavior of Structural Members and Systems with Crack Damage (1st Report), J. Soc. Naval. Arch. Japan, Vol. 161, 1987, pp. 274-284.
6) Ueda, Y. and Rashed, S. M. H., The Idealized Structural Unit Method and its Application to Deep Girder Structures, Computers and Structures, Vol. 18, 1984.
7) 藤久保昌彦，趙 耀，矢尾哲也：亀裂損傷を有する円筒部材の曲げ崩壊解析，西部造船会会報，第 82 号，1991，掲載予定。
8) Ueda, Y. and Yao, T., The Plastic Node Method: A New Method of Plastic Analysis, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 34, 1982, pp. 1089-1104.
9) Forman, R. G., Hickman, J. C. and Shivakumar, V., Stress Intensity Factors for Circumferential Through Cracks in Hollow Cylinders Subjected to Combined Tension and Bending Loads, Engng. Frac. Mechs., Vol. 21, No. 3, 1985, pp.563-571.
10) 矢川元基編：破壊力学，培風館，1988.
11) Sanders, J. L., Dugdale Model for Circumferential Through-Cracks in Pipes Loaded by Bending, Int. J. Frac., Vol. 34, 1987, pp. 71-81.
12) Sanders, J. L., Tearing of Circumferential Cracks in Pipes Loaded by Bending, Int. J. Frac., Vol. 35, 1987, pp. 283-294.
13) Sanders, J. L., Analysis of Circular Cylindrical Shell, J. Appl. Mech., Vol. 50, 1983, pp. 1165-1170.
14) Sanders, J. L., Circumferential Through-Crack in Cylindrical Shells under Tensions, J. Appl. Mech., Vol. 49, 1982, pp. 103-107.
15) 矢尾哲也，藤久保昌彦，趙 耀：亀裂損傷を有する円筒部材の曲げ耐荷力に関する研究，日本造船学会論文集，第 166 号，1989，pp. 295-302.
16) Hellen, T. K., Numerical Post-Yield Fracture Criteria Comparisons on Plane Strain Test Specimens, Engineering Fracture Mechanics Vol. 39, No. 2, 1991, pp. 269-285.
17) Smith, E.: The Geometry Dependence of the J_R Curve for Circumferential Growth of Through-Wall Cracks in Cylindrical Pipes Subjected to Bending Loads, Eng. Frac. Mech., Vol. 18, No. 6, 1983. pp. 1119-1123
18) 都井裕，弓削康平，川井忠彦：構造要素の衝突圧壊強度に関する基礎的研究(その 1)，日本造船学会論文集，第 159 号，1988，pp. 248-257.
19) Sanders, J. L., On Stress Boundary Conditions in Shell Theory, J. Appl. Mech., Vol. 47, 1980, pp. 202-204.

付録 1 CTOD 理論解の導出法

Fig. A1 に座標系と主な応力の定義を示す。$z=0$ は亀裂面を表す。また変位，応力に関する以下の無次元量を定義する。

$$
\begin{aligned}
(u, v, w) &= \frac{E}{\sigma_F R}(\overline{u}, \overline{v}, \varepsilon^2\overline{w}) \\
(\chi_z, \chi_\theta) &= \frac{1}{\sigma_F R^3 t\varepsilon^2}(\overline{\chi}_z, \overline{\chi}_\theta) \\
(T_z, T_\theta, V) &= \frac{1}{\sigma_F t}(\overline{T_z}, \overline{T_\theta}, \overline{V}) \\
(M_z, M_\theta, S_\theta) &= \frac{1}{\sigma_F R t\varepsilon^2}(\overline{M_z}, \overline{M_\theta}, \overline{S_\theta})
\end{aligned}
\qquad \text{(A 1)}
$$

z は亀裂面からの距離を R で除した無次元座標である。また χ_z および χ_θ は，応力境界条件を考慮するのに便利なように導入された応力関数であり，後に具体的に示される。ε は式(6)に与えられる。

Semi-Membrane Shell Theory は，次式の微分方程式の境界値問題を解くことに帰着する[13]。

$$(\ddot{\Phi}+\Phi)^{\cdot\cdot} - i\varepsilon^{-2}\Phi'' = 0 \qquad \text{(A 2)}$$

ここで，$\dot{}$ は θ に関する微分を，また $'$ は z に関する微分を表す。Φ は複素関数であり，変位および応力関数と次の関係にある。

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 u &= \ddot{\Phi}' \\
\varepsilon^2 v &= -\dddot{\Phi} \\
w &= -\ddot{\Phi} - i(\ddot{\Phi}+\Phi)^{\cdot\cdot} \\
\varepsilon^2 \chi_z &= -i\dot{\Phi}' \\
\varepsilon^2 \chi_\theta &= i\ddot{\Phi}
\end{aligned}
\qquad \text{(A 3)}
$$

すなわち，式(A 2)を解いて Φ が得られると，変位，応力などあらゆる量が求められる。ただしすべての解は実数部のみが物理的意味を持つ。

応力関数 χ_z および χ_θ は，境界断面 $z=0$ の各点に作用する単位長さ当りの x^i 方向断面力 T^i および x^i 軸回りのモーメント C^i の関数として次式のように与えられる[19]。

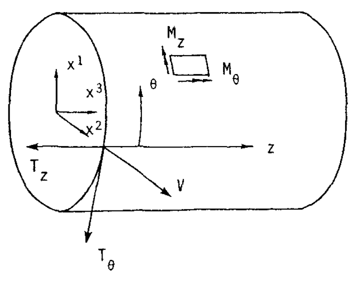


Fig. A1 Coordinates and notations

$$\chi_\alpha=(M^i-\varepsilon_{ijk}x^jF^k)x^i_{,\alpha} \qquad \text{(A 4)}$$

ここで，α　：z or θ

ε_{ijk}　：交代テンソル

$$F^i=\int_0^\theta T^iRd\theta,\ M^i=\int_0^\theta C^iRd\theta$$

式(A 4)において，ねじりモーメント C^3 をKirchhoffの等価剪断力に置き換えた後，式(9)の応力境界条件を考慮して F^i および M^i の積分を行なう。その結果，式(9)はつぎの χ に関する境界条件に変換される[11]。

$$\begin{aligned}
&\chi_z=0 && \text{all }\theta\\
&\varepsilon\chi_\theta=0 && (0<\theta<\alpha)\\
&\quad=\sin(\theta-\alpha)-(\theta-\alpha) && (\alpha<\theta<\beta)\\
&\quad=\sin\theta-(\pi-\theta)+\frac{\pi}{2}\sigma_B\cos\theta-\pi\sigma_T\\
&\qquad-G_1\sin\theta && (\gamma<\theta<\pi)\\
&u=0 && (\beta<\theta<\gamma)
\end{aligned} \qquad \text{(A 5)}$$

ここで，G_1：積分定数

上式の計算においては，式(9)に次の境界条件を追加している。

$$\int_0^\pi \sigma d\theta=P/2Rt \qquad \text{(A 6)}$$

また，$\beta<\theta<\gamma$ の範囲では応力境界条件は与えられていないので，式(A 5)の第4式の計算では，次の関係を利用している。

$$\int_0^\theta=\int_0^\pi+\int_\pi^\theta=\int_0^\pi-\int_\theta^\pi,\ \int_0^\pi=\frac{1}{2}(P,M) \qquad \text{(A 7)}$$

式(A 5)を式(A 3)の第4および第5式に代入すると，特性関数 $\ddot{\Phi}$ に関する境界条件が次のように求められる。

$$\begin{aligned}
&R\{i\ddot{\Phi}'\}=0 && \text{all }\theta\\
&\ddot{\Phi}'=0 && (\beta<\theta<\gamma)\\
&R\{i\ddot{\Phi}\}=0 && (0<\theta<\alpha)\\
&\quad=1-\cos(\theta-\alpha)-\frac{1}{2}(\theta-\alpha)^2 && (\alpha<\theta<\beta)\\
&\quad=-(1+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\pi-\theta)+\frac{\pi}{2}\sigma_B\sin\theta\\
&\qquad+\pi(\pi-\theta)\sigma_T+G_1\cos\theta+G_2 && (\gamma<\theta<\pi)
\end{aligned} \qquad \text{(A 8)}$$

ここで，G_2：積分定数

ところで，$\ddot{\Phi}$ の完全解 $\ddot{\Phi}_C$ は剛体変位を表す基本解 $\ddot{\Phi}_E$，無限遠での引張および曲げに対する単純梁の解 $\ddot{\Phi}_T$ および $\ddot{\Phi}_B$，さらに亀裂の影響を表す特解 $\ddot{\Phi}_S$ の和で与えられる。すなわち，

$$\ddot{\Phi}_C=\ddot{\Phi}_E+\ddot{\Phi}_T+\ddot{\Phi}_B+\ddot{\Phi}_S \qquad \text{(A 9)}$$

ここで，

$$\ddot{\Phi}_E=ia-\varepsilon bz+ic\cos\theta+\varepsilon dz\cos\theta$$

$$\ddot{\Phi}_T=\Big[\frac{1}{2}i\{1+i\varepsilon^2(2+\nu)\}\theta^2+(1+i\varepsilon^2\nu)\Big(\frac{1}{2}\varepsilon^2z^2-i\Big)\Big]\sigma_T$$

$$\ddot{\Phi}_B=\frac{1}{2}[\varepsilon^2z^2\cos\theta+i(2\cos\theta-\theta\sin\theta)]\sigma_B$$

a,b,c,d：積分定数

特解 $\ddot{\Phi}_S$ は無限遠では0に収束せねばならない。引張に関する $\ddot{\Phi}_T$[14] は本研究の解析においてつけ加えられた。

式(A 9)の $\ddot{\Phi}_C$ を式(A 8)に代入すると，特解 $\ddot{\Phi}_S$ に関する境界条件が得られる。これらの条件と，亀裂断面の $\theta=\alpha$，β および γ における $\ddot{\Phi}_S$ とその微係数の連続条件，さらに無限遠での収束条件から，$\ddot{\Phi}_S$ が求められる。その計算手順の詳細は文献11)に示されている。

得られた $\ddot{\Phi}_C$ を式(A 3)に代入して，変位およびCTODが求められる。

付録2　関数 F_ω の具体形

式(17)の関数 F_ω は，次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
F_\omega=&\Big(q-\frac{\partial A}{\partial\sigma_B}+\frac{\partial C}{\partial\sigma_B}-\Delta_1\Sigma_3-\Delta_2\Gamma_3\Big)\sigma_B'\\
&-\Big(\frac{\partial A}{\partial\sigma_T}+\frac{\partial C}{\partial\sigma_T}+q_1+\Delta_1\Sigma_2+\Delta_2\Gamma_2\Big)\sigma_T'\\
&-\Delta_3-\Delta_1\Sigma_1-\Delta_2\Gamma_1
\end{aligned} \qquad \text{(A 10)}$$

ここで，

$$q=3\cos\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin\alpha,\quad q_1=\frac{1}{2}\alpha^2+1$$

$$\Delta_1=\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial C}{\partial\beta}\cos\alpha,\quad \Delta_2=\frac{\partial A}{\partial\gamma}$$

$$\Delta_3=\frac{\partial A}{\partial\alpha}-\frac{\partial C}{\partial\alpha}\cos\alpha$$

$$\Sigma_1=(c_0b_1-c_1b_0)/\Lambda$$

$$\Sigma_2=(d_0b_1-d_1b_0)/\Lambda$$

$$\Sigma_3=(e_0b_1-e_1b_0)/\Lambda$$

$$\Gamma_1=(c_1a_0-c_0a_1)/\Lambda$$

$$\Gamma_2=(d_1a_0-d_0a_1)/\Lambda$$

$$\Gamma_3=(e_1a_0-e_0a_1)/\Lambda$$

$$\Lambda=a_0b_1-a_1b_0$$

$$a_0=\frac{\partial C_1}{\partial\beta}\sigma_T+\frac{\partial D_1}{\partial\beta}\sigma_B-\frac{\partial N_1}{\partial\beta}$$

$$a_1=\frac{\partial C_2}{\partial\beta}\sigma_T+\frac{\partial D_2}{\partial\beta}\sigma_B-\frac{\partial N_2}{\partial\beta}$$

$$b_0=\frac{\partial C_1}{\partial\gamma}\sigma_T+\frac{\partial D_1}{\partial\gamma}\sigma_B-\frac{\partial N_1}{\partial\gamma}$$

$$b_1=\frac{\partial C_2}{\partial\gamma}\sigma_T+\frac{\partial D_2}{\partial\gamma}\sigma_B-\frac{\partial N_2}{\partial\gamma}$$

$$c_0=\frac{\partial N_1}{\partial\alpha},\quad d_0=-C_1,\quad e_0=-D_1$$

$$c_1=\frac{\partial N_2}{\partial\alpha},\quad d_1=-C_2,\quad e_1=-D_2$$