

自由表面上を航走する圧力分布が造る波の数値計算

正員 小 原 茂 明* 正員 仲 渡 道 夫**

Numerical Computation on Surface Waves Generated by a Running Pressure Disturbance

by Shigeaki Kohara, *Member* Michio Nakato, *Member*

Summary

This paper deals with numerical computation on surface waves which are generated by a running pressure disturbance. The characteristics of this computation are that including viscosity terms, the three dimensional Navier-Stokes equations are treated and that the distribution of a pressure disturbance is arbitrary and this enables computational method to apply widely, for example to the complex waves behind a high-speed planing craft.

The validation of computational results is not so easy at present because there is few experimental reports and this time, for the convenience, it is compared with the results of analytical calculation by Standing's method.

1. 結 言

本研究は、航走する圧力分布が造る波に関し、粘性を考慮した三次元 Navier-Stokes 方程式を直接差分法により計算する方法を示す。計算スキームは MAC 法に準じた方法であり、自由表面近傍は正確に計算するために格子間隔を十分密にした物体適合座標を用いた。本方法の特徴は粘性を考慮していることと、圧力攪乱の形状と強さに制約されず任意の圧力分布が造る波の定常解が得られることと、さらに、流体内部の任意位置における速度分布も細部にわたり容易に得られることである。得られた数値計算結果の確認は対応する実験的研究も少なく困難であったため、今回はとりあえず Standing による線型解析計算結果と比較検討した。

この問題の応用として、任意形状のホーバークラフトが造る波の計算が出来る。任意形状の物体が造る波の計算の結果、物体の水面攪乱に対応する圧力分布で置き換えることが出来れば、物体端部での複雑な境界条件を考慮しなくとも利点がある。

さて、解析的手法による自由表面上を航走する圧力分布が造る波の計算はかなり以前から行なわれていた。二次元問題では、Havelock¹⁾, Lamb²⁾, Peters³⁾ 等が速度ポテンシャルを用いた線型理論で、さらに Kerczek and Salvesen⁴⁾ は摂動法で二次オーダーまで展開した。三次元問題では Wehausen and Laitone⁵⁾ が三次元速度ポテンシャルを用いた線型理論で、その後、この理論は Neuman and Poole⁶⁾, Barratt⁷⁾, Everest and Hogben⁸⁾ 等により有限水深で有限幅水路中を航走するホーバークラフトの造波理論に応用された。さらに、Huang and Wong⁹⁾, Standing¹⁰⁾ 等により無限領域で且つ無限水深中まで拡張したホーバークラフトが造る波の計算を行なった。

最近、この問題を数値的手法により計算する試みが発展しつつある。二次元問題では、Kerczek and Salvesen¹¹⁾ が速度ポテンシャルを差分法により解き、Korving¹²⁾ は同様の手法で造波抵抗の計算を行なっている。三次元問題では、Korving¹³⁾ が二次元問題を拡張し、フルード数の関数として幅／長さ比と造波抵抗の関係について調査し、Haussling and Van Eseltine¹⁴⁾ はスペクトル法と有限差分法を組み合わせた過渡型自由表面ポテンシャル流れを解いた。同様に Dommermuth and Yue¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ は高次の準スペクトル法を用いた計算を行なった。

以上これらの数値的手法のほとんどが、流体は非粘性であり、ラプラス方程式を解いたポテンシャル流れを取り扱っている。ところが、複雑な非線型造波現象を取り扱う場

* 長崎大学水産学部

** 広島大学工学部

原稿受理 平成4年1月6日

春季講演会にて講演 平成4年5月12, 13日

合には粘性を考慮する必要がある。しかし、この問題に関し粘性を含む流体中の計算を行なった例はほとんどなく、二次元問題では、小原等^{17),18),19)}が MAC 法に準じた差分法で計算を行ない Kerczek and Salvesen による解析結果と比較し、さらに数値計算は計算時間が莫大となることから計算時間短縮を考慮した MAC 法より効率の良い 4 種類のスキーム（局所時間刻み法、マルチグリッド法、ルンゲ・クッタ・ジル法および IAF 法）で定常解を得た例があるのみである。三次元問題ではこのような計算例はほとんど見当たらない。

2. 基礎方程式

流体は非圧縮性流体であり、粘性を持つと仮定する。このとき、無次元化した三次元流れの基礎方程式は、次のような Navier-Stokes 方程式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3)$$

無次元化に使用した有次元物理量は圧力分布の長さ L' 、一様速度 C' 、自由表面上の負荷圧力 P' 、流体密度 ρ' 、時間 t' で、無次元量を次のように示した。

$$(\text{速度}) \quad u = \frac{u'}{C'}, \quad v = \frac{v'}{C'}, \quad w = \frac{w'}{C'}$$

$$(\text{座標}) \quad x = \frac{x'}{L'}, \quad y = \frac{y'}{L'}, \quad z = \frac{z'}{L'}$$

$$(\text{圧力}) \quad P = \frac{P'}{\rho' C'^2}$$

$$(\text{時間}) \quad t = \frac{t'}{L'/C'} \quad (4)$$

座標は Fig. 1 に示すように平水面上圧力分布中心を原点とする。Re はレイノルズ数 ($C'L'/\nu$)、 Φ は

$$\Phi = P + \frac{z}{Fn^2} \quad (5)$$

で定義される圧力であり、 Fn はフルード数 ($C'/\sqrt{gL'}$ 、 g は重力の加速度) である。また、無次元化した連続の式は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

(1), (2), (3) 式を時間に関し一次前進差分近似で表わすと

$$\frac{u^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = E \quad (7)$$

ただし、

$$E = \frac{u^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (8)$$

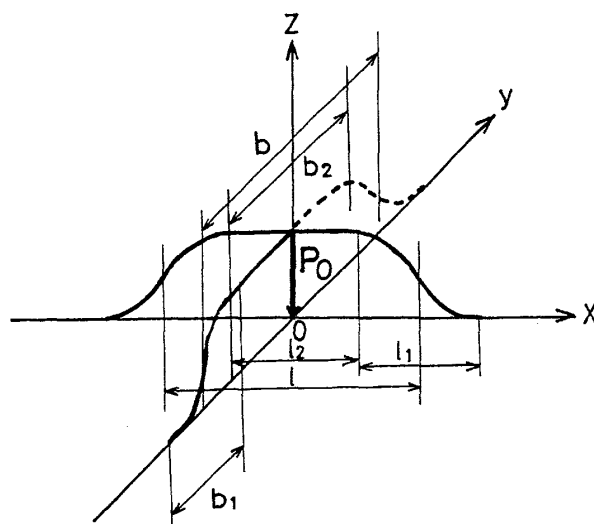


Fig. 1 Free surface pressure distribution

$$\frac{v^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F \quad (9)$$

ただし、

$$F = \frac{v^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (10)$$

$$\frac{w^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = G \quad (11)$$

ただし、

$$G = \frac{w^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (12)$$

となる。ここで添字 n , $n+1$ はそれぞれタイムステップを示している。(7), (9), (11) 式をそれぞれ x , y , z に関し偏微分して加えると、

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \nabla^2 \Phi + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} \right) \quad (13)$$

となる。(13) 式の右辺第 2 項の () 内は、MAC 法によると、(6) 式の連続の式よりゼロとしている。すると、(13) 式はポアソンの式で次のようになる。

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = R \quad (14)$$

これを次式で示された点 S. O. R 法による反復計算から Φ を求める。

$$\Phi^{k+1} = \Phi^k + \omega(\Phi_{\text{cal}}^{k+1} - \Phi^k) \quad (15)$$

ここに k は k 回目の反復計算値、 Φ_{cal}^{k+1} は Φ^k から $k+1$ 回目の反復計算で新しく求めた値である。 ω は緩和係数で 0.8 の値を用いた。反復計算は全格子点で得られた残差 $\Phi_{\text{cal}}^{k+1} - \Phi^k$ の最大値が許容誤差範囲内になるまで行われる。

こうして得られた Φ を (7), (9), (11) 式に代入すると、次のタイムステップ $n+1$ での流速 u^{n+1} , v^{n+1} , w^{n+1} が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \Delta t \left(E - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \\ v^{n+1} &= \Delta t \left(F - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ w^{n+1} &= \Delta t \left(G - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

水面上の波面計算は、任意水面 (x, y) での時刻 t の水面変位を $\eta(x, y, t)$ とすると、水面の式 $H(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$ において H の実質微分 $DH/Dt = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \cdot 1 \end{aligned} \quad (17)$$

となる。したがって、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w - u \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (18)$$

となり、この式により $\eta(x, y, t)$ を計算する。

3. 基礎方程式の差分化

三次元直交座標系 x, y, z と一般座標系 ξ, η, ζ との関係式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z) \\ t &= t \end{aligned} \quad (19)$$

一般座標系の直交座標系による偏微分をマトリクス表示すると、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

の関係がある。この行列式は

$$AX = E \quad (21)$$

のような正方行列の乗算式になるので、 X を計算すると

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}/J & A_{12}/J & A_{13}/J \\ A_{21}/J & A_{22}/J & A_{23}/J \\ A_{31}/J & A_{32}/J & A_{33}/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

となり、ここに $A_{11} \sim A_{33}$ は行列 A の転置行列 A^t の各元の余因子を示し、 J は $\det|A|$ となるヤコビアンで、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} J &= x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\zeta y_\xi z_\eta + x_\eta y_\zeta z_\xi \\ &\quad - x_\zeta y_\eta z_\xi - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta \end{aligned} \quad (23)$$

(22) 式を各元毎で表わすと、

$$\begin{aligned} \xi_x &= (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) / J \\ \xi_y &= (z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta) / J \\ \xi_z &= (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) / J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_x &= (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) / J \\ \eta_y &= (z_\xi x_\xi - z_\xi x_\zeta) / J \\ \eta_z &= (x_\xi y_\xi - x_\xi y_\zeta) / J \\ \zeta_x &= (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) / J \\ \zeta_y &= (z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi) / J \\ \zeta_z &= (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) / J \end{aligned} \quad (24)$$

となり、この関係式を用いると、物理面上の任意関数 $f(x, y, z)$ の x, y および z の一階微分演算子は、次式で示される。

$$\begin{aligned} f_x &= f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + f_\zeta \zeta_x \\ f_y &= f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y + f_\zeta \zeta_y \\ f_z &= f_\xi \xi_z + f_\eta \eta_z + f_\zeta \zeta_z \end{aligned} \quad (25)$$

また、二階微分演算子は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \{f_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + f_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + f_{\zeta\zeta}(\zeta_x)^2\} \\ &\quad + 2\{f_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + f_{\eta\zeta}\eta_x\zeta_x + f_{\xi\zeta}\xi_x\zeta_x\} \\ &\quad + \{f_{\xi\xi}x_x + f_{\eta\eta}x_x + f_{\zeta\zeta}x_x\} \\ f_{yy} &= \{f_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + f_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + f_{\zeta\zeta}(\zeta_y)^2\} \\ &\quad + 2\{f_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + f_{\eta\zeta}\eta_y\zeta_y + f_{\xi\zeta}\xi_y\zeta_y\} \\ &\quad + \{f_{\xi\xi}y_y + f_{\eta\eta}y_y + f_{\zeta\zeta}y_y\} \\ f_{zz} &= \{f_{\xi\xi}(\xi_z)^2 + f_{\eta\eta}(\eta_z)^2 + f_{\zeta\zeta}(\zeta_z)^2\} \\ &\quad + 2\{f_{\xi\eta}\xi_z\eta_z + f_{\eta\zeta}\eta_z\zeta_z + f_{\xi\zeta}\xi_z\zeta_z\} \\ &\quad + \{f_{\xi\xi}z_z + f_{\eta\eta}z_z + f_{\zeta\zeta}z_z\} \end{aligned} \quad (26)$$

ここに一般座標系の x, y, z に関する二階微分はヤコビアンを用いずに次のように計算した。

$$\begin{aligned} \xi_{xx} &= (\xi_x)_\xi \xi_x + (\xi_x)_\eta \eta_x + (\xi_x)_\zeta \zeta_x \\ \xi_{yy} &= (\xi_y)_\xi \xi_y + (\xi_y)_\eta \eta_y + (\xi_y)_\zeta \zeta_y \\ \xi_{zz} &= (\xi_z)_\xi \xi_z + (\xi_z)_\eta \eta_z + (\xi_z)_\zeta \zeta_z \\ \eta_{xx} &= (\eta_x)_\xi \xi_x + (\eta_x)_\eta \eta_x + (\eta_x)_\zeta \zeta_x \\ \eta_{yy} &= (\eta_y)_\xi \xi_y + (\eta_y)_\eta \eta_y + (\eta_y)_\zeta \zeta_y \\ \eta_{zz} &= (\eta_z)_\xi \xi_z + (\eta_z)_\eta \eta_z + (\eta_z)_\zeta \zeta_z \\ \zeta_{xx} &= (\zeta_x)_\xi \xi_x + (\zeta_x)_\eta \eta_x + (\zeta_x)_\zeta \zeta_x \\ \zeta_{yy} &= (\zeta_y)_\xi \xi_y + (\zeta_y)_\eta \eta_y + (\zeta_y)_\zeta \zeta_y \\ \zeta_{zz} &= (\zeta_z)_\xi \xi_z + (\zeta_z)_\eta \eta_z + (\zeta_z)_\zeta \zeta_z \end{aligned} \quad (27)$$

これより、計算容量が幾分縮小される。またラプラス演算子は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= a_1 f_{\xi\xi} + a_2 f_{\eta\eta} + a_3 f_{\zeta\zeta} + a_4 f_\xi + a_5 f_\eta + a_6 f_\zeta \\ &\quad + a_7 f_{\xi\eta} + a_8 f_{\eta\zeta} + a_9 f_{\xi\zeta} \end{aligned} \quad (28)$$

ここに、式中の $a_1 \sim a_9$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 \\ a_2 &= \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 \\ a_3 &= \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 \\ a_4 &= \xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz} \\ a_5 &= \eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz} \\ a_6 &= \zeta_{xx} + \zeta_{yy} + \zeta_{zz} \\ a_7 &= 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z) \\ a_8 &= 2(\eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z) \\ a_9 &= 2(\xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z) \end{aligned} \quad (29)$$

運動方程式(1)~(3)の対流項は速度成分を $q = (u, v, w)$

とし、(25)式を用いて計算すると次式ようになる。

$$u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = Uq_x + Vq_y + Wq_z \quad (30)$$

ここに、 U, V および W は反変速度成分 (contravariant velocity) で、

$$\begin{aligned} U &= (u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z) \\ V &= (u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z) \\ W &= (u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z) \end{aligned} \quad (31)$$

のように表わされる。

4. 計算対象と計算方法

今回は数値安定性のよい MAC 法に準じた方法を用い自由表面を航走する一定強さの圧力分布が造る波の差分法による数値計算を行った。

Fig. 2 は MAC 方に準ずる方法のアルゴリズムである。流速は加速しないで一様流速の平水面上に無次元時間 $T=0$ に突然圧力分布が負荷したとして計算を開始している。自由表面の計算は波面上に設置したマーカーを各タイムステップ毎に計算した速度で移動させ(18)式で計算している。そのため計算格子は波面計算後、各タイムステップ毎に再構成した。これにより、自由表面境界条件の計算は容易となり、高精度の波面計算が出来る。

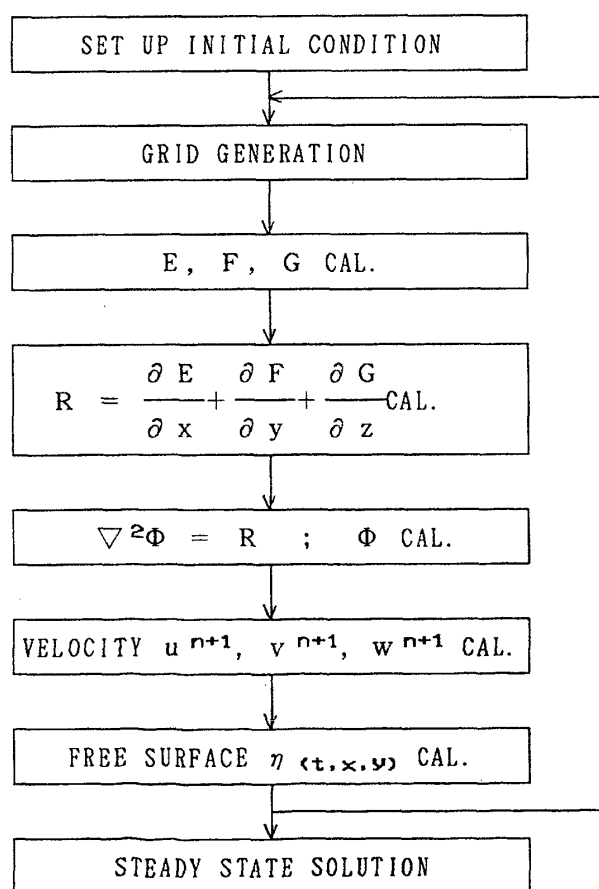


Fig. 2 Algorithm of computation (pseudo MAC scheme)

Fig. 3 は初期条件設定時 $T=0$ の計算格子を示している。格子は計算容量制限のためレギュラーメッシュを用いて幾何学的に生成した物体適合座標である。この図で座標系の原点は静止水面上圧力分布の中心に、 x 軸は圧力分布の下流方向に正、 y 軸は圧力分布の幅方向右側を正、 z 軸は鉛直上向きに正である。計算対象領域は圧力分布が造る波は流れ方向の圧力中心線に対し左右対象となるから、左側半面とする。そのメッシュ数は x 方向に $I=123$, y 方向に $J=38$, z 方向に $K=30$, 無次元座標では $x=(-1.1, 5.0)$, $y=(-1.8, 0.0)$, $z=(-3.77, 0.0)$ が計算範囲となる。格子間隔は水面付近は波の発生により詳細に計算する必要性からメッシュを密にし、自由表面に集中させた。最小格子間隔は z 方向が $\Delta z=0.01$ であるが、 x, y 方向は $\Delta x=\Delta y=0.05$ で一定とした。

差分精度はスタガードメッシュでは低次の差分式を用いても比較的安定した計算結果が得られるが、レギュラーメッシュでは数値不安定を招く恐れがある。そこで、出来る限り精度向上のために、座標系の計量項と圧力勾配項に対しては4次中心差分、運動方程式の対流項のみ数値安定性を得るために3次風上差分を用いた。

境界条件は次のように与えた。底部境界は波の影響が微小であるような十分深いところにあり、速度は速度勾配が無い0-勾配、圧力は静水圧に固定した。流入境界は圧力分布の影響の無い十分遠方の上流にあるので、速度は一様流速、圧力は静水圧、他方、流出境界は十分下流に取っているので速度、圧力とも0-勾配とした。圧力分布の進行方向中心線断面での境界は左右対称面となるので、速度は対称条件および $v=0$, 圧力は対称条件とし、圧力分布の左側遠方にある計算領域の側面境界は圧力分布の影響が無いように十分遠方にとることから、速度、圧力とも0-勾配とした。自由表面境界では速度は0-勾配、圧力は負荷し

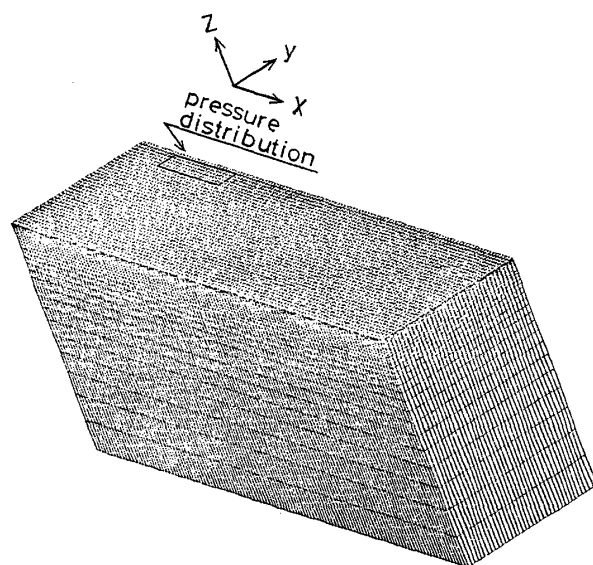


Fig. 3 Grid system

た圧力分布領域以外は大気圧とした。

Fig. 1 は自由表面上の負荷圧力分布を示している。その圧力分布を次のように与える。

$$p_x = \begin{cases} \frac{C_p}{2} \left[1 + \sin \left\{ \frac{\pi}{l_1} \left(x + \frac{l_2}{2} \right) \right\} \right] & x \in \left[-l_1 - \frac{l_2}{2}, -\frac{l_2}{2} \right] \\ C_p & x \in \left[-\frac{l_2}{2}, \frac{l_2}{2} \right] \\ \frac{C_p}{2} \left[1 - \sin \left\{ \frac{\pi}{l_1} \left(x - \frac{l_2}{2} \right) \right\} \right] & x \in \left[\frac{l_2}{2}, \frac{l_2}{2} + l_1 \right] \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{cases} \frac{p_x}{2} \left[1 + \sin \left\{ \frac{\pi}{b_1} \left(y + \frac{b_2}{2} \right) \right\} \right] & y \in \left[-b_1 - \frac{b_2}{2}, -\frac{b_2}{2} \right] \\ p_x & y \in \left[-\frac{b_2}{2}, \frac{b_2}{2} \right] \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (32)$$

ここに、 C_p は圧力係数である。

5. 計算結果

以上述べた手法に基づき、自由表面上に前節 4. で与えた圧力分布が負荷した時の波の計算を行なった。計算に用いた圧力分布は Fig. 1 で $p_0 = C_p$, $C_p = 0.016/Fn^2$, $l = 1.0$, $l_1 = 0.2$, $l_2 = 0.8$, $b = 0.5$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.4$ である。圧力分布の長さと同幅比 B/L は 0.5 である。

Fig. 4 a~e は無次元時間 $T = 10.0$ まで数値計算した時の各時間毎の波の鳥瞰図である。圧力分布は各図共左斜め上方向へ水面上を航走していると想定するとよい。フルード数は $Fn = 1.0$ である。水面変位がよくわかるように z 方向を 3 倍に増幅して描いている。レイノルズ数は $Re = 10^4$ 、時間刻み幅は $\Delta t = 0.005$ である。

時間経過と共に最初圧力分布側縁近傍の水面が急速に隆起し、比較的速い時間で定常状態に達していると思われる。そして、その波は圧力分布斜め後方に伝播している。それにしたがって、圧力分布後縁の両端から圧力中心線側に伸びるクロス波が次第に発達し、圧力分布後縁直後の水面は凹み三角形波を形成している様子がよくわかる。圧力分布前縁前方には顕著な波は発生していない。

Fig. 5 に数値計算結果と比較のため同じ条件で Standing による解析計算した波の鳥瞰図を示している。Standing による線型解析計算法は Appendix に説明している。本来ならば粘性を含まない数値計算と比較するべきであるが、時間の都合で非粘性数値計算はまだ行っていない。ここで用いた圧力分布は数値計算の場合と分布端部の形状が僅かに異なるのみでほとんど同じである。無次元時間 $T = 10.0$ の数値計算結果と比較すると波面が多少乱れているが、圧力分布後方の波は全体的には両者はほぼ一致している。

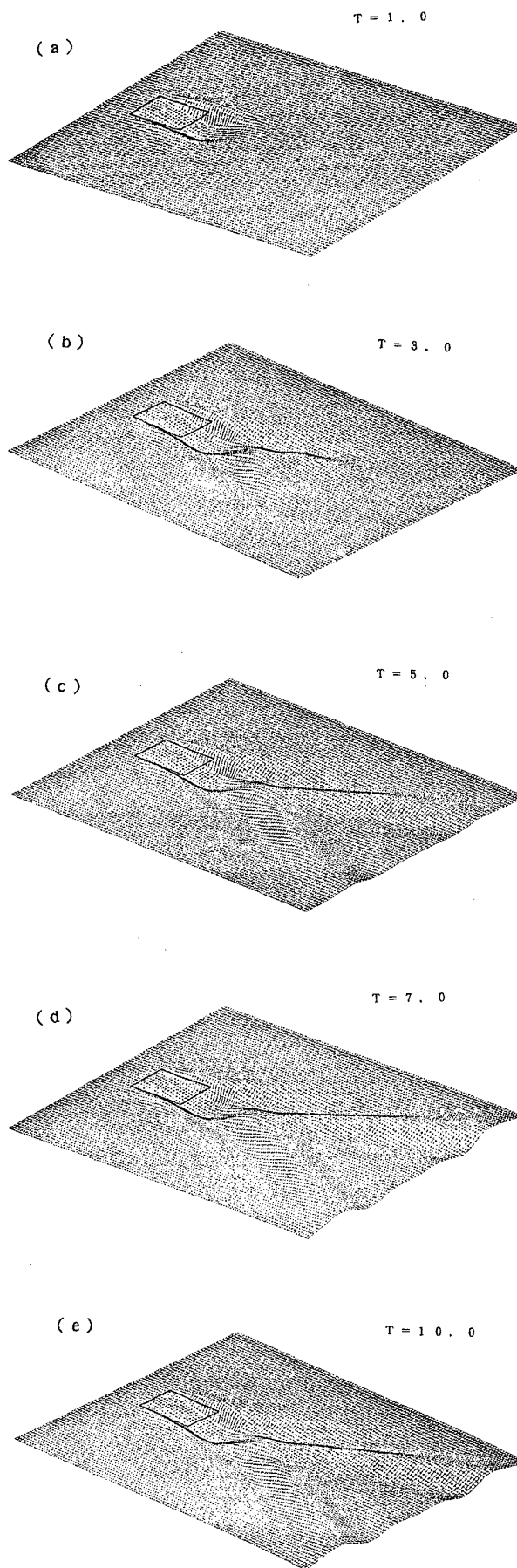


Fig. 4a~e Perspective views of wave pattern at $Fn = 1.0$ (numerical computation)

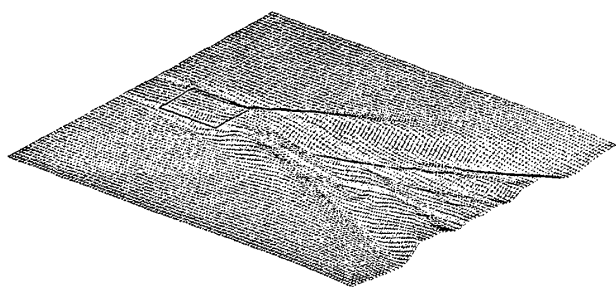
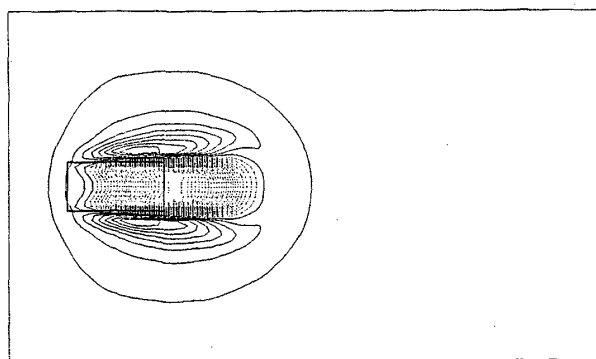


Fig. 5 Perspective view of wave pattern at $Fn=1.0$ (analytical computation)

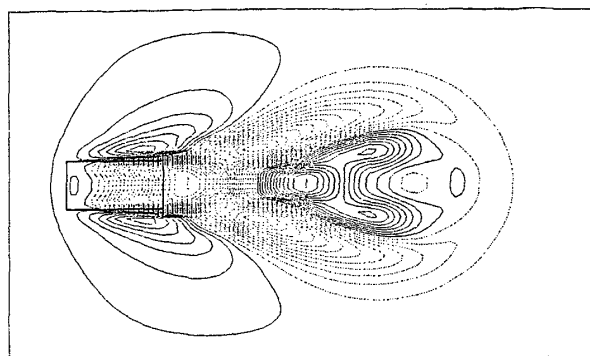
Fig. 6a~e は数値計算による各時間経過毎の自由表面の等高線を示している。圧力分布中心線に対して両舷領域共対称に描いている。図中の実線は静止水面より正、点線は負の水面変位を示している。Fig. 4 の鳥瞰図では十分認識できなかったが、圧力分布側縁の水面隆起は後方に伸び、ハの字波を形成しているのがよくわかる。等高線図は $T=5.0$ 以上ではほとんど変化していない。 $T=10.0$ の図中、圧力分布後縁後方の最初の閉等高線はクロス波に囲まれた三角形内部の凹みを示し、その後方二番目の閉等高線は三角形頂点の水面隆起である。その閉等高線を挟むように両舷斜め後方に伸びる細長い閉等高線はクロス波が三角形頂点で互に交差後、後方へ伸びる波峯線であると思われる。

Fig. 7 は解析計算で得られた自由表面の等高線を示している。この方法による計算では圧力分布前縁、後縁並びに側縁延長線上では計算が困難となり、しかもその線近傍と圧力分布から下流になるに従い計算精度は低下する。したがって、定常状態に達していると思われる $T=10.0$ の数値計算結果と比較すると圧力分布から十分下流では等高線が乱れているが、全体にはよく一致していることが分かる。しかし、圧力分布の前方ではかなり前方で水面が低下し、数値計算結果と一致していない。

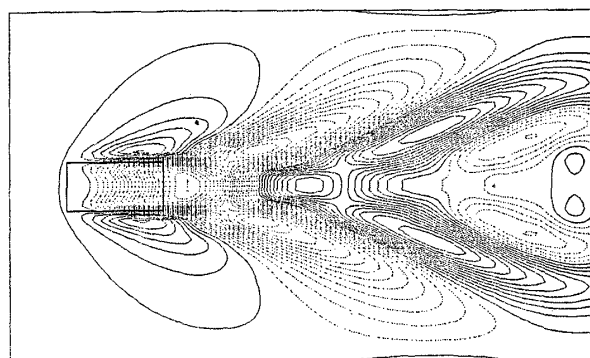
Fig. 8, 9 は圧力分布の x 軸に沿った中心線上と x 座標が一定である y 軸に平行な数本の線上での解析と数値計算による水面変位の比較を示している。全体的には数値計算の方が若干波は小さい結果となっている。



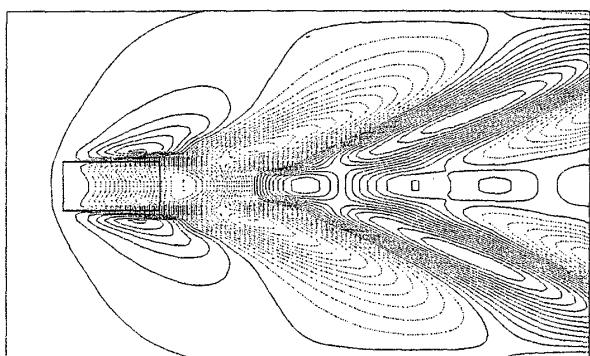
(a) $T = 1.0$



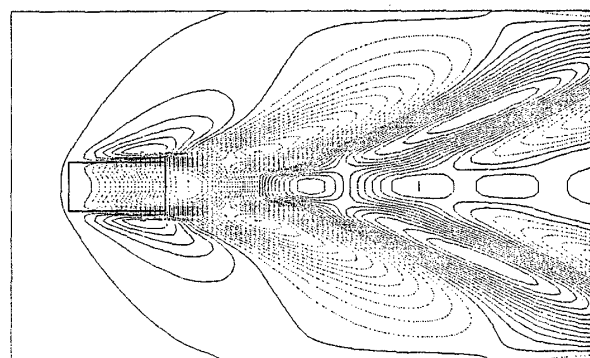
(b) $T = 3.0$



(c) $T = 5.0$



(d) $T = 7.0$



(e) $T = 10.0$

Fig. 6a~e Wave contours at $Fn=1.0$ (numerical computation)

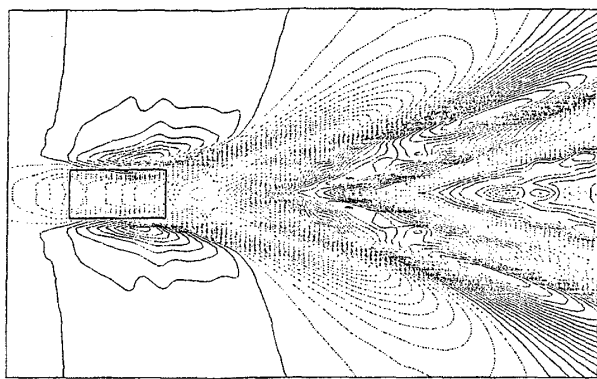


Fig. 7 Wave contour at $Fn=1.0$ (analytical computation)

Fig. 10 は数値計算による x 軸を含む圧力分布中心断面での速度ベクトル(u, w 成分), Fig. 11 a~h は x 座標が一定であり y 軸に平行な各断面での速度ベクトル(v, w 成分)を示している。特に乱れた部分もなく流れの様子を良く表現しているものと思われる。

Fig. 12 は圧力分布真下の水面変位から得られた造波抵抗の時間変化を示している。ここに、造波抵抗 R は次式で定義している。

$$R = \int_S \Phi_{(z=\eta)} \cdot \eta_x ds' \quad (33)$$

ここに、 ds' は負荷圧力分布の微小面積、 η_x は圧力分布真下の水面変位の一様流れに平行な x 方向の勾配、 S は圧力分布の全表面を示している。造波抵抗は比較的速い時間で一定値に収束している。これは圧力分布近傍の水面が最も早く定常解に達しているからである。

6. 結 言

自由表面を一様速度で航走する任意の強さと形状の圧力分布が造る波の差分法による数値計算方法を示した。計算スキームは MAC 法を改良したものである。計算は一定速度で航走する矩形圧力分布に対して行なわれ、その結果は厳密ではないが、同じ形であるが圧力分布端部での圧力の強さが僅かに異なった矩形圧力分布に対して計算した解析結果と比較した。

その結果、両者の計算波形は十分一致していることがわ

かった。従って、この方法で正確な自由表面の計算が可能であることを確認した。また、数値計算では解析計算で見られたような圧力分布縁辺延長線上では計算不可能と言った不都合は生じない。さらに、流体内部の任意位置での流れの速度分布も容易に計算できると言った利点がある。

以上により、本研究で示した計算例は、計算経費節約上、格子間隔が粗く、時間ステップも大きく、さらに改善する余地があると思われるが、粘性を考慮した本計算方法は圧力分布が造る波を十分シミュレーションすることが可能であることがわかった。しかもこの方法ではどのような複雑な形状をした圧力分布でも計算可能であり、応用範囲も広範であると思われる。

終りに当り本研究の数値計算には長崎大学総合情報処理センター FACOM M-760 を、解析計算には広島商船高等専門学校商船学科所有の住友電工ワークステーション SS-300 を利用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Havelock, T. H.: Ship Resistance: The Wave-Making Properties of Certain Travelling Pressure Disturbance, Proceedings of the Royal Society, A, Vol. 89, (1913).
- 2) Lamb, H.: Hydrodynamics, Cambridge University Press, (1932).
- 3) Peters, A. S.: A New Treatment of the Ship Wave Problem, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 2, (1949).
- 4) Kerczek, V. C. and Salvesen, N.: Nonlinear Free Surface Effects-The Dependence of Froude Number, 2nd International Conference of Numerical Ship Hydrodynamics, (1977).
- 5) Wehausen, J. V. and Laitone, E. V.: Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Springer, Vol. 9, (1960).
- 6) Newman, J. N. and Poole, F. A. P.: Wave Resistance of a Moving Pressure Distribution in a Canal, DTMB Report, No. 1619, (1962).
- 7) Barratt, M. J.: The Wave Drag of a Hovercraft, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 22, (1965).
- 8) Everest, J. T. and Hogben, N.: A Theoretical

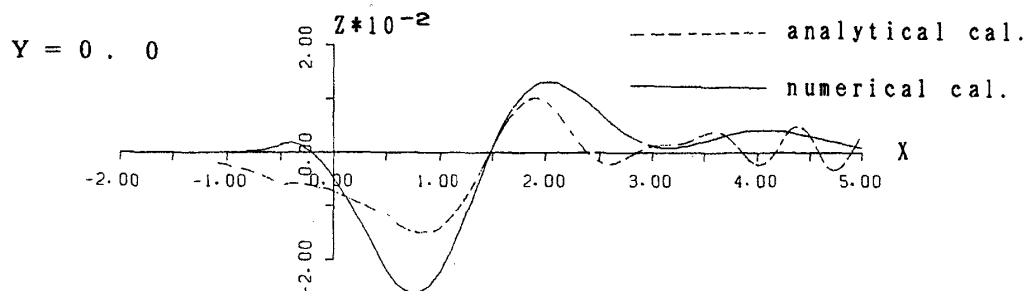
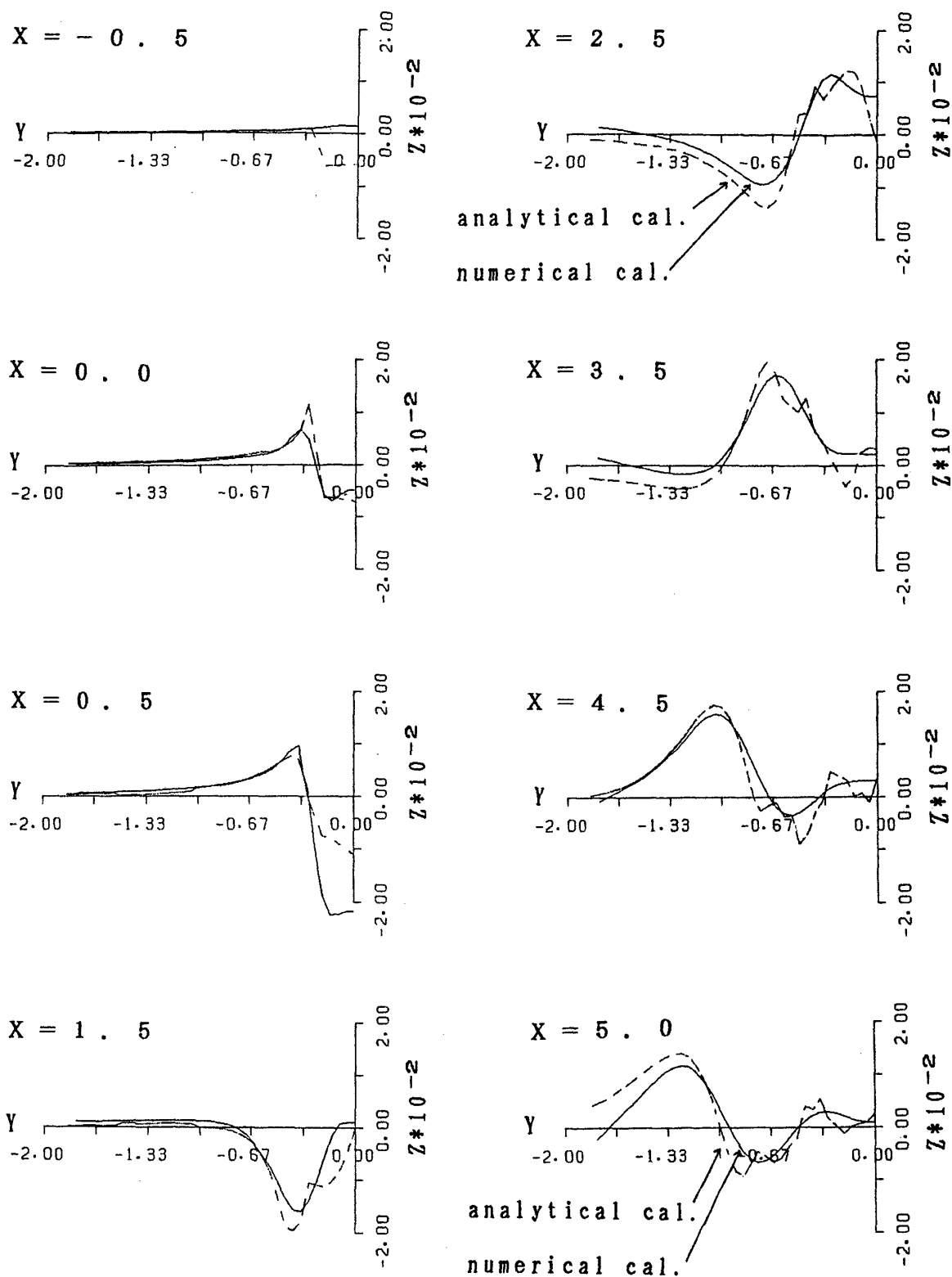


Fig. 8 Free surface elevation along center line of $y=0.0$

Fig.9 Free surface elevation along lines of $x = \text{constant}$

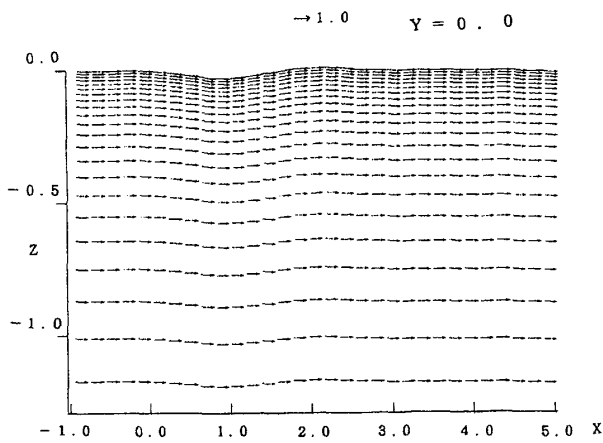


Fig. 10 Velocity vectors in the waves along center line of $y=0.0$ at $Fn=1.0$ (numerical computation)

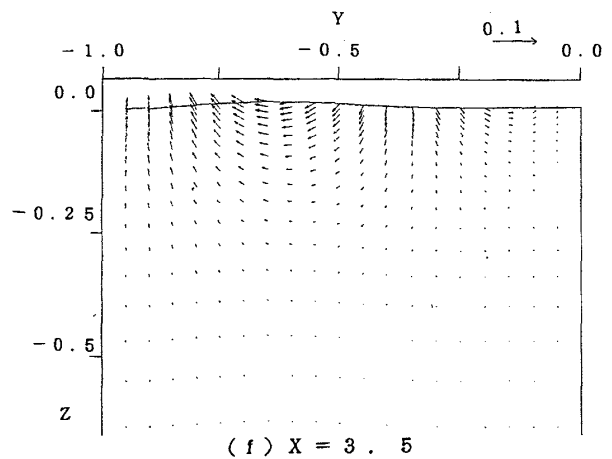
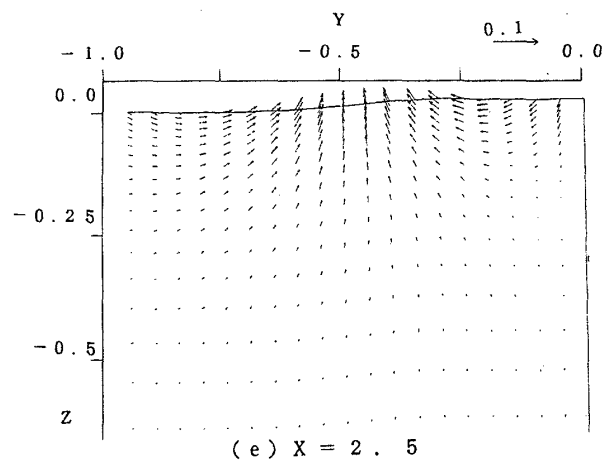
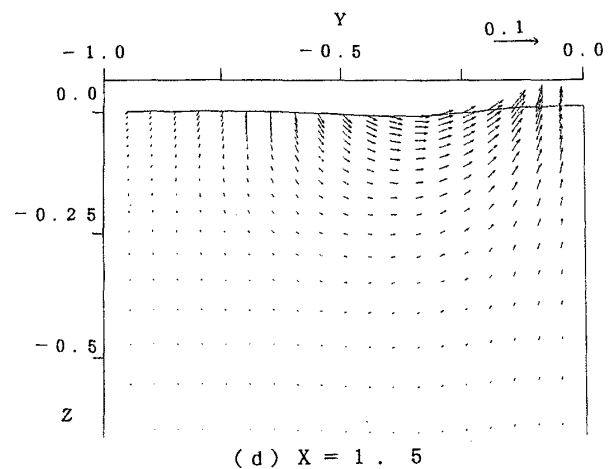
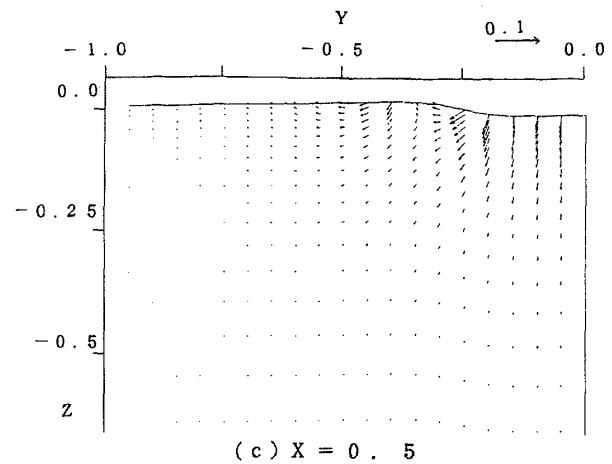


Fig. 11(a)~(f) Velocity vectors in the waves along lines of $x=\text{constant}$ at $Fn=1.0$ (numerical computation)

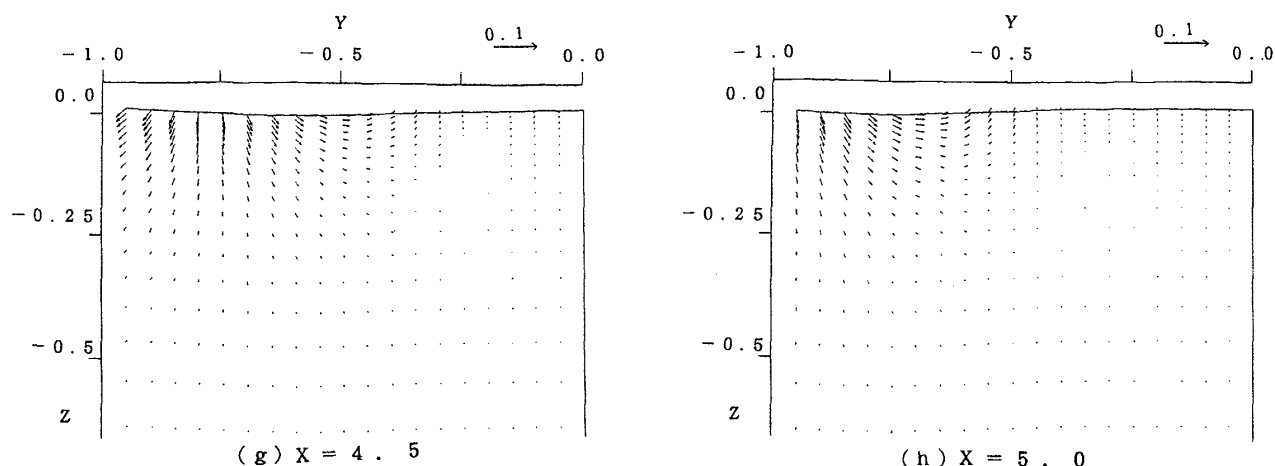


Fig. 11 (g)~(h) Velocity vectors in the waves along lines of $x=\text{constant}$ at $Fn=1.0$ (numerical computation)

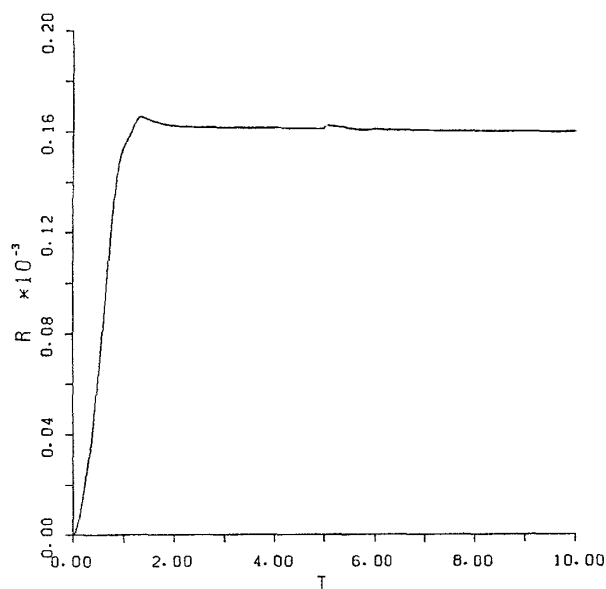


Fig. 12 Time history of wave resistance (numerical computation)

and Experimental Study of the Wavemaking of Hovercraft of Arbitrary Planform and Angle of Yaw, Transaction of RINA, Vol. 111, (1969).

- 9) Huang, T. T. and Wong, K. K.: Disturbance Induced by a Pressure Distribution Moving over a Free Surface, Journal of Ship Research, Vol. 14, (1970).
- 10) Standing, R. G.: Experience in Computing the Wavemaking of Hovercraft, NPL Report Ship, No. 191, (1975).
- 11) Kerczek, V. C. and Salvesen, N.: Numerical Solution of Two Dimensional Nonlinear Wave Problems, Office of Naval Research 10th Naval Hydrodynamics Symposium, (1974).
- 12) Korving, C.: The Wave Resistance for Flow Problems with a Free Surface, 2nd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics,

(1977).

- 13) Korving, C.: A Numerical Method for the Wave-Resistance of a Moving Pressure Distribution on the Free Surface, 7th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, (1980).
- 14) Haussling, H. J. and Van Eseltine, R. T.: Finite-Difference Methods for Transient Potential Flows with Free Surfaces, 1st N. S. H. D.,
- 15) Dommermuth, D. G. and Yue, D. K.: A High Order Spectral Method for the Study of Non-linear Gravity Waves, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 184, (1987).
- 16) Dommermuth, D. G. and Yue, D. K.: The Non-linear Three-Dimensional Wave Generated by a Moving Surface Disturbance, 7th Symposium on Naval Hydrodynamics, (1988).
- 17) 小原茂明, 茂里一紘, 土井康明: 自由表面波の差分法による計算効率の向上について, 第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1988).
- 18) 小原茂明: 新しい差分スキームによる自由表面波の計算—(その1)—, 広島商船高等専門学校紀要, 第12号, (1990).
- 19) 小原茂明: 新しい差分スキームによる自由表面波の計算—(その2)—, 広島商船高等専門学校紀要, 第12号, (1990).
- 20) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, No. 55, (1964).

Appendix

計算は R. G. Standing による線型理論を用いて行なった¹⁰⁾。この方法はあまり知られておらず、また実際の計算は複雑であり、また特に圧力分布縁辺延長線近傍と圧力分布の十分後方の波での計算はかなり困難であるから若干説明を記す。

流体は渦無し非圧縮性流体と十分深い水深を仮定し、表

面張力は考慮していない。座標は (x, y) 平面が静止水面上にあり、 z 軸は鉛直上向きである。

この問題は次の境界条件とラプラスの式、

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\phi_{tt}(x, y, 0, t) + g\phi_z(x, y, 0, t) = \frac{-P_t(x, y, t)}{\rho} \quad (\text{A.2})$$

を満たすような運動の速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ を求めることになる。ここに、 $P(x, y, t)$ はある領域だけ水面に作用する任意に与えられる圧力分布である。 g は重力の加速度、 ρ は水の密度である。この時、自由表面形状 $\eta(x, y, t)$ は次式で与えられる。

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g}\phi_t(x, y, 0, t) - \frac{1}{\rho g}P(x, y, t) \quad (\text{A.3})$$

もし、運動を圧力分布と共に x の正方向に速度 C で移動する座標 (x, y, z) で考えると定常問題となり、(A.2)式の自由表面境界条件と (A.3)式の自由表面の式は次のようになる。

$$\phi_z(x, y, 0) + \frac{C^2}{g}\phi_{xx}(x, y, 0) = \frac{C}{\rho g}P_x(x, y) \quad (\text{A.4})$$

$$\eta(x, y) = \frac{C}{g}\phi_x(x, y, 0) - \frac{1}{\rho g}P(x, y) \quad (\text{A.5})$$

これらの条件に加えて、十分上流 ($x \rightarrow \infty$) では流体運動はなく波が無いと仮定する。Wehausen and Laitone⁵⁾ によるとこれらの条件を満たす速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{1}{\pi^2 \rho C} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta P(\xi, \eta) \int_0^{\pi/2} d\theta \sec \theta \\ & \cdot PV \int_0^{\infty} dk \frac{ke^{kz}}{k - \nu \sec^2 \theta} \sin[k(x - \xi)\cos \theta] \cos[k(y - \eta)\sin \theta] \\ & - \frac{\nu}{\pi \rho C} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta P(\xi, \eta) \int_0^{\pi/2} d\theta \sec^3 \theta e^{-\nu \sec^2 \theta} \\ & \cdot \cos[\nu(x - \xi)\sec \theta] \cos[\nu(y - \eta)\sec^2 \theta \sin \theta] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

と表わすことができる。ここに、 $\nu = g/C^2$ で記号 PV は積分の主値を示している。

ここで、自由表面上のある有限領域 S に一様な強さ P_c の矩形圧力分布を仮定する。座標は原点を圧力分布の中心に取り、 x 軸は圧力分布が進行する方向の上流側を正、 y 軸は x 軸に直角な横方向左側に正、 z 軸は静止水面から鉛直上向きを正とする。このとき、(A.6)式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{P_c}{\pi \rho C} \iint_S d\xi d\eta \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sec \theta \right. \\ & \cdot PV \int_0^{\infty} dk \frac{ke^{kz}}{k - \nu \sec^2 \theta} \\ & \cdot \sin[k(x - \xi)\cos \theta] \cos[k(y - \eta)\sin \theta] \\ & - \nu \int_0^{\pi/2} d\theta \sec^3 \theta e^{-\nu \sec^2 \theta} \\ & \cdot \cos[\nu(x - \xi)\sec \theta] \cos[\nu(y - \eta)\sec^2 \theta \sin \theta] \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ここに、流体の速度は $(-C + \partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$ である。

この圧力攪乱により生じた水面変位は、(A.7)式を (A.5)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\rho g \eta(x, y)}{P_c} = & \frac{1}{\pi} \iint_S d\xi d\eta \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \right. \\ & \cdot PV \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{k - \nu \sec^2 \theta} \cos[k(x - \xi)\cos \theta] \cos[k(y - \eta)\sin \theta] \\ & + \nu^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sec^4 \theta \sin[\nu(x - \xi)\sec \theta] \\ & \cdot \cos[\nu(y - \eta)\sec^2 \theta \sin \theta] \left. \right\} - \delta(s) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。ここで、 $\delta(s)$ は領域 S 内に位置 (x, y) がある時は $\delta(s)=1$ 、両域外では $\delta(s)=0$ である。

矩形圧力分布の圧力を便宜上、その圧力分布の前縁と側縁で囲まれ、後縁は $x = -\infty$ まで伸びた正の一樣圧力 P_c の無限遠に長い四辺形と、圧力分布の後縁と側縁の延長線で囲まれた後縁は同様に $x = -\infty$ まで伸びた負の一樣圧力 $-P_c$ の無限遠に長い四辺形とが重ね合わさったものと想定する。すると、矩形圧力分布の後縁より後方は圧力が互に相殺される。

Fig. A.1 は一般的な圧力分布の一辺から構成される無限長さの圧力分布要素を示している。この辺と y 軸は角度 r ($-\pi/2 \leq r \leq \pi/2$) を形成し、辺の長さは $2l$ 、その中心座標は (ξ_0, η_0) であり、一様な圧力 P_c が頂点の座標が $(\xi_0 \pm l \sin r, \eta_0 \pm l \cos r)$ 、 $(-\infty, \eta_0 \pm l \cos r)$ の四辺形領域 T 内に作用している。

無限に長い四辺形 T により生じた任意位置 (x, y) での水面変位は (A.8)式から次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\rho g \eta(x, y)}{P_c} = & \frac{1}{2\pi} \int_{\eta_0 - l \cos r}^{\eta_0 + l \cos r} d\eta \int_{-\infty}^{\xi_0 + (\eta - \eta_0) \tan r} d\xi \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta PV \int_0^{\infty} \frac{k^2 \cos k\omega}{k - \nu \sec^2 \theta} dk \right. \\ & + \nu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sec^4 \theta \sin(\nu \omega \sec^2 \theta) \left. \right\} - \delta(T) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

この式をさらに計算すると、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\rho g \eta(x, y)}{P_c} = & \frac{\cos r}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sin(\theta + r)} d\theta \right. \\ & \cdot PV \int_0^{\infty} \frac{\cos k(\omega_0 + \mu) - \cos k(\omega_0 - \mu)}{k \cos^2 \theta - \nu} dk \end{aligned}$$

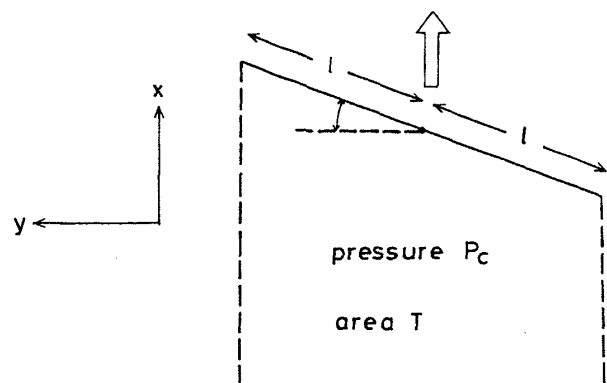


Fig. A.1 Pressure P_c over trapezium T

$$+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin[\nu(\omega_0 + \mu)\sec^2 \theta] - \sin[\nu(\omega_0 - \mu)\sec^2 \theta]}{\cos \theta \sin(\theta + \gamma)} d\theta - \delta(T) \quad (\text{A.10})$$

ここに, $\omega = (x - \xi)\cos \theta + (y - \eta)\sin \theta$, $\omega_0 = (x - \xi_0)\cos \theta + (y - \eta_0)\sin \theta$, $\delta(T)$ は任意地点 (x, y) が領域 T 内にある時は 1, 領域外では 0, $\mu = l \sin(\theta + \gamma)$ である。

直角矩形圧力分布の場合は, $\gamma = 0$ になるが, 一般式で表示しておいた方が, 応用範囲が広いので, 以降の式は任意形状の四辺形分布で表示する。

(A.10)式の主値積分は Fig. A. 2 の様に複素平面 k で表示した経路に沿って積分すると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ PV \int_0^\infty \frac{e^{ika}}{k \cos^2 \theta - \nu} dk \right\} &= -\pi \sec^2 \theta \sin(\nu \alpha \sec^2 \theta) \\ &+ \sec^2 \theta \int_0^\infty \frac{\nu e^{-\nu v \alpha \sec^2 \theta}}{1 + v^2} dv \\ &= -\pi \sec^2 \theta \sin(\nu \alpha \sec^2 \theta) + g(\nu \alpha \sec^2 \theta) \sec^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

となる。ここに, 正の虚数軸上で $k = i\nu \sec^2 \theta$ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$), α は正であり, g は関数,

$$g(u) = -Ci(u)\cos u - si(u)\sin u \quad (\text{A.12})$$

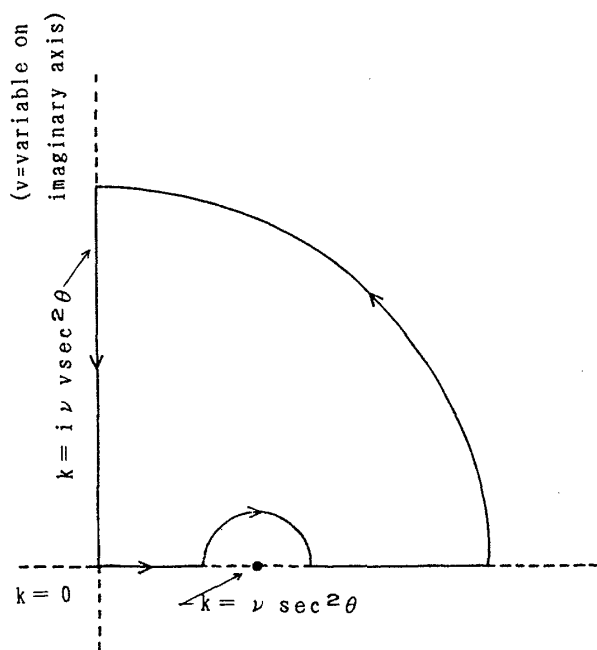


Fig. A. 2 Contour integration in the complex plane

である²⁰⁾。関数 $g(u)$ は級数で計算できる。

(A.11)式を(A.10)式に代入すると次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\rho g \eta(x, y)}{P_c} &= \frac{\cos \gamma}{2\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec \theta}{\sin(\theta + \gamma)} \{ g(\nu|\omega_0 + \mu| \\ &\cdot \sec^2 \theta) - g(\nu|\omega_0 - \mu| \sec^2 \theta) + \pi [\operatorname{sgn}(\omega_0 + \mu) - 1] \\ &\cdot \sin(\nu|\omega_0 + \mu| \sec^2 \theta) - \pi [\operatorname{sgn}(\omega_0 - \mu) - 1] \\ &\cdot \sin(\nu|\omega_0 - \mu| \sec^2 \theta) \} d\theta - \delta(T) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ここに, $\operatorname{sgn}(x)$ は

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & (x > 1) \\ -1 & (x < 1) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

である。(A.13)式の被積分関数の第3および4項の $\sin$ 項は $\theta \rightarrow \pm \pi/2$ と共に急速に振動するので, $t = \tan \theta$ で変数変換すると, (A.13)式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\rho g \eta(x, y)}{P_c} &= L_+(x, y) - L_-(x, y) + W_+(x, y) \\ &- W_-(x, y) - \delta(T) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ここに

$$L_\pm(x, y) = \frac{\cos \gamma}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau_\pm)}{t \cos \gamma + \sin \gamma} dt \quad (\text{A.16})$$

$$W_\pm(x, y) = \frac{\cos \gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{-\tan \beta_\pm} \frac{\sin(\tau_\pm)}{t \cos \gamma + \sin \gamma} dt \quad (\text{A.17})$$

である。また,

$$\begin{aligned} \tau_\pm &= \nu [x - \xi_0 \pm l \sin \gamma + t |y - \eta_0 \pm l \cos \gamma|] \sqrt{1 + t^2} \\ &= R_\pm \sqrt{1 + t^2} [\sin \beta_\pm + t \cos \beta_\pm] \\ R_\pm^2 &= \nu^2 [(x - \xi_0 \pm l \sin \gamma)^2 + (y - \eta_0 \pm l \cos \gamma)^2] \\ \beta_\pm &= \tan^{-1} \left[\frac{(x - \xi_0 \pm l \sin \gamma)}{|y - \eta_0 \pm l \cos \gamma|} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となり, $-\pi/2 \leq \beta_\pm \leq \pi/2$, $R_\pm$, $\beta_\pm$ は領域 T の前縁両端からの任意地点 (x, y) の無次元距離と無次元方位を示している。

さらに(A.16), (A.17)式を簡略化するために $u = t + \tan \beta_\pm$ で変数変換すると, 次式で与えられる。

$$L_\pm(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau_\pm)}{u - u_0} du \quad (\text{A.19})$$

$$W_\pm(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\tau_\pm)}{u - u_0} du \quad (\text{A.20})$$

ここに, $\tau_\pm = R_\pm u \cos \beta_\pm \sqrt{1 + (u - \tan \beta_\pm)^2}$, $u_0 = \tan \beta_\pm - \tan \gamma$ である。

これを計算すると(A.15)式が得られるので, 矩形圧力分布の前縁と後縁から成る圧力がそれぞれ $+P_c$, $-P_c$ の二つの無限に長い四辺形分布が造る波を加えるとよい。