骨組構造の有限要素崩壊解析における順応型 Shifted Integration 法

正員 都 井 裕* 正員 磯 部 大吾郎**

Adaptively Shifted Integration Technique in the Finite Element Collapse Analysis of Framed Structures

by Yutaka Toi, *Member* Daigoro Isobe, *Member*

Summary

The present study is concerned with the refinement of the previously proposed 'shifted integration technique' for the plastic collapse analysis of framed structures using the linear Timoshenko beam element or the cubic beam element based on the Bernoulli-Euler hypothesis. In the newly proposed 'adaptively shifted integration technique', numerical integration points are automatically shifted immediately after the occurrence of plastic hinges according to the previously established relations between the locations of numerical integration points and those of plastic hinges. By using the adaptively shifted integration technique, sufficiently accurate solutions can be obtained in the nonlinear frame analysis by two linear element or only one cubic element idealization for each structural member. The present technique can be easily implemented with a minimum effort into the existing finite element codes utilizing the linear and the cubic beam element.

1. 序

骨組構造の有限要素解析では，せん断変形を考慮する場合には線形チモシェンコはり要素[1]が使われ，せん断変形を無視する場合には Bernoulli-Euler の仮定に基づく3次はり要素[2]が用いられる。有限要素の剛性マトリックスは通常，数値積分により計算され，線形チモシェンコはり要素では1点積分，3次はり要素では2点積分公式が使用される。数値積分点の位置と実際の応力評価点あるいは塑性ヒンジ発生点の位置の間の関係を知ることは，有限要素解析の実務において重要な問題である。このことは，形成される塑性ヒンジの位置が，骨組構造の塑性崩壊荷重を決定することを想起すれば，自ずと明らかであろう[3]。

都井は，これらの有限要素と，応力あるいは塑性ヒンジ形成位置が陽に与えられている物理モデルである剛体・ばねモデル[4]のひずみエネルギー近似の等価条件を考察することにより，これらの有限要素における数値積分点位置と塑性ヒンジ発生点位置の関係を初めて見出した[5),6)]。これらの関係を利用することにより，応力評価点をいわゆるホットスポットに合わせたり，部材結合点および集中荷重点に正確に塑性ヒンジを発生させたりすることが可能となり，有限要素法による骨組構造の塑性崩壊解析の精度と効率が向上する。この方法は，文献5)，6)において Shifted Integration 法と名付けられた。

Shifted Integration 法の応用に際し，文献5)～9)では，次の手順をとった。すなわち，工学的判断により塑性ヒンジが発生すると予想される部分（たとえば，クランプ端，部材結合部および集中荷重点）に正確に塑性ヒンジが形成されるように，入力データの段階であらかじめ数値積分点をシフトしておいた。この処理により，塑性崩壊荷重の収束性は著しく改善されたものの，特に少数要素の場合に変位解の精度が若干低下した。この欠点を改善するためには，一種の順応型（あるいは適応型）手順が有効と考えられる。すなわち，弾性要素における数値積分点は線形解析に対する最適位置（線形チモシェンコはり要素では中央点，3次はり要素ではガウス積分点）に置き，全塑性断面の発生直後に，その点に正確に塑性ヒンジが形成されるように Shifted Integration 法を適用する。

本論文では，線形チモシェンコはり要素および Bernoulli-Euler の仮定に基づく3次はり要素を用いた骨組構造の塑性崩壊解析における，上述のような順応型手法を考案している。この新たに提案される「順応型 Shifted

* 東京大学生産技術研究所
** 東京大学大学院

原稿受理 平成4年1月10日
春季講演会において講演 平成4年5月12，13日

Integration 法（Adaptively Shifted Integration Technique[10]）」の有効性を実証するために，いくつかの数値例を含めた。

2. 順応型 Shifted Integration 法

2.1 線形チモシェンコはり要素

線形チモシェンコはり要素を用いた骨組構造の塑性崩壊解析は，次の増分型仮想仕事式に基づいている。

$$\delta V-\delta W=\int(\varDelta M_x\delta\varDelta\kappa_x+\varDelta M_y\delta\varDelta\kappa_y+\varDelta N\delta\varDelta\varepsilon_z+\varDelta M_z\delta\varDelta\theta_{z,z}+\varDelta V_x\delta\varDelta\gamma_{xz}+\varDelta V_y\delta\varDelta\gamma_{yz})dz-\delta W \tag{1}$$

ここに，V と W はそれぞれ，内部仕事および外部仕事である。局所座標系は Fig. 1 に示されている。M_x, M_y, N, M_z, V_x および V_y はそれぞれ，x 軸および y 軸まわりの曲げモーメント，軸力，ねじりモーメント，x 軸および y 軸方向のせん断力であり，一方，κ_x, κ_y, ε_z, $\theta_{z,z}$, γ_{xz} および γ_{yz} は，対応する一般化ひずみである。記号 δ および $\varDelta$ はそれぞれ，変分および増分を意味する。

一般化ひずみの増分は次式により与えられる。

$$\varDelta\kappa_x=-\frac{d\varDelta\theta_x}{dz} \tag{2 a}$$

$$\varDelta\kappa_y=\frac{d\varDelta\theta_y}{dz} \tag{2 b}$$

$$\varDelta\varepsilon_z=\frac{d\varDelta w}{dz} \tag{2 c}$$

$$\varDelta\theta_{z,z}=\frac{d\varDelta\theta_z}{dz} \tag{2 d}$$

$$\varDelta\gamma_{xz}=\frac{d\varDelta u}{dz}-\varDelta\theta_y \tag{2 e}$$

$$\varDelta\gamma_{yz}=\frac{d\varDelta v}{dz}+\varDelta\theta_x \tag{2 f}$$

ここに，変位成分 u, v, w, θ_x, θ_y および θ_z は，Fig. 1 に定義されている。

各変位成分に対し，次式で表わされるような線形内挿関数を仮定する。

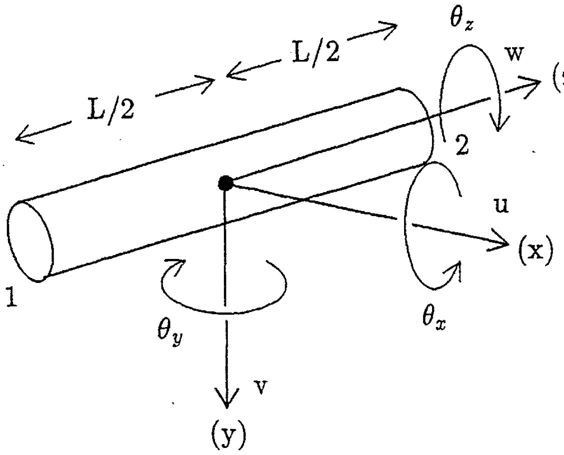


Fig. 1 Definitions of local coordinates and displacements

$$u(z)=\frac{1}{2}(1-s)u_1+\frac{1}{2}(1+s)u_2 \tag{3 a}$$

$$v(z)=\frac{1}{2}(1-s)v_1+\frac{1}{2}(1+s)v_2 \tag{3 b}$$

$$w(z)=\frac{1}{2}(1-s)w_1+\frac{1}{2}(1+s)w_2 \tag{3 c}$$

$$\theta_x(z)=\frac{1}{2}(1-s)\theta_{x1}+\frac{1}{2}(1+s)\theta_{x2} \tag{3 d}$$

$$\theta_y(z)=\frac{1}{2}(1-s)\theta_{y1}+\frac{1}{2}(1+s)\theta_{y2} \tag{3 e}$$

$$\theta_z(z)=\frac{1}{2}(1-s)\theta_{z1}+\frac{1}{2}(1+s)\theta_{z2} \tag{3 f}$$

ここに，添字1および2は，Fig. 1 に示されるような，節点番号を意味する。's' は $z/(L/2)$ と定義される無次元座標であり，L は要素長である。

(3)式を(2)式に代入すると，一般化ひずみ増分と節点変位増分の間の次式の関係が導かれる。

$$\varDelta\kappa_x=-\frac{1}{L}(\varDelta\theta_{x2}-\varDelta\theta_{x1}) \tag{4 a}$$

$$\varDelta\kappa_y=\frac{1}{L}(\varDelta\theta_{y2}-\varDelta\theta_{y1}) \tag{4 b}$$

$$\varDelta\varepsilon_z=\frac{1}{L}(\varDelta w_2-\varDelta w_1) \tag{4 c}$$

$$\varDelta\theta_{z,z}=\frac{1}{L}(\varDelta\theta_{z2}-\varDelta\theta_{z1}) \tag{4 d}$$

$$\varDelta\gamma_{xz}=\frac{1}{L}\left\{\varDelta u_2-\frac{L}{2}(1+s_1)\varDelta\theta_{y2}-\varDelta u_1-\frac{L}{2}(1-s_1)\times\varDelta\theta_{y1}\right\} \tag{4 e}$$

$$\varDelta\gamma_{yz}=\frac{1}{L}\left\{\varDelta v_2+\frac{L}{2}(1+s_1)\varDelta\theta_{x2}-\varDelta v_1+\frac{L}{2}(1-s_1)\times\varDelta\theta_{x1}\right\} \tag{4 f}$$

ここで，せん断ひずみ γ_{xz} および γ_{yz} は，いわゆる 'shear locking'[1] を避けるために，1点 s_1 で評価されている。他のひずみ成分はすべて定数であり，したがって，剛性マトリックスは s_1 における1点積分により評価されることになる。

弾性変形時の断面力と一般化ひずみの間の増分関係は次式により与えられる。

$$\varDelta M_x=EI_x\varDelta\kappa_x \tag{5 a}$$

$$\varDelta M_y=EI_y\varDelta\kappa_y \tag{5 b}$$

$$\varDelta N=EA\varDelta\varepsilon_z \tag{5 c}$$

$$\varDelta M_z=GK\varDelta\theta_{z,z} \tag{5 d}$$

$$\varDelta V_x=\alpha_x GA\varDelta\gamma_{xz} \tag{5 e}$$

$$\varDelta V_y=\alpha_y GA\varDelta\gamma_{yz} \tag{5 f}$$

ここに，EI_x, EI_y, EA, GK, $\alpha_x GA$ および $\alpha_y GA$ はそれぞれ，x 軸まわりの曲げ剛性，y 軸まわりの曲げ剛性，軸剛性，Saint-Venant のねじり剛性，x 軸方向のせん断剛性および y 軸方向のせん断剛性である。α_x および α_y はせん断修正係数である。

Fig. 2 を参照すると，線形チモシェンコはり要素における数値積分点位置と塑性ヒンジ発生点位置の関係は

$$s_1=-r_1 \quad または \quad r_1=-s_1 \tag{6}$$

と表現される[5),6)]。ここに，s_1 および r_1 はそれぞれ，数値積分点位置および形成されるべき塑性ヒンジの位置である。

要素の全領域が弾性的に挙動している時は，精度および対称性の見地から，要素中央 ($s_1=0$) に数値積分点を配置することが望ましい。この条件下では $r_1=0$ であり，よって，(5 a)式，(5 b)式，(5 e)式および(5 f)式によって計算される曲げモーメントおよびせん断力は，物理的にも要素中央点における諸量である。

はり理論に従えば，曲げモーメントとせん断力の関係は

$$V_x=-\frac{dM_y}{dz} \tag{7 a}$$

$$V_y=-\frac{dM_x}{dz} \tag{7 b}$$

と与えられる。よって，曲げモーメント増分 $\Delta M_x(s)$ および $\Delta M_y(s)$ の要素長方向分布は，要素中央点における曲げモーメント増分 $\Delta M_x, \Delta M_y$ およびせん断力増分 $\Delta V_x, \Delta V_y$ を用いて，次式により近似することができる。

$$\Delta M_x(s)=\Delta M_x-\frac{\Delta V_y Ls}{2} \tag{8 a}$$

$$\Delta M_y(s)=\Delta M_y-\frac{\Delta V_x Ls}{2} \tag{8 b}$$

(8)式は，曲げモーメントが要素内で線形に変化し，2つの端点 ($s=\pm1$) のどちらかで，最大絶対値をとることを示している。結果として，弾性的に変形している要素内の断面力分布は(8 a)式，(8 b)式，(5 c)式，(5 d)式，(5 e)式および(5 f)式により与えられる。ここで，曲げモーメントを除く諸量は要素内で定数値をとる。

要素内で最初に全塑性状態に達する断面位置は，計算された断面力分布を，2方向の曲げモーメント，軸力，ねじりモーメントおよびせん断力により表現された，次式で与えられるような降伏条件と比較することにより，決定できる。

$$f(M_x, M_y, N, M_z, V_x, V_y)=0 \tag{9}$$

全塑性断面の発生直後に，(6)式に従い，その全塑性断面位置に正確に塑性ヒンジが形成されるように，数値積分点をシフトする。もし，全塑性断面が要素の右端 ($s=1$) に発生したならば，数値積分点は要素の左端 ($s_1=-1$, よって $r_1=1$) にシフトされ，全塑性断面が要素左端に発生したならば，積分点は要素右端にシフトされる。断面降伏後は，(5)式に与えられた断面力と一般化ひずみの増分関係が，(9)式を塑性ポテンシャルとして用いた塑性流れ理論に基づく関係に置き換えられる。また，断面降伏後，シフトされた数値積分点において計算された断面力増分は，全塑性断面発生位置において降伏前に計算されていた総断面力値に加算されることに注意されたい。

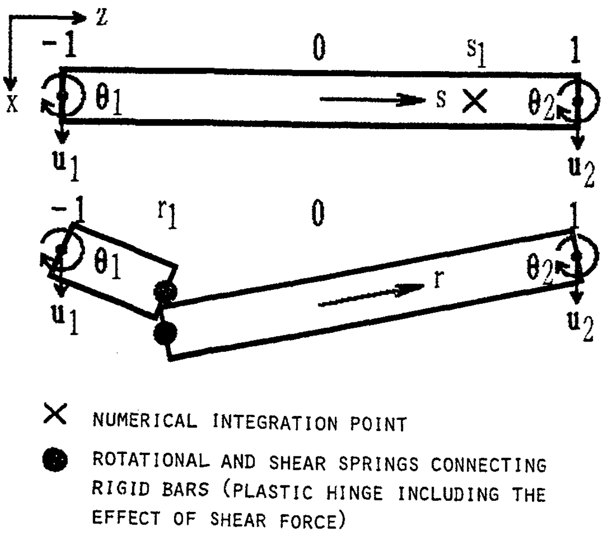


Fig. 2 Linear Timoshenko beam element and its physical equivalent

2.2 3次はり要素

3次はり要素を用いた骨組構造の塑性崩壊解析は，次式の増分形仮想仕事式に基づく。

$$\delta V-\delta W=\int(\Delta M_x\delta\Delta\kappa_x+\Delta M_y\delta\Delta\kappa_y+\Delta N\delta\Delta\varepsilon_z+\Delta M_z\delta\Delta\theta_{z,z})dz-\delta W=0 \tag{10}$$

ここに，V および W はそれぞれ，内部仕事および外部仕事である。M_x, M_y, N および M_z はそれぞれ，x 軸まわりの曲げモーメント，y 軸まわりの曲げモーメント，軸力およびねじりモーメントであり，$\kappa_x, \kappa_y, \varepsilon_z$ および $\theta_{z,z}$ は対応する一般化ひずみである。記号 δ および Δ は変分および増分を意味する。

一般化ひずみの増分は次式により与えられる。

$$\Delta\kappa_x=\frac{d^2\Delta v}{dz^2} \tag{11 a}$$

$$\Delta\kappa_y=\frac{d^2\Delta u}{dz^2} \tag{11 b}$$

$$\Delta\varepsilon_z=\frac{d\Delta w}{dz} \tag{11 c}$$

$$\Delta\theta_{z,z}=\frac{d\Delta\theta_z}{dz} \tag{11 d}$$

ここに，変位成分 $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ および θ_z は，Fig. 1 に定義されている。

次式に示されるように，横たわみに対して3次内挿関数を仮定し，軸方向変位およびねじれ角に関しては線形内挿関数を仮定する。

$$u(z)=H_{00}u_1+H_{10}L\theta_{y1}+H_{01}u_2+H_{11}L\theta_{y2} \tag{12 a}$$

$$v(z)=H_{00}v_1-H_{10}L\theta_{x1}+H_{01}v_2-H_{11}L\theta_{x2} \tag{12 b}$$

$$w(z)=\frac{1}{2}(1-s)w_1+\frac{1}{2}(1+s)w_2 \tag{12 c}$$

$$\theta_z(z)=\frac{1}{2}(1-s)\theta_{z1}+\frac{1}{2}(1+s)\theta_{z2} \tag{12 d}$$

ここに，

$$H_{00}=\frac{1}{8}(4-6s+2s^3) \tag{13 a}$$

$$H_{10}=\frac{1}{8}(1-s-s^2+s^3) \tag{13 b}$$

$$H_{01}=\frac{1}{8}(4+6s-2s^3) \tag{13 c}$$

$$H_{11}=\frac{1}{8}(-1-s+s^2+s^3) \tag{13 d}$$

(12)式において，下添字1および2は，Fig.1に示すような節点番号を意味する。's' は，$z/(L/2)$ と定義される無次元座標であり，L は要素長である。

(12)式を(11)式に代入すると，一般化ひずみ増分と節点変位増分に関する次の関係式を得る。

$$\Delta\kappa_x=\frac{6s_i}{L^2}\Delta v_1-\frac{3s_i-1}{L}\Delta\theta_{y1}-\frac{6s_i}{L^2}\Delta v_2-\frac{3s_i+1}{L}\Delta\theta_{y2} \tag{14 a}$$

$$\Delta\kappa_y=\frac{6s_i}{L^2}\Delta u_1+\frac{3s_i-1}{L}\Delta\theta_{x1}-\frac{6s_i}{L^2}\Delta u_2+\frac{3s_i+1}{L}\Delta\theta_{x2} \tag{14 b}$$

$$\Delta\varepsilon_z=\frac{1}{L}(\Delta w_2-\Delta w_1) \tag{14 c}$$

$$\Delta\theta_{z,z}=\frac{1}{L}(\Delta\theta_{z2}-\Delta\theta_{z1}) \tag{14 d}$$

ここに，曲率変化 κ_x および κ_y は，剛性マトリックスを2点積分により評価することに対応して，2点 s_1 および s_2 で評価されている。

断面力と一般化ひずみの増分関係は，次式により与えられる。

$$\Delta M_x=EI_x\Delta\kappa_x \tag{15 a}$$

$$\Delta M_y=EI_y\Delta\kappa_y \tag{15 b}$$

$$\Delta N=EA\Delta\varepsilon_z \tag{15 c}$$

$$\Delta M_z=GK\Delta\theta_{z,z} \tag{15 d}$$

Fig.3を参照すると，Bernoulli-Eulerの仮定に基づく3次はり要素における，数値積分点位置と塑性ヒンジ発生位置の関係は，次式により表現される[5),6)]。

$$r_i=\pm\frac{1}{3s_2}\qquad (i=1,2\,;\ s_1=-s_2) \tag{16}$$

ここに，(s_1, s_2) および (r_1, r_2) はそれぞれ，数値積分点および形成されるべき塑性ヒンジの位置である。

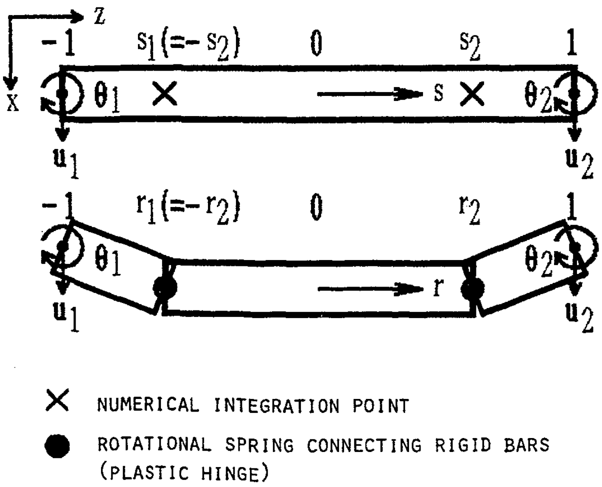


Fig. 3　Cubic beam element and its physical equivalent

要素の全領域が弾性的に挙動する時は，ガウス積分点 ($s_i=\pm1/\sqrt{3}$) が最適な数値積分点位置であり，これは最も正確な線形解を与える。この条件下では，$r_i=\pm1/\sqrt{3}$ であり，よってガウス積分点において計算される曲げモーメントは，物理的にも同一点のそれである。要素内の曲げモーメント分布は次式により与えられる。

$$\Delta M_x=EI_x\left(\frac{6s}{L^2}\Delta v_1-\frac{3s-1}{L}\Delta\theta_{y1}-\frac{6s}{L^2}\Delta v_2-\frac{3s+1}{L}\Delta\theta_{y2}\right) \tag{17 a}$$

$$\Delta M_y=EI_y\left(\frac{6s}{L^2}\Delta u_1+\frac{3s-1}{L}\Delta\theta_{x1}-\frac{6s}{L^2}\Delta u_2+\frac{3s+1}{L}\Delta\theta_{x2}\right) \tag{17 b}$$

これらの式により，要素内で曲げモーメントは線形的に変化し，2端点 ($s=\pm1$) のどちらか1点で最大絶対値をとることがわかる。

最初に全塑性状態に達する要素内断面位置は，計算された断面力分布を，2方向の曲げモーメント，軸力およびねじりモーメントにより表現された次式の降伏関数と比較することにより，決定することができる。

$$f(M_x, M_y, M_z, N)=0 \tag{18}$$

全塑性断面の発生直後に，その全塑性断面位置に正確に塑性ヒンジが形成されるように，(16)式に従い，数値積分点をシフトする。もし，全塑性断面が要素端点のどちらか一方で起こったならば，数値積分点は $s_i=\pm1/3$ (よって，$r_i=\pm1$) に動かされる。以下，その要素の弾性構成式を流れ理論に基づく塑性関係に置換して，増分計算が続行される。その際，断面降伏後に，シフトされた数値積分点において計算された断面力増分は，全塑性断面発生位置（およびその対称位置）において降伏前に計算されていた総断面力値に足し込まれる。

3.　骨組構造の塑性崩壊解析

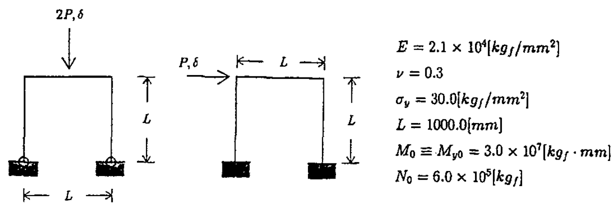
提案手法の有効性をチェックするために，順応型Shifted Integration法を単純な平面および空間骨組の塑性崩壊問題に応用した。

解析された門型骨組および空間骨組を，その寸法および材料定数とともにFig.4に示す。門型骨組については，Fig.4(a)に示すように，2つの荷重ケースを計算した。

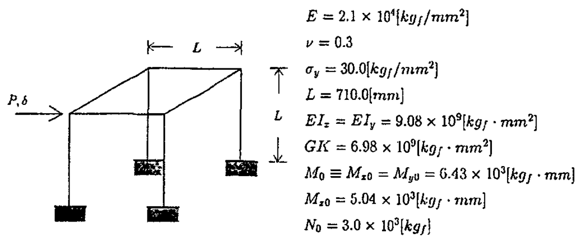
骨組解析において仮定された降伏条件は次式により表現される。

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^2+\left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^2+\left(\frac{N}{N_0}\right)^2+\left(\frac{M_z}{M_{z0}}\right)^2-1=0 \tag{19}$$

ここに，M_x, M_y, N および M_z はそれぞれ，2成分の曲げモーメント，軸力およびねじりモーメントである。下添字'0'は，各断面力成分が単独で部材断面に作用した場合の全断面塑性値を意味する。線形チモシェンコはり要素を用いた



(a) portal frame



(b) space frame

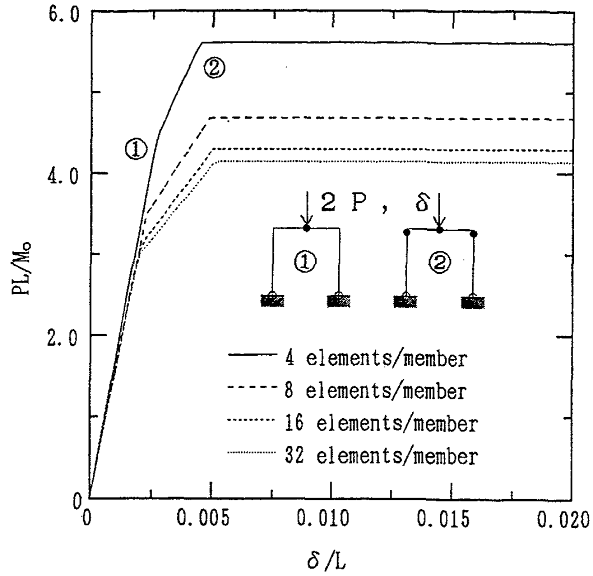
Fig. 4 Analyzed portal frame and space frame

解析においても，3次要素を用いた場合と同様に，降伏条件に対するせん断力の影響を無視した。

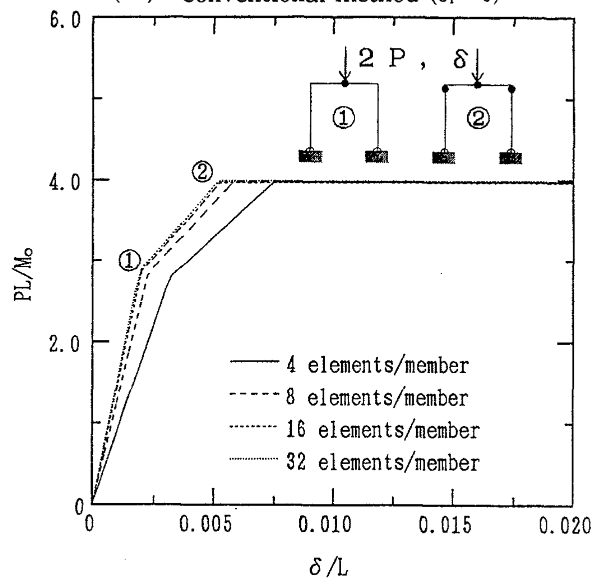
3.1 線形チモシェンコはり要素

骨組構造の塑性崩壊問題に対し，線形チモシェンコはり要素を用いて計算した結果を，Fig. 5，Fig. 6 および Fig. 7 に示す。Fig. 5 および Fig. 6 はそれぞれ，はり中央点およびはり・柱結合部に集中荷重を受ける門型骨組に対する結果であり，Fig. 7 は空間骨組に対する結果である。各結果における図(a)，(b)，(c)はそれぞれ，次の3つの方法により与えられる荷重・変位解に対する収束性テスト結果を示す：(i) 数値積分点が全解析過程を通じて常に各要素中央点に位置する，通常の有限要素法，(ii) 部材結合部あるいは荷重点を含む要素内の数値積分点をあらかじめ，その結合点あるいは荷重点に正確に塑性ヒンジが発生するように $s_1 = \pm 1$ の位置にシフトしておく，単純な Shifted Integration 法，(iii) 本研究で提案された順応型 Shifted Integration 法。なお，各構造部材は一様に分割され，図中に示された要素数は1部材に対するものである。各図には，塑性ヒンジの進展過程も合わせて示している。

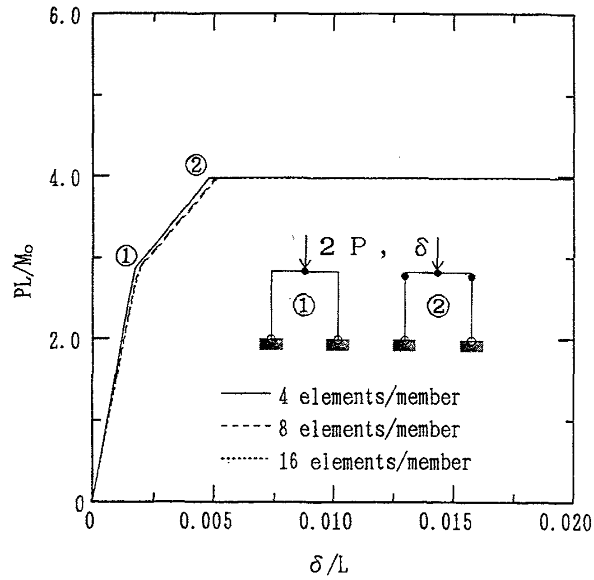
これらの解析結果より，以下のことがわかる。すなわち，図(a)に示されるように，通常法においては塑性崩壊荷重の収束が極めて遅く，収束解を得るためには，1部材に対し30近い要素数が要求される。これは，この方法による塑性ヒンジの発生点が要素中央点であり，部材結合点あるいは集中荷重点と厳密に一致しないためである。また，図(b)からわかるように，Shifted Integration 法の単純な応用では，崩壊荷重の収束性は著しく改善されるものの，変位解の精度は若干損われる。これは，解析当初から数値積分点をシフトしておくことが線形弾性解に悪影響を及ぼすためである。他方，図(c)に示されるように，順応型 Shifted Integration 法では，数値積分点位置が適応的にシフトされ



(a) conventional method ($s_1 = 0$)

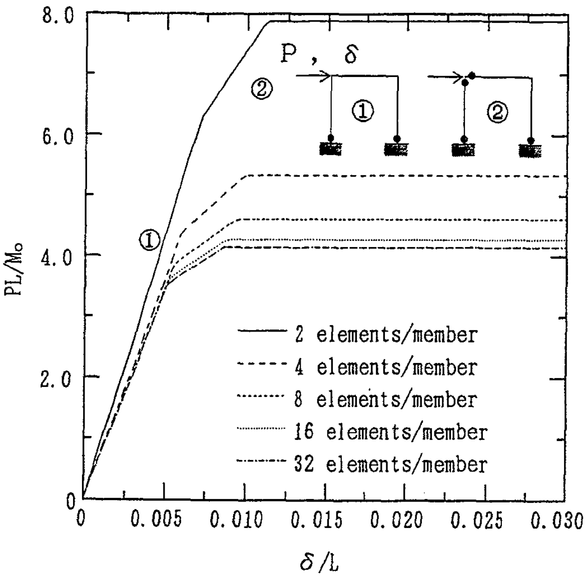


(b) shifted integration technique

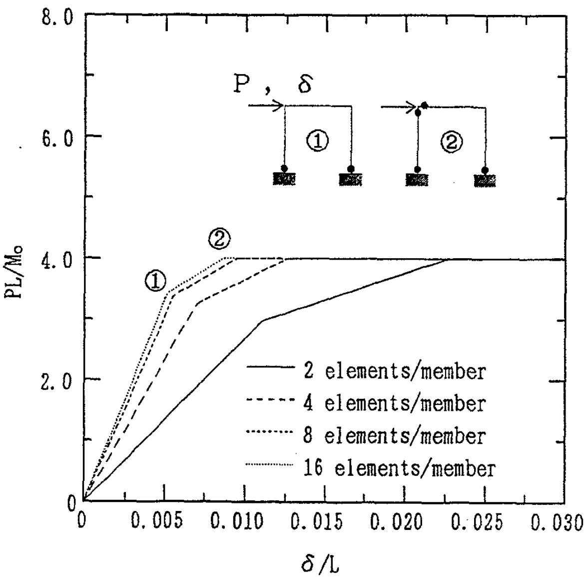


(c) adaptively shifted integration technique

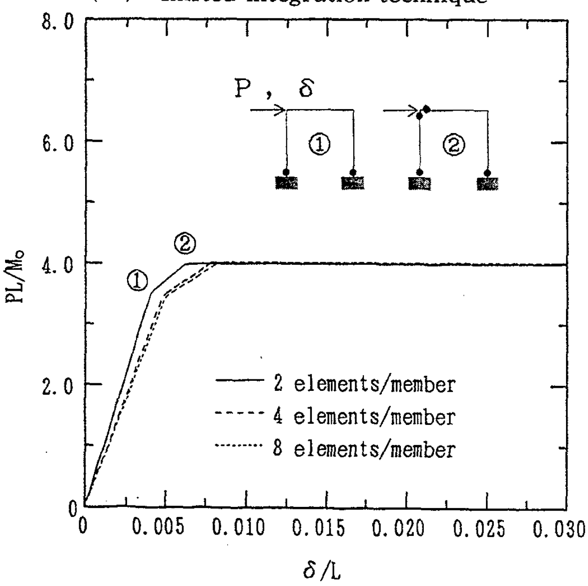
Fig. 5 Plastic collapse analysis of a portal frame by the linear beam element (1)



(a) conventional method ($s_1=0$)

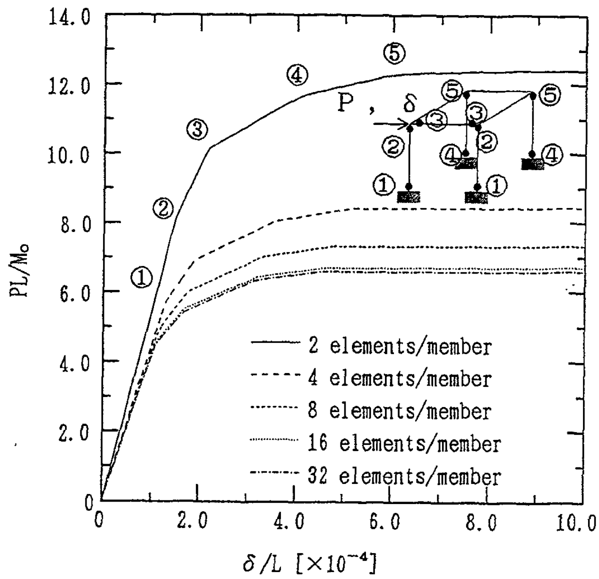


(b) shifted integration technique

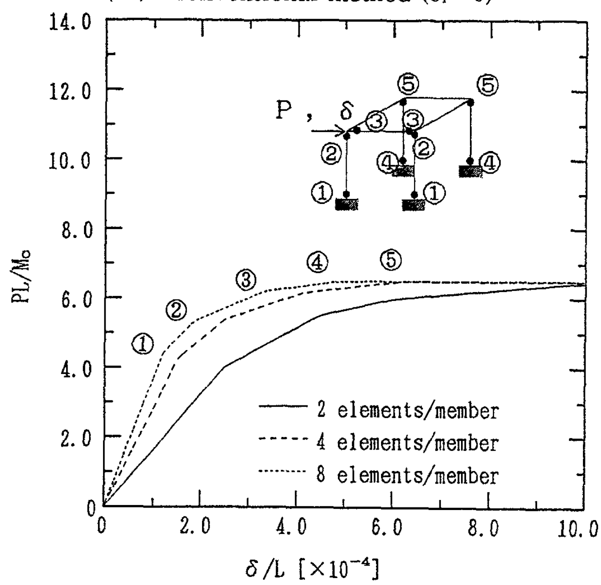


(c) adaptively shifted integration technique

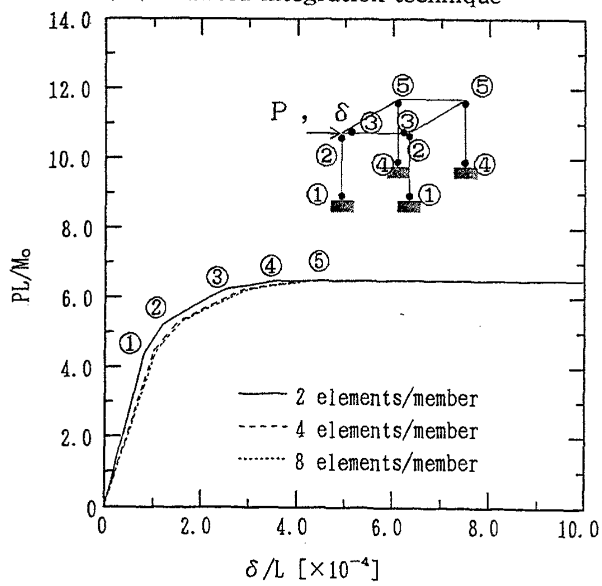
Fig. 6 Plastic collapse analysis of a portal frame by the linear beam element (2)



(a) conventional method ($s_1=0$)



(b) shifted integration technique



(c) adaptively shifted integration technique

Fig. 7 Plastic collapse analysis of a space frame by the linear beam element

ているため，最小限の要素数で，崩壊荷重，変位ともに，十分に正確な解が得られている。線形チモシェンコはり要素に順応型 Shifted Integration 法を適用する際の 1 部材に対する最小要素数は，部材結合部のみに塑性ヒンジの発生が予想される場合は 2 であるが (Fig. 6 および Fig. 7)，スパン間に塑性ヒンジの発生が予想される場合は 4 となる (Fig. 5) ことに注意されたい。

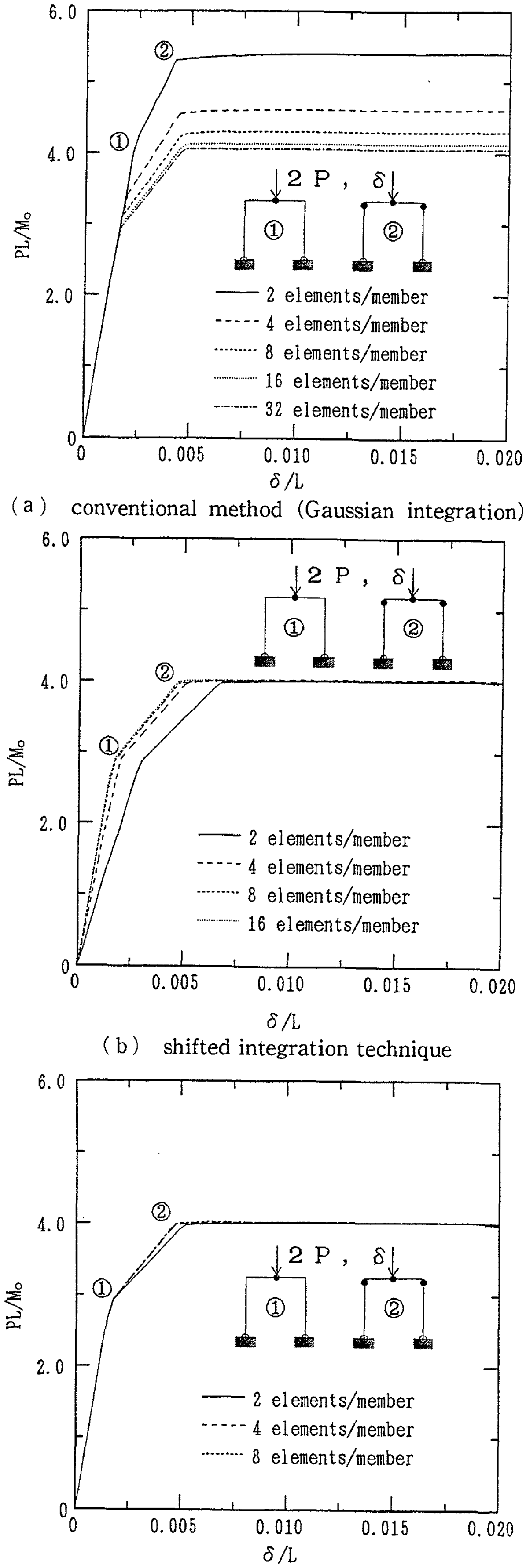
3.2 3次はり要素

門型および空間骨組に対し 3 次要素を用いて得た結果を，Fig. 8, Fig. 9 および Fig. 10 に示す。Fig. 8 および Fig. 9 は門型骨組に対する結果であり，Fig. 10 は空間骨組に対する結果である。各図では，線形チモシェンコはり要素の場合と同様に，次の 3 つの方法により与えられた解が互いに比較されている：(i) 各要素において数値積分点が常にガウス積分点 ($s_i=\pm 1/\sqrt{3}$) に位置している，通常の有限要素法，(ii) 部材結合部あるいは荷重点を含む要素内の数値積分点をあらかじめ，その結合点あるいは荷重点に正確に塑性ヒンジが発生するように $s_i=\pm 1/3$ の位置にシフトしておく，単純な Shifted Integration 法，(iii) 本研究で提案された順応型 Shifted Integration 法。

線形チモシェンコはり要素の場合と同様，通常法においては，塑性崩壊荷重の収束が遅く (図(a))，単純な Shifted Itegration 法では，変位の収束が遅い (図(b))。他方，図(c) に示されているように，順応型 Shifted Integration 法は，塑性崩壊荷重および変位の双方に対し，最小数要素で，最も正確な解を与えている。Fig. 9 および Fig. 10 の例のように，部材結合部のみに荷重が作用し，スパン間に塑性ヒンジが発生しないような場合には，1 部材 1 要素の理想化で，実用上の見地から十分に正確な解を得ることができる。

4. 結　　論

本論文では，線形チモシェンコはり要素および Bernoulli-Euler の仮定に基づく 3 次はり要素を用いた骨組構造の塑性崩壊解析において有効な，順応型 Shifted Integration 法を提案した。本手法では，数値積分点位置を適応的に制御しており，骨組構造の塑性崩壊解析において，最小限の要素数（1 構造部材に対し，2 個の線形要素あるいは 1 個の 3 次要素によるモデル化）で，崩壊荷重・変位双方に対し，実用上十分に正確な解を得ることができる。よって，海洋骨組構造の最終強度解析や高層ビルの耐震解析のような，空間骨組構造の大規模・塑性崩壊解析において，最高度の計算効率を期待できる。さらに，本手法は，線形チモシェンコはり要素および 3 次はり要素を利用している既存の有限要素コードに，最小限の手間でインプリメントできる。座屈および動的崩壊問題に対する数値的研究は現在進行中である。

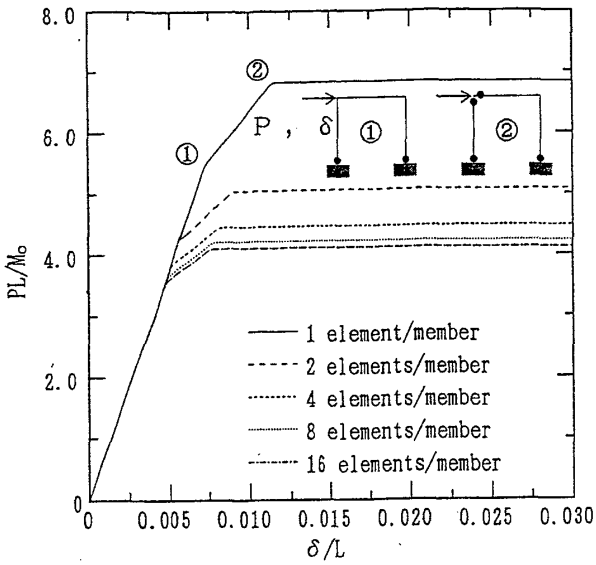


(a) conventional method (Gaussian integration)

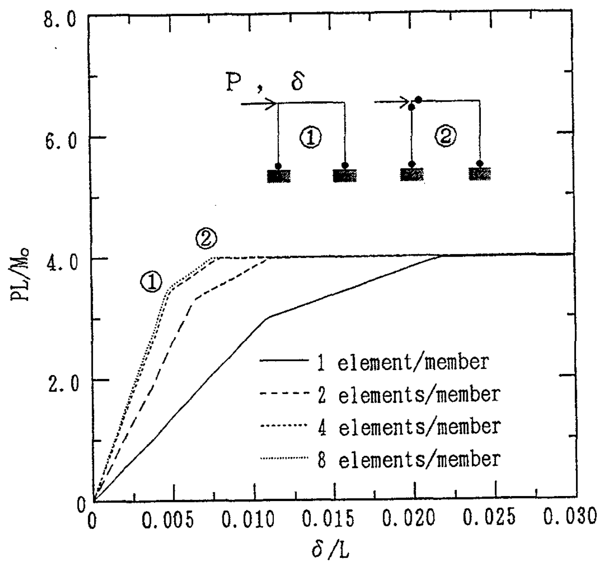
(b) shifted integration technique

(c) adaptively shifted integration technique

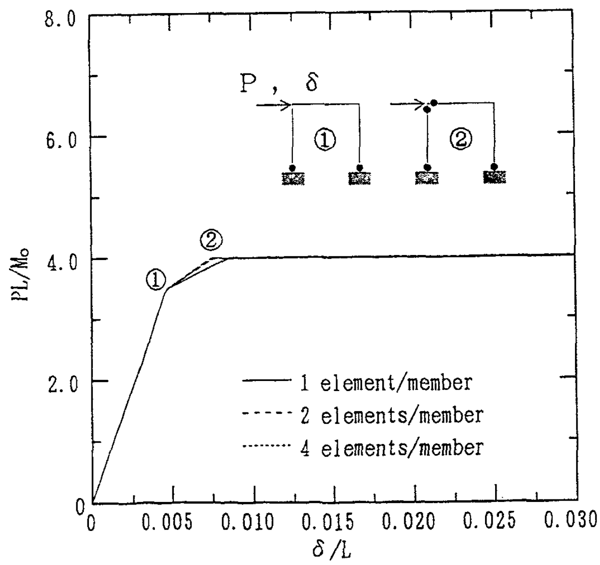
Fig. 8 Plastic collapse analysis of a portal frame by the cubic beam element (1)



(a) conventional method (Gaussian integration)

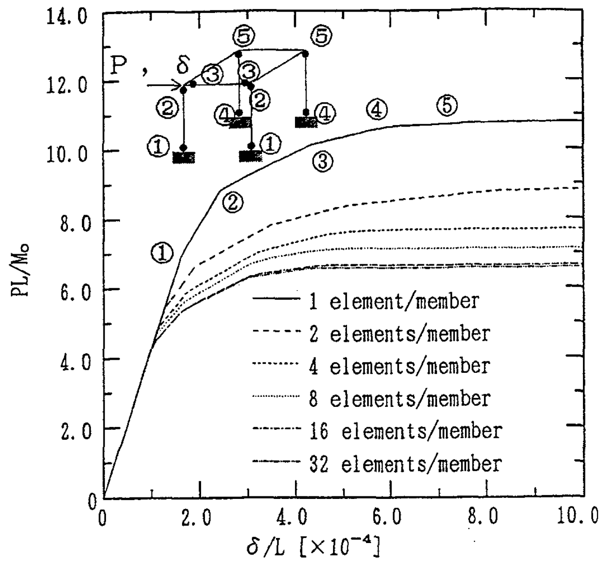


(b) shifted integration technique

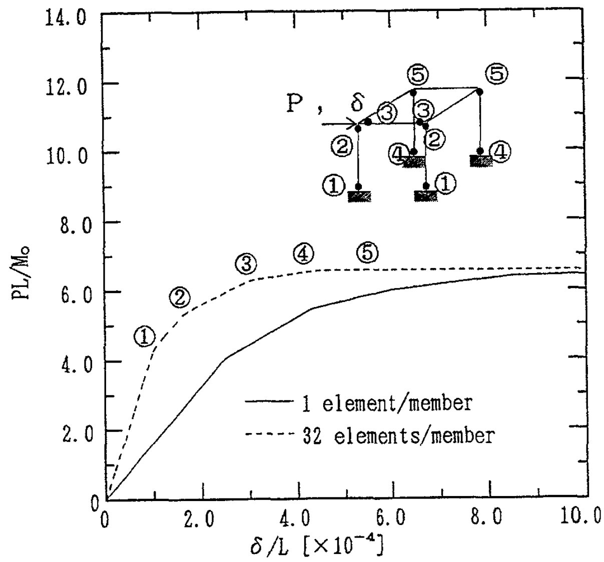


(c) adaptively shifted integration technique

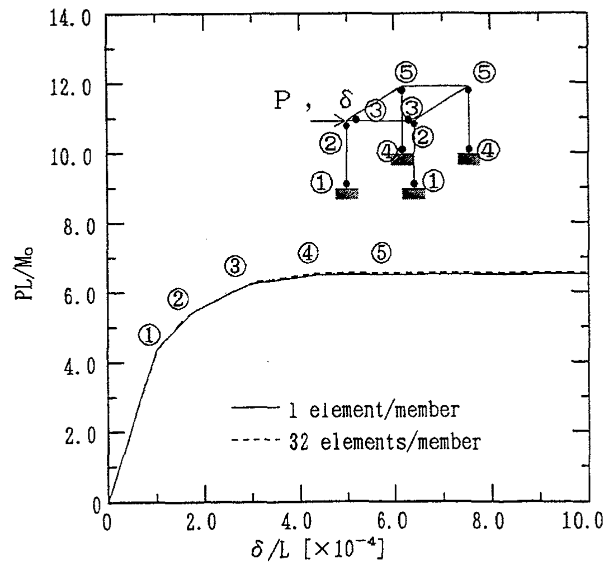
Fig. 9 Plastic collapse analysis of a portal frame by the cubic beam element (2)



(a) conventional method (Gaussian integration)



(b) shifted integration technique



(c) adaptively shifted integration technique

Fig. 10 Plastic collapse analysis of a space frame by the cubic beam element

参 考 文 献

1) T. J. R. Hughes, R. L. Taylor and W. Kanoknukulchai : A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 11, (1977), 1529-1543.
2) G. H. Gallagher : Finite Element Analysis (Fundamentals), Prentice-Hall Inc., (1975).
3) P. G. Hodge, Jr. : Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, (1959).
4) 都井：鋼構造の離散化極限解析，コンピュータによる極限解析法シリーズ 3，培風館，(1990)
5) 都井：骨組構造および回転対称シェル構造の有限要素解析における Shifted Integration 法について，日本造船学会論文集，第 168 号，(1990)，357-369.
6) Y. Toi : Shifted Integration Technique in One-Dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 31, (1991), 1537-1552.
7) 都井，梁：骨組構造の崩壊シミュレーション（その 1．定式化および簡単な数値例），日本造船学会論文集，第 166 号，(1989)，285-294.
8) 都井，梁，小畑：骨組構造の崩壊シミュレーション（その 2．クラッシュ解析結果と実験終果の比較），日本造船学会論文集，第 167 号，(1990)，169-177.
9) Y. Toi and H. -J. Yang : Finite Element Crush Analysis of Framed Structures, Computers and Structures, Vol. 41, (1991), 137-149.
10) Y. Toi and D. Isobe : Adaptively Shifted Integration Technique for Plastic Collapse Analysis of Framed Structures, (1991). submitted